2023 北京北师大二附中高三（上）期中

数　学

一、单选题（共 10 小题；共 40 分）

1. 已知集合 $A=\{x|-2\le x\le 3\}$，$B=\{x|x>0\}$，则 $A\cup B=$（　）

A. $[-2,3]$　　B. $[0,3]$　　C. $(0,+\infty)$　　D. $[-2,+\infty)$

2. 复数 $z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$ 的共轭复数 $\overline{z}=$（　）

A. $1-\mathrm{i}$　　B. $1+\mathrm{i}$

C. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　　D. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

3. 已知向量 $\vec{a}=(m,1),\vec{b}=(-1,2)$．若 $\vec{a}\parallel\vec{b}$，则 $m=$（　）

A. 2　　B. 1　　C. -1　　D. $-\dfrac{1}{2}$

4. 下列函数中，是奇函数且在定义域内单调递减的是（　）

A. $f(x)=\sin x$　　B. $f(x)=2^{|x|}$

C. $f(x)=x^3+x$　　D. $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}\right)$

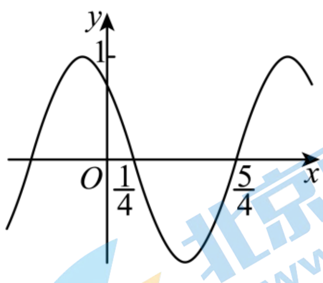
5. 记 $\cos(-80^0)=k$，那么 $\tan 100^0=$

A. $\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k}$　　B. $-\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k}$　　C. $\dfrac{k}{\sqrt{1-k^2}}$　　D. $-\dfrac{k}{\sqrt{1-k^2}}$

6. 已知两点 $A(-2,0)$，$B(0,2)$，点 C 是圆 $x^2+y^2-4x+4y+6=0$ 上任意一点，则 $\triangle ABC$ 面积的最小值是（　）

A. 8　　B. 6　　C. $3+\sqrt{2}$　　D. 4

7. 函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图像如图所示，则 $f(x)$ 的单调递减区间为



A. $(k\pi-\dfrac{1}{4},k\pi+\dfrac{3}{4}),k\in Z$　　B. $(2k\pi-\dfrac{1}{4},2k\pi+\dfrac{3}{4}),k\in Z$

C. $(k-\dfrac{1}{4},k+\dfrac{3}{4}),k\in Z$　　D. $(2k-\dfrac{1}{4},2k+\dfrac{3}{4}),k\in Z$

8. 若 $x>0,y>0$，则“$x+2y=2\sqrt{2xy}$”的一个充分不必要条件是

A. $x=y$　　B. $x=2y$

C. $x=2$ 且 $y=1$　　D. $x=y$ 或 $y=1$

9. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^x+1}$，$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，则下列结论正确的是（　）

A. $f(-x)-f(x)=0$

B. $f'(x)<0$

C. 若 $0<x_1<x_2$，则 $x_1f\left(x_2\right)>x_2f\left(x_1\right)$

D. 若 $0<x_1<x_2$，则 $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)>f\left(x_1+x_2\right)$

10. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若对任意的正整数 n，总存在正整数 m，使得 $S_n=a_m$，下列正确命题的个数是（　）

①$\{a_n\}$ 可能为等差数列；

②$\{a_n\}$ 可能为等比数列；

③$a_i(i\geq 2)$ 均能写成 $\{a_n\}$ 的两项之差；

④对任意 $n\in\mathbf{N}$，$n\geq 1$．总存在 $m\in\mathrm{N}$，$m\geq 1$．使得 $a_n=S_m$．

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

二、填空题（共 5 小题：共 25 分）

11. 函数 $f(x)=\log_2(1-x)+\sqrt{x}$ 的定义域是____________.

12. 已知 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$|\overrightarrow{OA}|=5$，$|\overrightarrow{OB}|=12$，$\angle AOB=90^\circ$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|=$__________.

13. 能够说明“$e^x>x+1$ 恒成立”是假命题的一个 x 的值为______.

14. 《九章算术》是中国古代张苍、耿寿昌所撰写的一部数学专著，被誉为人类科学史上应用数学的最早巅峰.全书分为九章，卷第六“均输”有一问题：“今有竹九节下三节容量四升，上四节容量三升问中间二节欲均容各多少?”其意思为：“今有竹 9 节，下 3 节容量 4 升，上 4 节容量 3 升使中间两节也均匀变化，每节容量是多少?”这一问题中从下部算起第 5 节容量是 ________________升.(结果保留分数)

15. 设 $a>0$，函数 $f(x)=\begin{cases}x+2,x<-a,\\ \sqrt{a^2-x^2},-a\leq x\leq a,\\ -\sqrt{x}-1,x>a.\end{cases}$，给出下列四个结论：

① $f(x)$ 在区间 $(a-1,+\infty)$ 上单调递减；

②当 $a\geq 1$ 时，$f(x)$ 存在最大值；

③设 $M\left(x_1,f\left(x_1\right)\right)\left(x_1\leq a\right),N\left(x_2,f\left(x_2\right)\right)\left(x_2>a\right)$，则 $|MN|>1$；

④设 $P\left(x_3,f\left(x_3\right)\right)\left(x_3<-a\right),Q\left(x_4,f\left(x_4\right)\right)\left(x_4\geq -a\right)$．若 $|PQ|$ 存在最小值，则 a 的取值范围是

$\left(0,\frac{1}{2}\right]$.

其中所有正确结论的序号是____________.

三、解答题（共 6 小题：共 85 分）

16. 在 $\triangle ABC$ 中，$2a\sin B=\sqrt{2}b$.

（1）求 A；

（2）若 $b=2\sqrt{2}$，从下列三个条件中选出一个条件作为已知，使得 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定，求 $\triangle ABC$ 的面积.

条件①：$\cos C=-\frac{\sqrt{10}}{10}$；

条件②：$a=2$；

条件③：$\sin B=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

17. 已知以点 $A(-1,2)$ 为圆心的圆与直线 m：$x+2y+7=0$ 相切，过点 $B(-2,0)$ 的动直线 l 与圆 A 相交于 M、N 两点.

（1）求圆 A 的方程；

（2）当 $MN=2\sqrt{19}$ 时，求直线 l 的方程.

18. 某校设计了一个实验学科的实验考查方案：考生从 6 道备选题中一次性随机抽取 3 题，按照题目要求独立完成全部实验操作，规定：至少正确完成其中 2 题便可通过.已知 6 道备选题中考生甲有 4 题能正确完成，2 题不能完成；考生乙每题正确完成的概率都是 $\frac{2}{3}$，且每题正确完成与否互不影响，求：

（1）分别写出甲、乙两考生正确完成题数的概率分布列，并计算数学期望；

（2）试用统计知识分析比较两考生的实验操作能力.

19. 小王大学毕业后，决定利用所学专业进行自主创业．经过市场调查，生产某小型电子产品需投入年固定成本为 3 万元，每生产 x 万件，需另投入流动成本为 $W(x)$ 万元．在年产量不足 8 万件时，$W(x)=\frac{1}{3}x^2+x$ 万元；在年产量不小于 8 万件时，$W(x)=6x+\frac{100}{x}-38$ 万元，每件产品售价为 5 元．通过市场分析，小王生产的商品当年能全部售完．

（1）写出年利润 $L(x)$ 万元关于年产量 x 万件的函数解析式；(注：年利润=年销售收入-固定成本-流动成本)

（2）年产量为多少万件时，小王在这一商品的生产中所获利润最大？最大利润是多少？

20. 已知函数 $f(x)=x-a\ln x$，$g(x)=-\frac{1+a}{x}(a>0)$.

（1）若 $a=1$，求函数 $f\left(x\right)$ 的极值；

（2）设函数 $h\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)$，求函数 $h\left(x\right)$ 的单调区间；

（3）若存在 $x_0\in\left[1, e\right]$，使得 $f\left(x_0\right)<g\left(x_0\right)$ 成立，求 a 的取值范围.

21. 已知 $\left\{a_n\right\}$ 为无穷递增数列，且对于给定的正整数 k，总存在 i，j，使得 $a_i\le k,a_j\ge k$，其中 $i\le j$. 令 b_k 为满足 $a_i\leqslant k$ 的所有 i 中的最大值，c_k 为满足 $a_j\ge k$ 的所有 j 中的最小值.

（1）若无穷递增数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前四项是 1，2，3，5，求 b_4 和 c_4 的值；

（2）若 $\left\{a_n\right\}$ 是无穷等比数列，$a_1=1$，公比 q 是大于 1 的整数，$b_3<b_4=b_5,c_3=c_4$，求 q 的值；

（3）若 $\left\{a_n\right\}$ 是无穷等差数列，$a_1=1$，公差为 $\dfrac{1}{m}$，其中 m 为常数，且 $m>1,m\in\mathbf{N}^*$，求证：

$b_1,b_2,\cdots,b_k,\cdots$ 和 $c_1,c_2,\cdots,c_k,\cdots$ 都是等差数列，并写出这两个数列的通项公式.

参考答案

一、单选题（共 10 小题；共 40 分）

1.【答案】D

【分析】利用并集的定义可求得集合 $A\cup B$.

【详解】因为集合 $A=\{x|-2\le x\le 3\}$，$B=\{x|x>0\}$，因此，$A\cup B=[-2,+\infty)$.

故选：D.

2.【答案】B

【分析】先利用复数的除法得到复数 z，再求共轭复数.

【详解】解：因为复数 $z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$，

所以 $z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=1-\mathrm{i}$，

所以 $\overline{z}=1+\mathrm{i}$，

故选：B

3.【答案】D

【分析】由两向量共线直接列方程求解即可

【详解】因为 $\vec{a}=(m,1),\vec{b}=(-1,2)$，且 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$，

所以 $\dfrac{m}{-1}=\dfrac{1}{2}$，解得 $m=-\dfrac{1}{2}$，

故选：D

4.【答案】D

【分析】根据函数的奇偶性，基本初等函数的单调性，逐项判断即可.

【详解】对于 A，函数 $f(x)=\sin x$ 为奇函数，但在定义域 R 上函数不单调，故 A 不符合；

对于 B，$f(x)=2^{|x|}$ 的定义域为 R，$f(-x)=2^{|-x|}=2^{|x|}=f(x)$，则 $f(x)=2^{|x|}$ 为偶函数，故 B 不符合；

对于 C，$f(x)=x^3+x$ 的定义域为 R，$f(-x)=-x^3-x=-f(x)$，则 $f(x)=x^3+x$ 为奇函数，又函数 $y=x^3,y=x$ 在 R 上均为增函数，故 $f(x)=x^3+x$ 在 R 上为增函数，故 C 不符合；

对于 D，$f(x)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x})$ 的定义域为 R，$f(-x)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x})=-f(x)$，则 $f(x)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x})$ 为奇函数，又函数 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 在 R 上为减函数，$y=\mathrm{e}^{x}$ 在 R 上为增函数，故 $f(x)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x})$ 在 R 上为减函数，故 D 符合.

故选：D.

5.【答案】B

【详解】$\because \cos\left(-80^{0}\right)=k$,

$\therefore \cos 80^{\circ}=k$,从而 $\sin 80^{\circ}=\sqrt{1-\cos^{2}80^{\circ}}=\sqrt{1-k^{2}}$,

$\therefore \tan 80^{\circ}=\dfrac{\sin 80^{\circ}}{\cos 80^{\circ}}=\dfrac{\sqrt{1-k^{2}}}{k}$,

那么 $\tan 100^{\circ}=\tan(180^{\circ}-80^{\circ})=-\tan 80^{\circ}=-\dfrac{\sqrt{1-k^{2}}}{k}$,

故选 B.

6.【答案】D

【分析】求出圆心坐标和半径，可得圆心到直线的距离，求得圆上的点到直线 AB 距离的最小值，从而得三角形面积最小值.

【详解】解：圆 $x^2+y^2-4x+4y+6=0$ 即 $(x-2)^2+(y+2)^2=2$，

$\therefore$ 圆心 $(2,-2)$，半径是 $r=\sqrt{2}$.

直线 AB 的方程为 $x-y+2=0$，

圆心到直线 AB 的距离为 $\dfrac{|2+2+2|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$，

直线 AB 和圆相离，

点 C 到直线 AB 距离的最小值是 $3\sqrt{2}-r=3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，

$\triangle ABC$ 的面积的最小值为 $2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}=4$

故选：D.

7.【答案】D

【详解】由五点作图知，$\begin{cases}\dfrac{1}{4}\omega+\varphi=\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{5}{4}\omega+\varphi=\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$，解得 $\omega=\pi$，$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$，所以 $f(x)=\cos(\pi x+\dfrac{\pi}{4})$，令 $2k\pi<\pi x+\dfrac{\pi}{4}<2k\pi+\pi,k\in Z$，解得 $2k-\dfrac{1}{4}<x<2k+\dfrac{3}{4}$，$k\in Z$，故单调减区间为（$2k-\dfrac{1}{4}$，$2k+\dfrac{3}{4}$），$k\in Z$，故选 D.

考点：三角函数图像与性质

8.【答案】C

【详解】$\because x>0,y>0$，

$\therefore x+2y\ge 2\sqrt{2xy}$，当且仅当 $x=2y$ 时取等号.

故“ $x=2$, 且 $y=1$ ”是“ $x+2y=2\sqrt{2xy}$ ”的充分不必要条件. 选 C.

9. 【答案】D

【分析】根据函数的奇偶性概念判断 A，根据导函数值域判断 B，利用特例法排除选项 C，利用指数运算及指数函数的单调性结合不等式的性质即可判断 D.

【详解】对于 A，易知 $x\in\mathrm{R}$， $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^x+1}=\dfrac{2^x-1}{2(2^x+1)}$，

所以 $f(-x)=\dfrac{2^{-x}-1}{2(2^{-x}+1)}=\dfrac{1-2^x}{2(1+2^x)}$，所以 $f(-x)=-f(x)$，错误；

对于 B，因为 $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^x+1}$，所以 $f'(x)=\dfrac{2^x\ln 2}{(2^x+1)^2}$，

由 $\ln 2>0$ 知 $f'(x)>0$，错误；

对于 C， $f(1)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2+1}=\dfrac{1}{6}$， $f(2)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^2+1}=\dfrac{3}{10}$，

虽然 $0<1<2$，但是 $1\times f(2)<2\times f(1)$，

故对 $0<x_1<x_2$， $x_1 f(x_2)>x_2 f(x_1)$ 不恒成立，错误；

对于 D，函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^x+1}=\dfrac{2^x-1}{2\cdot 2^x+2}$，

则 $f(x_1)+f(x_2)=\dfrac{2^{x_1}-1}{2(2^{x_1}+1)}+\dfrac{2^{x_2}-1}{2(2^{x_2}+1)}$， $f(x_1+x_2)=\dfrac{2^{x_1+x_2}-1}{2(2^{x_1+x_2}+1)}$，

因为 $x_2>x_1>0$，所以 $2^{x_2}>2^{x_1}>1$，所以 $2^{x_1}(2^{x_2}-1)>2^{x_2}-1>0$，

所以 $2^{x_1+x_2}+1>2^{x_1}+2^{x_2}$，所以 $2\cdot 2^{x_1+x_2}+2>2^{x_1+x_2}+2^{x_1}+2^{x_2}+1$，

即 $2(2^{x_1+x_2}+1)>(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)$，所以 $\dfrac{2}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}>\dfrac{1}{2^{x_1+x_2}+1}$，

所以 $\dfrac{2(2^{x_1+x_2}-1)}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}>\dfrac{2^{x_1+x_2}-1}{2^{x_1+x_2}+1}$，

又 $\left(2^{x_1}-1\right)\left(2^{x_2}+1\right)+\left(2^{x_2}-1\right)\left(2^{x_1}+1\right)=2\left(2^{x_1+x_2}-1\right)$，

所以 $\dfrac{(2^{x_1}-1)(2^{x_2}+1)+(2^{x_2}-1)(2^{x_1}+1)}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}>\dfrac{2^{x_1+x_2}-1}{2^{x_1+x_2}+1}$，

所以 $\dfrac{(2^{x_1}-1)(2^{x_2}+1)+(2^{x_2}-1)(2^{x_1}+1)}{2(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}>\dfrac{2^{x_1+x_2}-1}{2(2^{x_1+x_2}+1)}$，

即 $\dfrac{2^{x_1}-1}{2(2^{x_1}+1)}+\dfrac{2^{x_2}-1}{2(2^{x_2}+1)}>\dfrac{2^{x_1+x_2}-1}{2(2^{x_1+x_2}+1)}$，

所以 $f(x_1)+f(x_2)>f(x_1+x_2)$，正确.

故选：D

10. 【答案】C

【分析】对于①, 取$a_n=n$, 可知①正确; 对于②, 当$\{a_n\}$的公比$q=1,n\ge 2$时, $S_n=a_n$不存在正整数m, 当$q\ne 1$时, $S_n=a_n$即$1+q+\cdots+q^{n-1}=q^{m-1}$无有理数根, 可知②错误; 对于③, 根据$a_n=S_n-S_{n-1}(n\ge 2)$, 可知③正确; 对于④取数列$a_n=n$, 显然不存在$m$,使得$S_m=a_2=2$,故④不正确.

【详解】对于①，取等差数列$a_n=n$, 易验证其满足要求, ①正确.

对于②, 若$\{a_n\}$为等比数列, 设公比为q, 显然$q=1$不满足要求,

考虑$q\ne 1$的情况, 依题意, 应有$S_{n+1}=a_{m_1},S_{2n+2}=a_{m_2}$,

即$1+q+q^2+\cdots+q^n=q^{m_1}$

$1+q+q^2+\cdots+q^{2n+1}=\left(1+q+q^2+\cdots+q^n\right)\left(1+q^{n+1}\right)=q^{m_2}$,

两式相除, 得$1+q^{n+1}=q^{m_2-m_1}$.

若$|q|>1$, 则取n为奇数, 那么$q^{n+1}>0$, 所以$q^{m_2-m_1}\geqslant |q|^{n+2}$,

所以$1=q^{m_2-m_1}-q^{n+1}\geqslant |q|^{n+2}-q^{n+1}=|q|^{n+1}(|q|-1)$.

当n足够大时, 显然不成立;

若$|q|<1$, 则$\left|q^{m_2-m_1}\right|\in(0,|q|]\cup\left[\frac{1}{|q|},+\infty\right)$,

因为$|q|<1<\frac{1}{|q|}$, 所以当足够大时,

可以使$1+q^{n+1}\in\left(|q|,\frac{1}{|q|}\right)$, 故也不成立. 从而知②错误;

对于选项③, 取$n=2$, 则 $a_1+a_2=a_m$, 所以$a_1=a_m-a_2$,

当$n\geqslant 2$时, $a_n=S_n-S_{n-1}=a_{m_1}-a_{m_2}$, 故③正确.

对于选项④, 取数列$a_n=n$, 显然不存在m, 使得$S_m=a_2=2$, 故④错误.

故选：C

二、填空题（共 5 小题：共 25 分）

11.【答案】$[0,1)$

【分析】根据对数型函数的定义域，结合二次根式的性质进行求解即可.

【详解】由题意可知：$\begin{cases}1-x>0\\x\geq 0\end{cases}\Rightarrow 0\leq x<1$，

所以该函数的定义域为$[0,1)$，

故答案为：$[0,1)$

12.【答案】13

【分析】根据向量减法几何意义，向量模的定义，结合勾股定理计算.

【详解】由题意 $\triangle AOB$ 是直角三角形，$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{5^2+12^2}=13$，

故答案为：13.

13.【答案】0

【分析】不等式$e^x>x+1$恒成立等价于$e^x-x-1>0$恒成立，因此可构造函数$f(x)=e^x-x-1$，求其最值，从而找到命题不成立的具体值.

【详解】设函数$f(x)=e^x-x-1$，则有

$f'(x)=e^x-1$，

当$x\in(-\infty,0)$时，有$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当$x\in(0,+\infty)$时，有$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

故$x=0$为最小值点，有$f(x)\geq f(0)=0$.

因此，当$x=0$时，命题不能成立．故能够说明“$e^x>x+1$恒成立”是假命题的一个 x 的值为 0

【点睛】说明一个命题为假命题，只需举出一个反例即可，怎样找到符合条件的反例是关键．在处理时常要假设命题为真，进行推理，找出命题必备条件.

14.【答案】$\dfrac{67}{66}$

【分析】记从下部算起第n节的容量为a_n，可知数列$\{a_n\}$为等差数列，利用等差数列通项公式可构造关于a_1,d的方程组，解方程组求得a_1,d后，利用通项公式可求得a_5.

【详解】记从下部算起第n节的容量为a_n，

由题意可知：数列$\{a_n\}$为等差数列，设其公差为d，

则$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=3a_1+3d=4\\a_6+a_7+a_8+a_9=4a_1+26d=3\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a_1=\dfrac{95}{66}\\d=-\dfrac{7}{66}\end{cases}$，

$\therefore a_5 = a_1 + 4d = \dfrac{67}{66}$，即从下部算起第5节容量是$\dfrac{67}{66}$升.

故答案为：$\dfrac{67}{66}$.

15.【答案】②③

【分析】先分析 $f(x)$ 的图像，再逐一分析各结论；对于①，取 $a=\dfrac{1}{2}$，结合图像即可判断；对于②，分段讨论 $f(x)$ 的取值范围，从而得以判断；对于③，结合图像可知$|MN|$的范围；对于④，取 $a=\dfrac{4}{5}$，结合图像可知此时$|PQ|$存在最小值，从而得以判断.

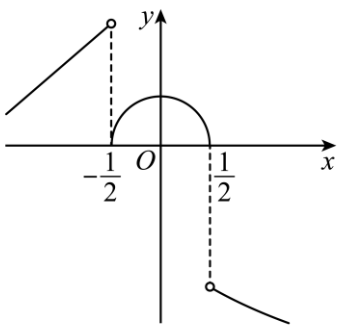
【详解】依题意，$a>0$，

当 $x<-a$ 时，$f(x)=x+2$，易知其图像为一条端点取不到值的单调递增的射线；

当 $-a\le x\le a$ 时，$f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$，易知其图像是，圆心为$(0,0)$，半径为 a 的圆在 x 轴上方的图像（即半圆）；

当 $x>a$ 时，$f(x)=-\sqrt{x}-1$，易知其图像是一条端点取不到值的单调递减的曲线；

对于①，取 $a=\dfrac{1}{2}$，则 $f(x)$ 的图像如下，



显然，当 $x\in(a-1,+\infty)$，即 $x\in\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$时，$f(x)$ 在$\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$上单调递增，故①错误；

对于②，当 $a\ge 1$ 时，

当 $x<-a$ 时，$f(x)=x+2<-a+2\le 1$；

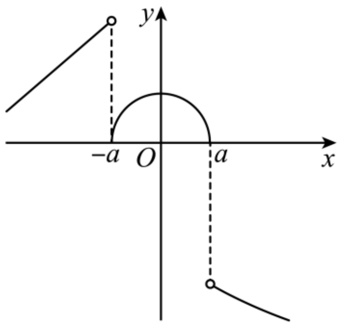
当 $-a\le x\le a$ 时，$f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ 显然取得最大值 a；

当 $x>a$ 时，$f(x)=-\sqrt{x}-1<-\sqrt{a}-1\le -2$，

综上：$f(x)$ 取得最大值 a，故②正确；

对于③，结合图像，易知在 $x_1=a$，$x_2>a$ 且接近于 $x=a$ 处，

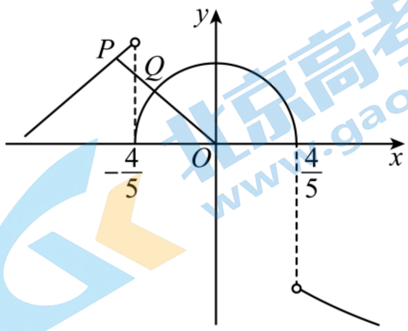
$M(x_1, f(x_1))(x_1\le a), N(x_2, f(x_2))(x_2>a)$ 的距离最小，



当 $x_1=a$ 时，$y=f(x_1)=0$，当 $x_2>a$ 且接近于 $x=a$ 处，$y_2=f(x_2)<-\sqrt{a}-1$，

此时，$|MN|>y_1-y_2>\sqrt{a}+1>1$，故③正确；

对于④，取 $a=\dfrac{4}{5}$，则 $f(x)$ 的图像如下，



因为 $P(x_3,f(x_3))(x_3<-a),Q(x_4,f(x_4))(x_4\ge -a)$，

结合图像可知，要使 $|PQ|$ 取得最小值，则点 P 在 $f(x)=x+2\left(x<-\dfrac{4}{5}\right)$ 上，点 Q 在

$f(x)=\sqrt{\dfrac{16}{25}-x^2}\left(-\dfrac{4}{5}\le x\le \dfrac{4}{5}\right)$，

同时 $|PQ|$ 的最小值为点 O 到 $f(x)=x+2\left(x<-\dfrac{4}{5}\right)$ 的距离减去半圆的半径 a，

此时，因为 $f(x)=y=x+2\left(x<-\dfrac{4}{5}\right)$ 的斜率为1，则 $k_{OP}=-1$，故直线 OP 的方程为 $y=-x$，

联立 $\begin{cases}y=-x\\y=x+2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$，则 $P(-1,1)$，

显然 $P(-1,1)$ 在 $f(x)=x+2\left(x<-\dfrac{4}{5}\right)$ 上，满足 $|PQ|$ 取得最小值，

即 $a=\dfrac{4}{5}$ 也满足 $|PQ|$ 存在最小值，故 a 的取值范围不仅仅是 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$，故④错误.

故答案为：②③.

【点睛】关键点睛：本题解决的关键是分析得 $f(x)$ 的图像，特别是当 $-a\le x\le a$ 时，$f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$

的图像为半圆，解决命题④时，可取特殊值进行排除即可.

三、解答题（共 6 小题：共 85 分）

16.【答案】(1) $A=\frac{\pi}{4}$ 或 $A=\frac{3\pi}{4}$；

（2）答案见解析.

【分析】(1) 由正弦定理边化角可得 $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即可求出结果；

（2）若选①：根据已知可得 C 为钝角，则 A 为锐角，$\sin C=\frac{3\sqrt{10}}{10}>\sin A$，三角形唯一，根据两角和的正弦公式可求出 $\sin B=\frac{\sqrt{5}}{5}$，根据正弦定理求出 a 的值，根据 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$ 即可求出面积；若选②：根据正弦定理可求出 $\sin B=1$，B 为直角，三角形唯一确定，可求出 $C=A$，即可求出 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac=2$；若选③：由 $\sin A>\sin B$，可知 $A=\frac{\pi}{4}$ 或 $A=\frac{3\pi}{4}$，有两解.

【小问 1 详解】

由 $2a\sin B=\sqrt{2}b$ 可得，$2\sin A\sin B=\sqrt{2}\sin B$.

因为 $\sin B\neq 0$，所以 $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{4}$ 或 $A=\frac{3\pi}{4}$.

【小问 2 详解】

若选①：$\cos C=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

因为 $0<C<\pi$，所以 C 为钝角，A 为锐角，

又 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{3\sqrt{10}}{10}>\sin A=\sin(\pi-A)$，

又 $\frac{\pi}{2}<\pi-A<\pi$，所以 $C<\pi-A$，即 $A+C<\pi$，所以 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定.

则 $A=\frac{\pi}{4}$，由 $A+B+C=\pi$ 可得 $B=\pi-(A+C)$.

$$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

根据正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 可得，$a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=2\sqrt{5}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times 2\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=6$；

若选②：$a=2$.

因为$b=2\sqrt{2}>a$，所以$A=\frac{\pi}{4}$，由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$可得，$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=1$，

因为$0<B<\pi$，所以$B=\frac{\pi}{2}$，所以$\triangle ABC$存在且唯一确定.

则$C=\pi-A-B=\frac{\pi}{4}=A$，所以$c=a=2$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac=2$；

若选③：$\sin B=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

因为$\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}>\sin B$，所以$A>B$，此时$A=\frac{\pi}{4}$或$A=\frac{3\pi}{4}$，

所以，此时$\triangle ABC$存在但不唯一.

17.【答案】（1）$(x+1)^2+(y-2)^2=20$

（2）$x=-2$或$3x-4y+6=0$

【分析】（1）根据题意结合点到直线的距离公式求圆的半径，即可得圆的方程；

（2）先求圆心到直线l的距离，在结合点到直线的距离公式求直线l的斜率，注意讨论直线l的斜率是否存在.

【小问1详解】

点$A(-1,2)$到直线m：$x+2y+7=0$的距离为$d=\frac{|-1+4+7|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2\sqrt{5}$，

即圆A的圆心$A(-1,2)$，半径$r=2\sqrt{5}$，故圆A的方程为$(x+1)^2+(y-2)^2=20$.

【小问2详解】

设圆心$A(-1,2)$到直线l的距离为d，则$MN=2\sqrt{r^2-d^2}$，解得$d=1$，

当直线l的斜率不存在时，则$l:x=-2$，此时圆心$A(-1,2)$到直线l的距离为$d=1$，符合题意，成立；

当直线l的斜率存在时，设为k，则$l:y=k(x+2)$，即$kx-y+2k=0$，

$\because d=\frac{|-k-2+2k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得$k=\frac{3}{4}$，

$\therefore$直线l：$3x-4y+6=0$；

综上所述：直线l的方程为$x=-2$或$3x-4y+6=0$.

18.【答案】（1）甲分布列见解析，$E(\xi)=2$；乙分布列见解析，$E(\eta)=2$；

（2）答案不唯一，见解析.

【分析】（1）由题意可知，甲、乙两位考生正确完成实验操作的题数分别服从超几何和二项分布，分别列出分布列，计算均值即可；

（2）结合分布列中的数据，分别计算对应的均值、方差及至少正确完成 2 题的概率比较即可.

【小问 1 详解】

设考生甲正确完成实验操作的题数为ξ，则ξ的取值范围是$\{1,2,3\}$，

$P(\xi=1)=\dfrac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\dfrac{1}{5}$，$P(\xi=2)=\dfrac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\dfrac{3}{5}$，$P(\xi=3)=\dfrac{C_4^3C_2^0}{C_6^3}=\dfrac{1}{5}$，

所以ξ的分布列为

ξ	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

则$E(\xi)=1\times\dfrac{1}{5}+2\times\dfrac{3}{5}+3\times\dfrac{1}{5}=2$.

设考生乙正确完成实验操作的题数为η，易知$\eta\sim B\left(3,\dfrac{2}{3}\right)$，

所以$P(\eta=0)=C_3^0\left(1-\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{1}{27}$，$P(\eta=1)=C_3^1\left(\dfrac{2}{3}\right)^1\left(1-\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{2}{9}$，

$P(\eta=2)=C_3^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(1-\dfrac{2}{3}\right)^1=\dfrac{4}{9}$，$P(\eta=3)=C_3^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$.

所以η的分布列为

η	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

所以$E(\eta)=3\times\dfrac{2}{3}=2$.

【小问 2 详解】

由（1），知$E(\xi)=E(\eta)=2$，$D(\xi)=(1-2)^2\times\dfrac{1}{5}+(2-2)^2\times\dfrac{3}{5}+(3-2)^2\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{2}{5}$，

$D(\eta)=3\times\dfrac{2}{3}\times\left(1-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{3}$，$P(\xi\geq2)=\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$，$P(\eta\geq2)=\dfrac{4}{9}+\dfrac{8}{27}=\dfrac{20}{27}$.

所以$D(\xi)<D(\eta)$，$P(\xi\geq2)>P(\eta\geq2)$，

故从正确完成实验操作的题数的均值方面分析，两人水平相当；

从正确完成实验操作的题数的方差方面分析，甲的水平更稳定；

从至少正确完成 2 题的概率方面分析，甲通过的可能性更大. 因此甲的实验操作能力较强.

19.【答案】（1）$L(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}x^2+4x-3,0<x<8\\35-\left(x+\frac{100}{x}\right),x\geq 8\end{cases}$

（2）年产量为 10 万件时，小王在这一商品的生产中所获利润最大，最大利润是 15 万元

【分析】（1）根据已知，分 $0<x<8$ 以及 $x\geq 8$，分别求解，即可得出函数解析式；

（2）分为 $0<x<8$ 以及 $x\geq 8$ 两种情况，根据二次函数的性质以及基本不等式，即可得出答案.

【小问 1 详解】

因为每件产品售价为 5 元，则 x（万件）商品销售收入为 $5x$ 万元，依题意得：

当 $0<x<8$ 时，$L(x)=5x-\left(\frac{1}{3}x^2+x\right)-3=-\frac{1}{3}x^2+4x-3$，

当 $x\geq 8$ 时，$L(x)=5x-\left(6x+\frac{100}{x}-38\right)-3=35-\left(x+\frac{100}{x}\right)$，

$\therefore L(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}x^2+4x-3,0<x<8\\35-\left(x+\frac{100}{x}\right),x\geq 8\end{cases}$.

【小问 2 详解】

当 $0<x<8$ 时，$L(x)=-\frac{1}{3}(x-6)^2+9\leq 9$，

当 $x=6$ 时，$L(x)$ 取得最大值 9；

当 $x\geq 8$ 时，$L(x)=35-\left(x+\frac{100}{x}\right)\leq 35-2\sqrt{x\cdot\frac{100}{x}}=15$，

此时，当 $x=\frac{100}{x}$ 即 $x=10$ 时，$L(x)$ 取得最大值 $15>9$.

综上所述，年产量为 10 万件时，小王在这一商品的生产中所获利润最大，最大利润是 15 万元.

20.【答案】（1）极小值为 1，无极大值

（2）单调递增区间为 $(1+a,+\infty)$，单调递减区间为 $(0,1+a)$.

（3）$\left(\frac{e^2+1}{e-1},+\infty\right)$

【分析】（1）研究 $f(x)=x-\ln x$ 的单调区间，进而求出 $f(x)$ 的极值；（2）先求 $h'(x)$，再解不等式 $h'(x)>0$ 与 $h'(x)<0$，求出单调区间，注意题干中的 $a>0$ 的条件；（3）先把题干中的问题转化为在 $x\in[1,\ e]$ 上有 $h(x)_{\min}<0$，再结合第二问研究的 $h(x)$ 的单调区间，对 a 进行分类讨论，求出不同范围下的 $h(x)_{\min}$，求出最后结果

【小问 1 详解】

当 $a=1$ 时，$f(x)=x-\ln x$，定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$

令 $f'(x)=0$ 得：$x=1$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，故 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点，$f(x)$ 的极小值为 $f(1)=1$，无极大值

【小问 2 详解】

$h(x)=f(x)-g(x)=x-a\ln x+\frac{1+a}{x}(a>0)$，定义域为 $(0,+\infty)$

$h'(x)=1-\frac{a}{x}-\frac{1+a}{x^2}=\frac{x^2-ax-1-a}{x^2}=\frac{(x+1)(x-1-a)}{x^2}$

因为 $a>0$，所以 $1+a>0$，令 $h'(x)>0$ 得：$x>1+a$，令 $h'(x)<0$ 得：$0<x<1+a$，所以 $h(x)$ 在 $(1+a,+\infty)$ 单调递增，在 $(0,1+a)$ 单调递减.

综上：$h(x)$ 单调递增区间为 $(1+a,+\infty)$，单调递减区间为 $(0,1+a)$.

【小问 3 详解】

存在 $x_0\in[1, e]$，使得 $f(x_0)<g(x_0)$ 成立，等价于存在 $x_0\in[1, e]$，使得 $h(x_0)<0$，即在 $x\in[1, e]$ 上有 $h(x)_{\min}<0$

由（2）知，$h(x)$ 单调递增区间为 $(1+a,+\infty)$，单调递减区间为 $(0,1+a)$，所以

当 $1+a\ge e$，即 $a\ge e-1$ 时，$h(x)$ 在 $x\in[1, e]$ 上单调递减，故 $h(x)$ 在 $x=e$ 处取得最小值，由

$h(x)_{\min}=h(e)=e-a+\frac{1+a}{e}<0$ 得：$a>\frac{e^2+1}{e-1}$，因为 $\frac{e^2+1}{e-1}>e-1$，故 $a>\frac{e^2+1}{e-1}$.

当 $1<1+a<e$，即 $0<a<e-1$ 时，由（2）知：$h(x)$ 在 $x\in(1,1+a)$ 上单调递减，在 $x\in(1+a,e)$ 上单调递增，$h(x)$ 在 $x\in[1, e]$ 上的最小值为

令 $h(1+a)=2+a-a\ln(1+a)$

因为 $0<\ln(1+a)<1$，所以 $0<a\ln(1+a)<a$，则 $2+a-a\ln(1+a)>2$，即 $h(1+a)>2$，不满足题意，舍去

综上所述：a 的取值范围为 $\left(\frac{e^2+1}{e-1},+\infty\right)$

【点睛】导函数中常用的两种常用的转化方法：一是利用导数研究含参函数的单调性，常化为不等式恒成立问题．注意分类讨论与数形结合思想的应用；二是函数的零点、不等式证明常转化为函数的单调性、极(最)值问题处理．

21. 【答案】（1）$b_4=3$，$c_4=4$，

（2）$q=2$ 或 $q=4$

（3）证明见解析，$b_n=nm-m+1$，$c_n=nm-m+1$

【分析】（1）根据题意求解即可；

（2）由等比数列的通项公式写出 $\{a_n\}$ 的通项，由题意列式后解指数型方程可得结果；

（3）由等差数列的通项公式写出 $\{a_n\}$ 的通项，用定义法证明等差数列即可.

【小问 1 详解】

$\because a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$，$a_4=5$，

又 $\because a_i\le 4$，$a_j\ge 4$，

$\therefore i\le 3$ 且 $i\in N^*$，$j\ge 4$ 且 $j\in N^*$，

$\therefore b_4=3$，$c_4=4$

【小问 2 详解】

由题意知，$a_1=1$，$\therefore a_n=a_1q^{n-1}=q^{n-1}$，$q>1$ 且 $q\in Z$，

$\because a_i\le 3$，

$\therefore q^{i-1}\le 3$，

$\therefore i\le 1+\log_q 3$

$\therefore b_3=[1+\log_q 3]$，$q>1$ 且 $q\in Z$，

同理：$b_4=[1+\log_q 4]$，$q>1$ 且 $q\in Z$，$b_5=[1+\log_q 5]$，$q>1$ 且 $q\in Z$，

又 $\because b_3<b_4=b_5$，

$\therefore [1+\log_q 3]<[1+\log_q 4]=[1+\log_q 5]$，

即：$[\log_q 3]<[\log_q 4]=[\log_q 5]$，$q>1$ 且 $q\in Z$，

$\because a_j\ge 3$，

$\therefore q^{j-1}\ge 3$，

$\therefore j\ge 1+\log_q 3$，

$\therefore$ 当 $\log_q 3\in N^*$ 时，$c_3=1+\log_q 3$，当 $\log_q 3\notin N^*$ 时，$c_3=[2+\log_q 3]$，

同理：当 $\log_q 4\in N^*$ 时，$c_4=1+\log_q 4$，当 $\log_q 4\notin N^*$ 时，$c_4=[2+\log_q 4]$，

又 $\because c_3=c_4$，$[\log_q 3]<[\log_q 4]=[\log_q 5]$，$q>1$ 且 $q\in Z$，

$\therefore \log_q 3\notin N^*$，$\log_q 4\in N^*$，$[2+\log_q 3]=1+\log_q 4$，

解得：$q=2$ 或 $q=4$

【小问 3 详解】

证明：由题意知，$a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)\times\frac{1}{m}=\frac{m+n-1}{m}$，$m$ 为常数，且 $m>1$ 且 $m\in\mathrm{N}^*$，

$\therefore\{a_n\}$ 为单调递增数列，

又 $\because a_i\le 1$，$a_j\ge 1$，$a_1=1$

$\therefore i=1$，$j=1$，

$\therefore b_1=1$，$c_1=1$，

$\because a_i\leqslant k$，$a_j\ge k$，

$\therefore \frac{m+i-1}{m}\le k$，$\frac{m+j-1}{m}\ge k$，

$\therefore i\le mk-m+1$，$j\ge mk-m+1$，$m>1$ 且 $m\in\mathrm{N}^*$ 且 $k\in\mathrm{N}^*$，

$\therefore mk-m+1\in\mathrm{N}^*$，

$\therefore b_k=mk-m+1$，$c_k=mk-m+1$，

$\therefore b_{k+1}=m(k+1)-m+1=mk+1$，$c_{k+1}=m(k+1)-m+1=mk+1$，

$\therefore b_{k+1}-b_k=(mk+1)-(mk-m+1)=m$，$c_{k+1}-c_k=(mk+1)-(mk-m+1)=m$，

又 $\because m$ 为常数，$m>1$ 且 $m\in\mathrm{N}^*$，

$\therefore\{b_k\}$ 为等差数列，$\{c_k\}$ 为等差数列，

又 $\because b_k=mk-m+1$，$c_k=mk-m+1$，

$\therefore b_n=mn-m+1$，$c_n=mn-m+1$

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！