高三数学测试　2020.2.13

试卷满分 150 分　　考试时间 120 分钟

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1．若集合 $A=\{x\mid x^2-2x=0\}$，$B=\{0,1,2\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\{0\}$　（B）$\{0,1\}$　（C）$\{0,2\}$　（D）$\{0,1,2\}$

2．在复平面内，复数 z 对应的点的坐标为 $(2,-1)$，则 $(1+\mathrm{i})z$ 等于

（A）$3+\mathrm{i}$　（B）$2+\mathrm{i}$　（C）$1+\mathrm{i}$　（D）$1-\mathrm{i}$

3．已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=1$，$a_n+a_{n+1}=2n$，则 a_1+a_3 的值为

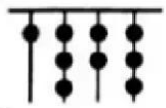
（A）4　（B）5　（C）6　（D）8

4．已知 $a,b\in\mathbf{R}$，则“$a<b$”是“$\log_2 a<\log_2 b$”的

（A）充分而不必要条件　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　（D）既不充分也不必要条件

5．“结绳计数”是远古时期人类智慧的结晶，即人们通过在绳子上打结来记录数量，如图所示是一位猎人记录自己采摘果实个数，在从右向左依次排列的不同绳子上打结，满四进一，根据图示可知，猎人采摘的果实的个数是



（A）492　（B）382　（C）185　（D）123

6. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f\left(\dfrac{3}{2}-x\right)=f(x)$，当 $-1\le x<0$ 时，$f(x)=\log_3(-6x+3)$，

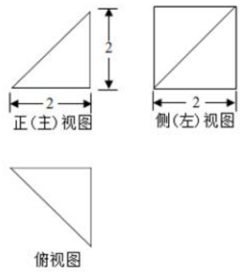
则 $f(2020)$ 的值为

（A）-1　（B）-2　（C）1　（D）2

7．椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右焦点为 F_1,F_2，离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，过 F_2 的直线 l 交 C 于 A,B 两点，若 ΔAF_1B 的周长为 $4\sqrt{3}$，则 C 的方程为

（A）$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$　　（B）$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$　　（C）$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{8}=1$　　（D）$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$

8．某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的体积为



（A）$\dfrac{2}{3}$　　（B）$\dfrac{4}{3}$

（C）$\dfrac{8}{3}$　　（D）$\dfrac{16}{3}$

9．有一种细菌和一种病毒，每个细菌在每秒杀死一个病毒的同时将自身分裂为2个，现在有1个这种细菌和200个这种病毒，问细菌将病毒全部杀死至少需要

（A）6 秒　　（B）7 秒　　（C）8 秒　　（D）9 秒

10．已知点 $A(1,-2)$，$B(2,0)$，P 为曲线 $y=\sqrt{3-\dfrac{3}{4}x^2}$ 上任意一点，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围为

（A）$[1,7]$　　（B）$[-1,7]$　　（C）$[1,3+2\sqrt{3}]$　　（D）$[-1,3+2\sqrt{3}]$

第II卷(非选择题，共110分)

二、填空题（本大题共5小题，每小题5分，共25分）

11．直线 $x-\sqrt{3}y-1=0$ 的倾斜角的大小是________.

12．已知 $f(x),g(x)$ 分别是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数和奇函数，且 $f(x)-g(x)=x^3+x^2+1$，则 $f(1)+g(1)=$________.

13．ΔABC中，若面积为6，$c=5$，$\tan A=\dfrac{4}{3}$，则a的值为________．

14．设函数$f(x)=\begin{cases}x(x+2), & x\leqslant a\\ \ln x, & x>a\end{cases}$，

①若$a=1$，则$f(x)$的零点的个数为________；

②若$f(x)$的值域为$[-1,+\infty)$，则实数a的取值范围是________．

15．已知向量$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$是平面α内的一组基向量，O为α内的定点，对于α内任意一点P，当$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$时，则称有序实数对$(x,y)$为点$P$的广义坐标，若点$A,B$的广义坐标分别为$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，对于下列命题：

① 线段AB中点的广义坐标为$(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2})$；

② A,B两点间的距离为$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$；

③ 向量$\overrightarrow{OA}$平行于向量$\overrightarrow{OB}$的充要条件是$x_1y_2=x_2y_1$；

④ 向量$\overrightarrow{OA}$垂直于向量$\overrightarrow{OB}$的充要条件是$x_1x_2+y_1y_2=0$．

其中的真命题是________．（请写出所有真命题的序号）

17．（本小题满分14分）

为了解甲、乙两个快递公司的工作状况，假设同一个公司快递员的工作状况基本相同，现从甲、乙两公司各随机抽取一名快递员，并从两人某月（30天）的快递件数记录结果中随机抽取10天的数据，制表如下：

甲公司某员工A		乙公司某员工B
3 9 6 5 8 3 3 2	3	4 6 6 6 7 7
0 1	4	4 2 2 2

每名快递员完成一件货物投递可获得的劳务费情况如下：

甲公司规定每件4.5元；乙公司规定每天35件以内（含35件）的部分每件4元，超出35件的部分每件7元．

（Ⅰ）根据表中数据写出甲公司员工A在这10天投递的快递件数的平均数和众数；

（Ⅱ）为了解乙公司员工B的每天所得劳务费的情况，从这10天中随机抽取1天，他所得的劳务费记为X（单位：元），求X的分布列和数学期望；

（Ⅲ）根据表中数据估算两公司的每位员工在该月所得的劳务费．

19．(本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x)=a\ln x+\dfrac{1}{x}\,(a\neq 0)$．

（Ⅰ）若 $a=1$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）若 $\{x|f(x)\le 0\}\neq\varnothing$ 且 $\{x|f(x)\le 0\}\subseteq(0,1)$，求实数 a 的取值范围．

20．（本小题满分 15 分）

已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $(0,\sqrt{3})$，且离心率为 $\dfrac{1}{2}$．设 A,B 为椭圆 C 的左、右顶点，P 为椭圆上异于 A,B 的一点，直线 AP,BP 分别与直线 $l:x=4$ 相交于 M,N 两点，且直线 MB 与椭圆 C 交于另一点 H．

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程；

（Ⅱ）求证：直线 AP 与 BP 的斜率之积为定值；

（Ⅲ）判断三点 A,H,N 是否共线，并证明你的结论．

21．（本小题满分 14 分）

若数列 A_n：$a_1,a_2,\cdots,a_n$（$n\ge 2$）满足 $|a_{k+1}-a_k|=1$（$k=1,2,\cdots,n-1$），则称 A_n 为 E 数列，记 $S(A_n)=a_1+a_2+\cdots+a_n$．

（Ⅰ）写出一个满足 $a_1=a_5=0$，且 $S(A_5)>0$ 的 E 数列 A_5；

（Ⅱ）若 $a_1=13$，n=2008，证明：E 数列 A_n 是递增数列的充要条件是 a_n=2020;

（Ⅲ）对任意给定的整数 n（$n\ge 2$），是否存在首项为 0 的 E 数列 A_n，使得 $S(A_n)$=0？如果存在，写出一个满足条件的 E 数列 A_n；如果不存在，说明理由．

高三数学测试　　2020.2.13

参考答案

一、选择题

(1) C　(2) A　(3) A　(4) B　(5) D

(6) B　(7) A　(8) C　(9)C　(10)A

二、填空题

(11). $\frac{\pi}{6}$；　(12).1；　(13). 4；　(14). 2；$[\frac{1}{e},+\infty)$；　(15). ①③

（14 题第一空 2 分，第二空 3 分；15 题有错选得 0 分，少一个得 2 分）

三、解答题

(16). 证明：（Ⅰ）连接 BD 交 AC 于点 O，连结 EO，

因为 $ABCD$ 为矩形，所以 O 为 BD 的中点，

又 E 为 PD 的中点，所以 $EO//PB$，　……………………3 分

因为 $EO\subset$ 平面 AEC，$PB\not\subset$ 平面 AEC，

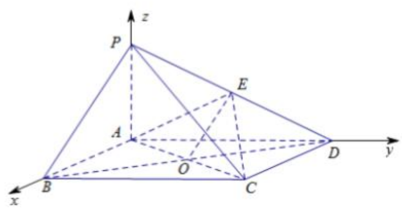
所以 $PB//$ 平面 AEC；　……………………6 分

（Ⅱ）因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$ABCD$ 为矩形，所以 AB、AD、AP 两两垂直，………7 分

如图，以 A 为坐标原点，AB、AD、AP 为 x、y、z 轴，建立空间直角坐标系 $A-xyz$，

则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(2,\sqrt{3},0)$，$D(0,\sqrt{3},0)$，

$P(0,0,1)$，$E(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$



则 $\overrightarrow{AE}=(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{AC}=(2,\sqrt{3},0)$，………8 分

设 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$ 为平面 ACE 的法向量，则 $\begin{cases}n_1\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ n_1\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x+\sqrt{3}y=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{2}z=0\end{cases}$，

令 $y=-2$，则 $\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{3},-2,2\sqrt{3})$，　……………………11 分

又 $\overrightarrow{n_2}=(1,0,0)$ 为平面 DAE 的法向量，　………………12 分

则 $\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}=\dfrac{\sqrt{57}}{19}$， ························13 分

由图知二面角 $D-AE-C$ 为锐二面角，其余弦值为 $\dfrac{\sqrt{57}}{19}$ ························14 分

(17)解：(I) 甲公司员工 A 投递快递件数的平均数为 36，众数为 33. ···················2 分

(II) 设 a 为乙公司员工 B 投递件数，则

当 a=34 时，X =136 元，当 a>35 时，$X=35\times4+(a-35)\times7$ 元，

X 的可能取值为 136,147,154,189,203 ························4 分

{说明：X 取值都对给到 4 分，若计算有错，在 4 分基础上错 1 个扣 1 分，4 分扣完为止}

X 的分布列为：

X	136	147	154	189	203
P	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{2}{10}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{10}$

························9 分

{说明：每个概率值给 1 分，不化简不扣分，随机变量值计算错误的此处不再重复扣分}

$E(X)=136\times\dfrac{1}{10}+147\times\dfrac{3}{10}+154\times\dfrac{2}{10}+189\times\dfrac{3}{10}+203\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{1655}{10}=165.5(元)$ ··············11 分

(III) 根据图中数据，可估算甲公司被抽取员工该月收入 4860 元，乙公司被抽取员工该月收入 4965 元. ························14 分

(18) 解：选①，$a_n{}^2-a_na_{n-1}-3a_{n-1}-9=0\Leftrightarrow(a_n+3)(a_n-a_{n-1}-3)=0$， ························3 分

因为 $a_1=1$，所以 $a_n-a_{n-1}-3=0$，则 $\{a_n\}$ 是等差数列，则 $a_n=3n-2$ ························6 分

要使得 a_1,a_n,a_m 成等比数列，只需要 $a_n{}^2=a_1a_m$，即 $(3n-2)^2=3m-2$ ························9 分

则有 $m=3n^2-4n+2$，因为 $n\in N^*$，所以 $m=3n^2-4n+2\in N^*$， ························12 分

当 $n=2$ 时，$m_{\min}=6$； ························14 分

选②，若 $a_n^2=a_{n-1}^2+3$，则 $\{a_n^2\}$ 是等差数列，由 $a_1=1$，得 $a_1^2=1$，……………………4 分

则 $a_n^2=a_1^2+3(n-1)=3n-2$，所以 $a_n=\sqrt{3n-2}$，……………………8 分

根据 a_1,a_n,a_m 成等比数列，得到 $a_n^2=a_1a_m$，即 $3n-2=\sqrt{3m-2}$，

则有 $m=3n^2-4n+2$，因为 $n\in N^*$，所以 $m=3n^2-4n+2\in N^*$，……………………12 分

当 $n=2$ 时，$m_{\min}=6$；……………………14 分

选③，由 $S_n=n^2-2n+2$，得 $a_n=\begin{cases}1 & n=1\\ 2n-3 & n\geq 2\end{cases}$，……………………4 分

要使得 a_1,a_n,a_m 成等比数列，只需要 $a_n^2=a_1a_m$，即 $(2n-3)^2=2m-3$ ……………………8 分

则有 $m=2n^2-6n+6$，因为 $n\in N^*$，所以 $m=2n^2-6n+6\in N^*$，……………………12 分

当 $n=3$ 时，$m_{\min}=6$；……………………14 分

（19）解：（I）由 $a=1$，得 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$，$f(1)=1$，

由 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$，得 $f'(1)=0$，则切线方程：$y=1$ ……………………3 分

（II）$f'(x)=\dfrac{a}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{ax-1}{x^2}(x>0)$. ……………………4 分

当 $a<0$ 时，$f'(x)<0$，则函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0,+\infty)$. ……………………5 分

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\dfrac{1}{a}$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下：

x	$(0,\frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a},+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0,\dfrac{1}{a})$，单调递增区间是 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$. ……………………9 分

（III）当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 内的减函数.

因为 $f(e^{-\frac{1}{a}})=a\ln(e^{-\frac{1}{a}})+\dfrac{1}{e^{-\frac{1}{a}}}=-1+\dfrac{1}{e^{-\frac{1}{a}}}=e^{\frac{1}{a}}-1<0$，

而 $e^{-\frac{1}{a}}\notin(0,1)$，不符合题意. ························11 分

当 $a>0$ 时，由（I）知：$f(x)$ 的最小值是 $f(\frac{1}{a})=-a\ln a+a=a\cdot(1-\ln a)$.

（i）若 $f(\frac{1}{a})>0$，即 $0<a<e$ 时，$\{x\mid f(x)\le 0\}=\varnothing$，不符合题意；

（ii）若 $f(\frac{1}{a})=0$，即 $a=e$ 时，$\{x\mid f(x)\le 0\}=\{\frac{1}{e}\}\subseteq(0,1)$.

所以，$a=e$ 符合题意.

（iii）若 $f(\frac{1}{a})<0$，即 $a>e$ 时，有 $0<\frac{1}{a}<1$.

因为 $f(1)=1>0$，函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 内是增函数，所以 当 $x\ge 1$ 时，$f(x)>0$.

又因为 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，所以 $\{x|f(x)\le 0\}\subseteq(0,1)$.

所以 $a>e$ 符合题意.

综上所述，实数 a 的取值范围为 $\{a\mid a\ge e\}$. ························14 分

（20）解：（I）根据题意可知 $\begin{cases} b=\sqrt{3}, \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=2, \\ b=\sqrt{3}, \\ c=1. \end{cases}$ 所以椭圆 C 的方程 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ ···3 分

（II）根据题意，直线 AP,BP 的斜率都存在且不为零，$A(-2,0),B(2,0)$,

设 $P(x_0,y_0)$，则 $\dfrac{{x_0}^2}{4}+\dfrac{{y_0}^2}{3}=1\ (-2<x_0<2)$.则 $k_{AP}\cdot k_{BP}=\dfrac{y_0}{x_0+2}\cdot\dfrac{y_0}{x_0-2}=\dfrac{y_0^2}{x_0^2-4}$.··················5 分

因为 $\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{3}=1$，所以 $y_0^2=3\left(1-\dfrac{x_0^2}{4}\right)=\dfrac{3}{4}\left(4-x_0^2\right)$. ························7 分

所以 $k_{AP}\cdot k_{BP}=\dfrac{{y_0}^2}{{x_0}^2-4}=\dfrac{3(4-{x_0}^2)}{4({x_0}^2-4)}=-\dfrac{3}{4}$.

所以直线 AP 与 BP 的斜率之积为定值 $-\dfrac{3}{4}$. ························8 分

(III) 三点 A,H,N 共线.证明如下：

设直线 AP 的方程为 $y=k(x+2)(k\ne 0)$，则直线 BP 的方程为 $y=-\dfrac{3}{4k}(x-2)$.

所以 $M(4,6k)$，$N\left(4,-\dfrac{3}{2k}\right)$， ························10 分

$k_{BM}=\dfrac{6k}{4-2}=3k$.设直线 $HM: y=3k(x-2)$，

联立方程组 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\ y=3k(x-2),\end{cases}$ 消去 y 整理得，$(1+12k^2)x^2-48k^2x+48k^2-4=0$.

设 $H(x_1,y_1)$，则 $2x_1=\dfrac{48k^2-4}{12k^2+1}$,所以 $x_1=\dfrac{24k^2-2}{12k^2+1}$, $y_1=3k(x_1-2)=\dfrac{-12k}{12k^2+1}$.

所以 $H\left(\dfrac{24k^2-2}{1+12k^2},\dfrac{-12k}{1+12k^2}\right)$. ························13 分

因为 $A(-2,0)$，$N\left(4,-\dfrac{3}{2k}\right)$，

$k_{AN}=\dfrac{-\dfrac{3}{2k}}{6}=-\dfrac{1}{4k}$, $k_{AH}=\dfrac{\dfrac{-12k}{1+12k^2}}{\dfrac{24k^2-2}{1+12k^2}+2}=-\dfrac{1}{4k}$. ················14 分

所以 $k_{AN}=k_{AH}$，所以三点 A,H,N 共线. ························15 分

（21）解：（I）0，1，2，1，0（或 0，1，0，1，0）是一个满足条件 E 的数列 A_5 ·········3 分

（II）必要性：因为 E 数列 A_n 是递增数列，所以 $a_{k+1}-a_k=1\,(k=1,2,\cdots,2007)$

所以 A_n 是首项为 12，公差为 1 的等差数列.所以 a_{2020}=13+（2008—1）×1=2020

充分性：由于 a_{2008}—a_{2007}≤1，a_{2007}—a_{2006}≤1，a_{2006}—a_{2005}≤1……a_2—a_1≤1

所以 a_{2008}—a_1≤2007，即 a_{2008}≤a_1+2007.又因为 a_1=13，a_{2008}=2020,

所以 a_{2008}=a_1+2007.故 $a_{k+1}-a_k=1\,(k=1,2,\cdots,2007)$,即 A_n 是递增数列.

综上，结论得证. ························8 分

-

（III）令 $c_k = a_{k+1} - a_k (k = 1, 2, \cdots, n-1)$, 则 $c_k = \pm 1$.

因为 $a_2 = a_1 + c_1$ ，$a_3 = a_1 + c_1 + c_2$，……，$a_n = a_1 + c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1}$,

所以 $S(A_n) = na_1 + (n-1)c_1 + (n-2)c_2 + (n-3)c_3 + \cdots + c_{n-1}$

$= \dfrac{n(n-1)}{2} - [(1-c_1)(n-1) + (1-c_2)(n-2) + \cdots + (1-c_{n-1})]$.

因为 $c_k = \pm 1$, 所以 $1 - c_k$ 为偶数 $(k = 1, \cdots, n-1)$.

所以（$1-c_1)(n-1) + (1-c_2)(n-2) + \cdots + (1-c_n)$ 为偶数.

所以要使 $S(A_n) = 0$, 必须使 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 为偶数,

即 4 整除 $n(n-1)$, 亦即 $n = 4m$ 或 $n = 4m+1 (m \in N^*)$.

当 $n = 4m$ ($m \in N^*$)时，E 数列 A_n 的项满足 $a_{4k-1} = a_{4k-3} = 0$，$a_{4k-2} = -1$ ，$a_{4k} = 1$

$(k = 1, 2, \cdots\cdots, m)$ 时，有 $a_1 = 0, S(A_n) = 0$;

当 $n = 4m+1 (m \in N^*)$ 时, E 数列 A_n 的项满足，$a_{4k-1} = a_{4k-3} = 0, a_{4k-2} = -1, a_{4k} = 1$

$(k = 1, 2, \cdots\cdots, m)$，$a_{4m+1} = 0$ 时，有 $a_1 = 0$，$S(A_n) = 0$；

当 $n = 4m+2$ 或 $n = 4m+3 (m \in N)$ 时，$n(n-1)$ 不能被 4 整除，此时不存在 E 数列 A_n，使得 $a_1 = 0, S(A_n) = 0$. ……………………14 分