

# 2021 北京四中高一（下）期中

## 数 学

（试卷满分 140 分 考试时间 120 分钟）

I 卷（满分 90 分）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。）

1. 已知  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ,  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ , 则  $\tan \alpha =$

- (A)  $\frac{3}{4}$                       (B)  $-\frac{3}{4}$                       (C)  $\frac{4}{3}$                       (D)  $-\frac{4}{3}$

2.  $\alpha$  是一个任意角，则  $\alpha$  的终边与  $3\pi - \alpha$  的终边

- (A) 关于坐标原点对称                      (B) 关于  $x$  轴对称  
(C) 关于  $y$  轴对称                      (D) 关于直线  $y = x$  对称

3. 若角  $300^\circ$  的终边上有一点  $(4, a)$ , 则  $a$  的值是

- (A)  $4\sqrt{3}$                       (B)  $-4\sqrt{3}$                       (C)  $\pm 4\sqrt{3}$                       (D)  $\sqrt{3}$

4. 若  $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 则  $\cos \alpha - \sin \alpha$  的值为

- (A)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$                       (B)  $-\frac{1}{2}$                       (C)  $\frac{1}{2}$                       (D)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. 已知向量  $\mathbf{a} = (1, \sqrt{3})$ , 向量  $\mathbf{b} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ , 则向量  $\mathbf{a}$  与向量  $\mathbf{b}$  的夹角为

- (A)  $60^\circ$                       (B)  $30^\circ$                       (C)  $120^\circ$                       (D)  $150^\circ$

6. 将函数  $y = \sin 2x$  的图像向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位，所得图像的函数解析式是

- (A)  $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$                       (B)  $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$   
(C)  $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$                       (D)  $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

7. 函数  $y = 2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$  是

(A) 最小正周期为  $\pi$  的奇函数

(B) 最小正周期为  $\pi$  的偶函数

(C) 最小正周期为  $\frac{\pi}{2}$  的奇函数

(D) 最小正周期为  $\frac{\pi}{2}$  的偶函数

8. 已知  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ,  $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{5}$ , 则  $\cos \alpha$  的值为

(A)  $-\frac{\sqrt{2}}{10}$

(B)  $\frac{\sqrt{2}}{10}$

(C)  $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$

(D)  $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

9. 已知  $f(x) = 2\cos(\omega x + \varphi) + m$  ( $\omega > 0$ ), 对任意实数  $t$  都有  $f\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = f(t)$ , 且  $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = -1$ , 则实数  $m$  的值等于

(A)  $\pm 3$

(B)  $-3$

(C)  $-1$  或  $3$

(D)  $-3$  或  $1$

10. 关于函数  $f(x) = \sin|x| - |\sin x|$  有下述四个结论:

①  $f(x)$  是偶函数;

②  $f(x)$  在区间  $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$  上单调递增;

③  $f(x)$  的最大值为  $1$ ;

④  $f(x)$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上有  $3$  个零点.

其中所有正确结论的编号是

(A) ①②

(B) ②④

(C) ①④

(D) ①③

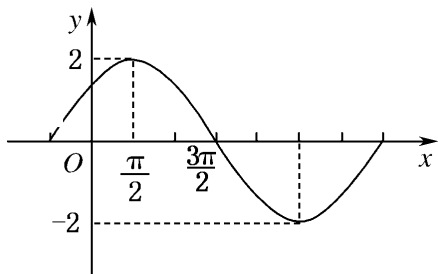
二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.)

11. 已知  $\mathbf{a} = (-3, 2)$ ,  $\mathbf{b} = (1, x)$ , 若  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ , 则实数  $x$  的值为\_\_\_\_\_.

12. 函数  $y = 2\cos x$  在区间  $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$  上的最大值为\_\_\_\_, 最小值为\_\_\_\_\_.

13. 已知  $\alpha$  是第四象限角, 且  $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 则  $\frac{\sin(\pi + \alpha) + \cos(-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} =$ \_\_\_\_\_.

14. 已知函数  $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi$ ) 在一个周期内的图像如图所示, 则函数  $f(x)$  的解析式为\_\_\_\_\_.



15. 已知正方形  $ABCD$  的边长为 1, 点  $E$  是  $AB$  边上的动点, 则  $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CB} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

16. 已知函数  $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$ , 若不等式  $f(x) \geq \frac{3}{2}$  在区间  $\left[-\frac{\pi}{3}, m\right]$  上有解, 则  $m$  的最小值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

三、解答题 (本大题共 3 小题, 共 26 分.)

17. (本小题 7 分)

已知  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , 且  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ .

(I) 求  $\cos \alpha$  的值;

(II) 求  $\frac{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha + 1}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}$  的值.

18. (本小题 9 分)

已知函数  $f(x) = \sqrt{3} \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x + \frac{1}{2}$ .

(I) 求函数  $f(x)$  的最小正周期;

(II) 求函数  $f(x)$  的单调递减区间.

19. (本小题 10 分)

已知向量  $\mathbf{a} = \left(\cos \frac{3x}{2}, \sin \frac{3x}{2}\right)$ ,  $\mathbf{b} = \left(\cos \frac{x}{2}, \sin \frac{x}{2}\right)$ , 其中  $x \in [\pi, 2\pi]$ .

(I) 求  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  及  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$  的值;

(II) 若函数  $f(x) = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ , 求  $f(x)$  的最大值.

II 卷 (满分 50 分)

一、选择题 (本大题共 3 小题, 每小题 4 分, 共 12 分, 在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项.)

1.  $\frac{3 - \sin 50^\circ}{2 - \cos^2 20^\circ} =$

- (A)  $\frac{1}{2}$                       (B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       (C)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       (D) 2

2. 函数  $y = \sin 2x$  的图像经过适当变换可以得到  $y = \cos 2x$  的图像, 则这种变换可以是

- (A) 向右平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位                      (B) 向左平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位  
 (C) 向左平移  $\frac{\pi}{2}$  个单位                      (D) 向右平移  $\frac{\pi}{2}$  个单位

3. 平面直角坐标系中,  $O$  为坐标原点. 已知点  $A(-2, 0)$ , 点  $P(\cos \theta, \sin \theta) (\theta \in \mathbf{R})$ , 则向量  $\overrightarrow{AO}$  与  $\overrightarrow{AP}$  的夹角的取值范围是

- (A)  $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$                       (B)  $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$                       (C)  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$                       (D)  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

二、填空题 (本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.)

4. 定义运算  $a * b$  为:  $a * b = \begin{cases} a, & a \leq b, \\ b, & a > b. \end{cases}$  例如,  $1 * 2 = 1$ , 则函数  $f(x) = \sin x * \cos x$  的值域为\_\_\_\_\_.

5. 已知函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) + k (A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi)$ , 某同学描点绘制函数  $f(x)$  在区间  $[0, 2]$  上的草图, 部分列表如下:

$x$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	.....
$\omega x + \varphi$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	
$f(x)$	2	3	1	-1	

则  $f\left(-\frac{1}{8}\right) =$ \_\_\_\_; 函数  $f(x)$  的单调递增区间是\_\_\_\_\_.

6. 已知函数  $f(x) = a \sin 3x + b \cos 3x$ , 其中  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $ab \neq 0$ . 若  $f(x) \leq \left|f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|$  对任意  $x \in \mathbf{R}$  恒成立, 则

①  $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$ ;

②  $\left| f\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right| > |f(\pi)|$ ;

③  $f(x)$  既不是奇函数也不是偶函数;

④  $f(x)$  的单调递增区间是  $\left[ \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi \right], k \in \mathbf{Z}$ .

以上结论正确的是\_\_\_\_\_ (写出所有正确结论的编号).

三、解答题 (本大题共 2 小题, 共 23 分.)

7. (本小题 13 分)

如图, 在直角坐标系  $xOy$  中, 角  $\alpha$  的顶点是原点, 始边与  $x$  轴正半轴重合, 终边交单位圆于点  $A$ , 且

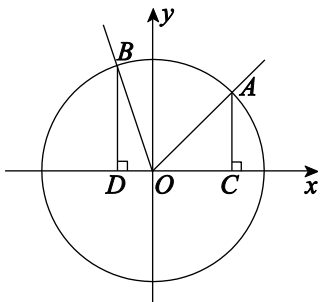
$\alpha \in \left( \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right)$ . 将角  $\alpha$  的终边按逆时针方向旋转  $\frac{\pi}{3}$ , 交单位圆于点  $B$ . 记  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ .

(I) 若  $x_1 = \frac{1}{3}$ , 求  $x_2$ ;

(II) 分别过  $A, B$  作  $x$  轴的垂线, 垂足依次为  $C, D$ .

记  $\triangle AOC$  的面积为  $S_1$ ,  $\triangle BOD$  的面积为  $S_2$ .

若  $S_1 = 2S_2$ , 求角  $\alpha$  的值.



8. (本小题 10 分)

设  $f(x)$  是定义在区间  $[s, t]$  上的函数, 在  $(s, t)$  内任取  $n-1$  个数  $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}$ , 设  $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-2} < x_{n-1}$ , 令  $s = x_0, t = x_n$ , 如果存在一个常数  $M > 0$ , 使得  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq M$  恒成立, 则称函数  $f(x)$  在区间  $[s, t]$  上具有性质  $P$ .

已知函数  $f(x) = x$ ,  $g(x) = \sin x$ .

(I) 若对任意  $x \in [0, 1]$ , 不等式  $f(x) + g(x) \leq a$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围;

(II) 试判断函数  $f(x) + g(x)$  在区间  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  上是否具有性质  $P$ , 并说明理由.

(III) 试判断函数  $f(x) \cdot g(x)$  在区间  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  上是否具有性质  $P$ , 并说明理由.

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯