工作秘密　严禁外传
擅自泄露　严肃追责

成都市2018级高中毕业班第三次诊断性检测

数　学（理科）

本试卷分选择题和非选择题两部分。第Ⅰ卷（选择题）1至2页，第Ⅱ卷（非选择题）3至4页，共4页，满分150分，考试时间120分钟。

注意事项：

1. 答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时，必须使用2B铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时，必须使用0.5毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后，只将答题卡交回。

第Ⅰ卷　（选择题，共60分）

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 设全集$U=\mathbf{R}$，集合$A=\{x\mid x>3\}$，$B=\{x\mid x<4\}$，则$(\complement_U A)\cup B=$

(A) $\{x\mid x<3\}$　　(B) $\{x\mid x\leqslant 3\}$　　(C) $\{x\mid x<4\}$　　(D) $\{x\mid x\leqslant 4\}$

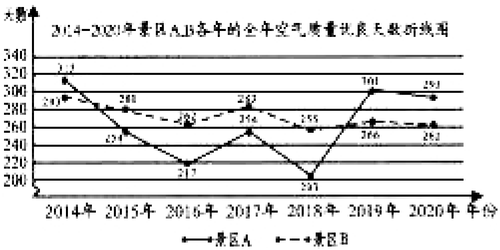
2. 已知复数$z=\dfrac{1-3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$（i为虚数单位），则$|z|=$

(A) 1　　(B) $\sqrt{2}$　　(C) 2　　(D) $\sqrt{5}$

3. 设$\triangle ABC$的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，若$a=3b$，$\sin A=\dfrac{3}{5}$，则$\sin B$的值为

(A) $\dfrac{1}{5}$　　(B) $\dfrac{1}{15}$　　(C) $\dfrac{1}{3}$　　(D) $\dfrac{5}{9}$

4. 某市环境保护局公布了该市A，B两个景区2014年至2020年各年的全年空气质量优良天数的数据．现根据这组数据绘制了如图所示的折线图，则由该折线图得出的下列结论中正确的是



(A) 景区A这七年的空气质量优良天数的极差为98

(B) 景区B这七年的空气质量优良天数的中位数为283

(C) 分别记景区A，B这七年的空气质量优良天数的众数为m_1，m_2，则$m_1>m_2$

(D) 分别记景区A，B这七年的空气质量优良天数的标准差为　　，则

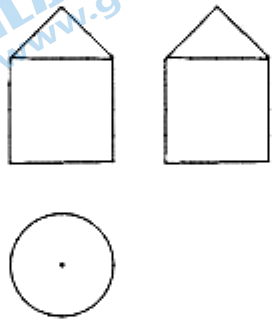
5. 若实数 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} y \geqslant 0, \\ x - y + 1 \geqslant 0, \\ x + 2y - 2 \leqslant 0, \end{cases}$ 则 $z = 3x + 5y$ 的最大值为

(A) 10　　(B) 8　　(C) 6　　(D) 5

6. 某几何体的三视图如图所示．已知网格纸上的小正方形边长为 1，则该几何体的表面积为

(A) $(20 + 8\sqrt{2})\pi$　　(B) $(20 + 4\sqrt{2})\pi$

(C) $(24 + 8\sqrt{2})\pi$　　(D) $(24 + 4\sqrt{2})\pi$



7. 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{m}{x}(m \in \mathbf{R})$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线 l 的斜率为 2，则直线 l 在 y 轴上的截距为

(A) 3　　(B) -3

(C) 1　　(D) -1

8. 设向量 $\boldsymbol{a} = (x, x-1)$，$\boldsymbol{b} = (2, -1)$．若 $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，则实数 x 的值为

(A) $\frac{2}{3}$　　(B) $-\frac{5}{3}$　　(C) 10　　(D) -11

9. 命题 p：函数 $f(x) = a^{x+1}(a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 的图象恒过定点 $(0, 1)$；命题 q：当 $t \in (-2, 2)$ 时，函数 $g(x) = x^2 - 3tx + 1$ 在区间 $(-3, 3)$ 上存在最小值．则下列命题为真命题的是

(A) $p \wedge q$　　(B) $p \vee (\neg q)$　　(C) $(\neg p) \vee q$　　(D) $(\neg p) \wedge (\neg q)$

10. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F_2，点 M，N 在双曲线的同一条渐近线上，O 为坐标原点．若直线 F_2M 平行于双曲线的另一条渐近线，且 $OF_2 \perp F_2N$，$|F_2M| = \frac{\sqrt{5}}{2}|F_2N|$，则该双曲线的渐近线方程为

(A) $y = \pm\frac{1}{4}x$　　(B) $y = \pm\frac{1}{2}x$　　(C) $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$　　(D) $y = \pm 2x$

11. 在三棱锥 $P - ABC$ 中，已知 $PA = AB = AC = 2$，$\angle PAB = \frac{\pi}{2}$，$\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$，$D$ 是线段 BC 上的点，$BD = 2DC$，$AD \perp PB$．若三棱锥 $P - ABC$ 的各顶点都在球 O 的球面上，则球 O 的半径为

(A) 1　　(B) $\sqrt{2}$　　(C) $\sqrt{3}$　　(D) $\sqrt{5}$

12. 已知等边 $\triangle ABC$ 的三个顶点均在圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上，点 $P(\sqrt{3}, \sqrt{6})$，则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$ 的最小值为

(A) 14　　(B) 10　　(C) 8　　(D) 2

第Ⅱ卷 （非选择题，共 90 分）

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填在答题卡上．

13. 计算 $8^{-\frac{1}{3}}-\frac{\lg 6}{\lg 2}-\log_2 3$ 的值为______．

14. 若 $(x+\frac{a}{x})^7$ 的展开式中 x^3 的系数为 $\frac{21}{2}$，则实数 a 的值为______．

15. 已知 F 为抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点，过点 F 且斜率为 1 的直线与抛物线相交于 A,B 两点．若 $|AF|-|BF|=\sqrt{6}$，则线段 AB 的长为______．

16. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,\varphi\in\mathbf{R})$ 在区间 $(\frac{7\pi}{12},\frac{5\pi}{6})$ 上单调，且满足 $f(\frac{7\pi}{12})=-f(\frac{3\pi}{4})$．

有下列结论：

① $f(\frac{2\pi}{3})=0$；

②若 $f(\frac{5\pi}{6}-x)=f(x)$，则函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π；

③关于 x 的方程 $f(x)=1$ 在区间 $[0,2\pi)$ 上最多有 4 个不相等的实数解；

④若函数 $f(x)$ 在区间 $[\frac{2\pi}{3},\frac{13\pi}{6})$ 上恰有 5 个零点，则 ω 的取值范围为 $(\frac{8}{3},3]$．

其中所有正确结论的编号为______．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（本小题满分 12 分）

《营造法式》是中国北宋时期官方颁布的一部建筑设计与施工的书籍，标志着我国古代建筑技术和工艺发展到了较高水平．中国近代建筑之父梁思成用现代语言和制图方法对该书进行了注释，著有《〈营造法式〉注释》．为了让建筑类学生了解古建筑设计与构造的原理，某建筑大学为大三和大四的学生开设了一门选修课程《营造法式及其注释》．为检测学生学习效果，要求所有选修该门课程的学生完成"应用营造法式独立制作一件古建筑模型"的作业．已知选修该门课程的大三与大四学生的人数之比为 3：2，现用分层抽样的方法从所有作业中随机抽取 100 份（每位学生均上交一份作业），并评出成绩，得到如下频数分布表．

成绩（单位：分）	$[50,60)$	$[60,70)$	$[70,80)$	$[80,90)$	$[90,100]$
频数（不分年级）	4	x	20	38	30
频数（大三年级）	3	6	15	y	12

（Ⅰ）求 x,y 的值；并估计这 100 份作业中大三学生作业的平均成绩（同一组中的数据用该组区间的中点值为代表）；

（Ⅱ）在这 100 份作业的样本中，从成绩在 $[50,80)$ 的大四学生作业中随机抽取 2 份，记抽取的这 2 份作业中成绩在 $[60,70)$ 的份数为 X，求 X 的分布列与数学期望．

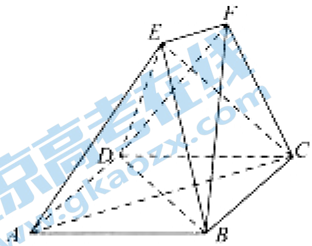
18.（本小题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1=1,a_2=3$，且满足 $a_{n+2}+3a_n=4a_{n+1}$．设 $b_n=a_{n+1}-a_n,n\in\mathbf{N}^*$．

（Ⅰ）求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）记 $c_n=\log_3 b_n$，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求 S_n．

19.（本小题满分 12 分）



如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\angle DAB=\frac{\pi}{3}$，$EB=ED$，$EF\parallel AC$．

（Ⅰ）求证：平面 $BDF\perp$ 平面 $ACFE$；

（Ⅱ）若 $EA=EC$，$EF=\frac{1}{4}AC$，多面体 $ABCDEF$ 的体积为 $\frac{5}{2}$，求平面 ABE 与平面 BDF 所成锐二面角的余弦值．

20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的四个顶点围成的四边形的面积为 $2\sqrt{5}$，右焦点 F_2 到直线 $x-y+2=0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）过点 $M(-3,0)$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于 A,B 两点，过点 F_2 作直线 l 的垂线，垂足为 N（点 A,B 在点 M,N 之间）．若 $\triangle AF_2M$ 与 $\triangle BF_2N$ 面积相等，求直线 l 的方程．

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\cos x-ax^2$，其中 $a\in\mathbf{R}$，$x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$．

（Ⅰ）当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，求函数 $f(x)$ 的值域；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上恰有两个极小值点 x_1,x_2，求 a 的取值范围；并判断是否存在实数 a，使得 $f(x_2-x_1)=1+\frac{1}{9}(x_2-x_1)^2$ 成立？若存在，求出 a 的值；若不存在，请说明理由．

请考生在第 22，23 题中任选择一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分．作答时，用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑．

22.（本小题满分 10 分）选修 4－4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=k^2,\\ y=\sqrt{2}k\end{cases}$（$k$ 为参数）．以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos(\theta-\frac{\pi}{4})=1$．

（Ⅰ）求曲线 C 与直线 l 的普通方程；

（Ⅱ）设直线 l 与曲线 C 相交于 P,Q 两点，点 $M(\sqrt{2},0)$．求 $|PM|^2+|QM|^2$ 的值．

23.（本小题满分 10 分）选修 4－5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x^2-4|+|x+2|-4$．

（Ⅰ）若关于 x 的方程 $f(x)=m$ 有唯一实数解，求实数 m 的值；

（Ⅱ）对（Ⅰ）中的 m 值，若正实数 a,b 满足 $a+b+2m=0$，试比较 $\frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+5}$ 与 $\frac{1}{4}$ 的大小，并说明理由．