2023 北京房山高一（下）期末

数　学

一、选择题。共10小题，每小题5分，共50分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．若角 α 的终边经过点 P（1，－2），则 sinα＝（　　）

A．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B．$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C．－2　　D．$-\frac{1}{2}$

2．在△ABC 中，已知 a＝2，b＝3，C＝60°，则 c 等于（　　）

A．$\sqrt{7}$　　B．7　　C．$\sqrt{19}$　　D．19

3．下列命题中，正确的是（　　）

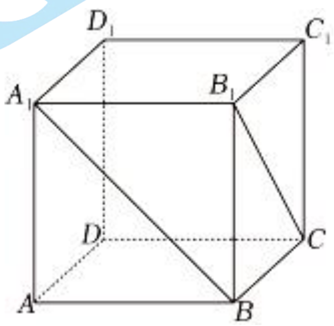
A．一条直线和一个点确定一个平面

B．两个平面相交，可以只有一个公共点

C．三角形是平面图形

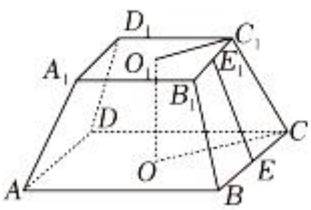
D．四边形是平面图形

4．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，异面直线 A_1B，B_1C 所成角的大小为（　　）



A．90°　　B．60°　　C．45°　　D．30°

5．如图，在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，O_1，O 分别为上、下底面中心，E_1，E 分别为 B_1C_1，BC 的中点，则下列结论中错误的是（　　）



A．O_1OCC_1 是直角梯形　　B．E_1ECC_1 是直角梯形

C．直线 AD 与直线 B_1B 异面　　D．直线 O_1O 与直线 B_1B 异面

6．已知平面直角坐标系中的 3 点 A（2，2），B（6，0），C（0，0），则△ABC 中最大角的余弦值等于（　　）

A．$-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$-\frac{\sqrt{10}}{10}$　　D．$\frac{\sqrt{10}}{10}$

7．在三棱锥 $V-ABC$ 中，VA，VB，VC 两两垂直，VA＝VB＝VC＝1，则点 V 到平面 ABC 的距离等于（　　）

A．1　　　　B．$\frac{1}{2}$　　　　C．$\sqrt{3}$　　　　D．$\frac{\sqrt{3}}{3}$

8．设α，β是两个不同的平面，m，n是两条不同的直线，且m，$n\subset\alpha$，则“α∥β”是“m∥β且n∥β”的（　　）

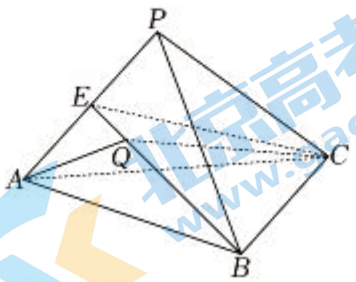
A．充分而不必要条件　　　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　　　D．既不充分也不必要条件

9．在△ABC中，若$B=3A$，则$\frac{b}{a}$的取值范围是（　　）

A．（1，2）　　B．（2，3）　　C．（1，3）　　D．（0，3）

10．如图，在各棱长均为1的的四面体$P-ABC$中，E是PA的中点，Q为直线EB上的动点，则$AQ+CQ$的最小值为（　　）



A．$\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$　　B．$\sqrt{1+\frac{\sqrt{6}}{3}}$　　C．$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$　　D．2

二、填空题。共6小题，每小题5分，共30分。

11．在△ABC中，若$\cos A=-\frac{3}{5}$，则$\sin A=$____________.

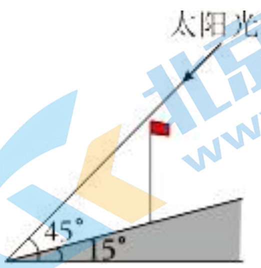
12．一个圆锥的侧面展开图是一个扇形，已知扇形的半径为3，圆心角为$\frac{2\pi}{3}$，则扇形的弧长等于_______；该圆锥的体积等于______________.

13．已知一个长方体的8个顶点都在一个球面上，且长方体的棱长为2，3，$\sqrt{3}$，则长方体的体对角线的长等于______；球的表面积等于_______.

14．已知l，m是两条不同的直线，α，β是两个不同的平面，从下列四个条件中选择两个作为已知条件，能够得到$l\perp\alpha$的是_________.（填入条件的序号即可）

①l∥m；②α∥β；③$m\perp\alpha$；④$l\perp\beta$.

15．如图所示，在倾斜角等于15°的山坡上有一根旗杆，当太阳的仰角是45°时，旗杆在山坡上的影子的长是30米，则旗杆的高等于____________米.



16．如图1，在矩形$ABCD$中，$AB=2AD=2$，E为AB的中点，将△ADE沿DE折起，点A折起后的位置

记为点 A_1，得到四棱锥 A_1-BCDE，M 为 AC 的中点，如图 2．某同学在探究翻折过程中线面位置关系时，得到下列四个结论：

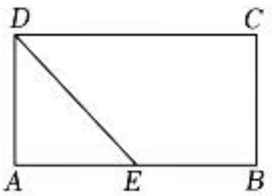


图1

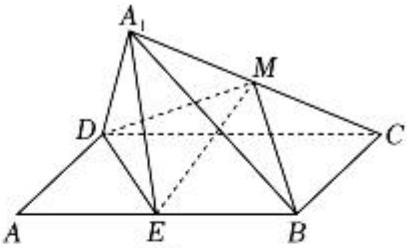


图2

①恒有 $A_1D\perp A_1E$；②恒有 $BM\parallel$ 平面 A_1DE；

③三棱锥 A_1-DEM 的体积的最大值为$\dfrac{\sqrt{2}}{12}$；④存在某个位置，使得平面 $A_1DE\perp$ 平面 A_1CD．

其中所有正确结论的序号是________．

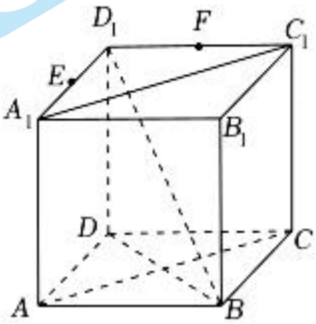
三、解答题。共 5 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

17．如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为 A_1D_1，D_1C_1 的中点．

（1）求证：$A_1A\parallel$ 平面 D_1B_1B；

（2）求证：$D_1B\perp AC$；

（3）求证：A，C，E，F 四点共面．



18．在△ABC 中，$A=60°$，$a=\sqrt{6}$，$b=2$．

（1）求∠B；

（2）求△ABC 的面积．

19．已知函数 $f(x)=\sin 2x+2\cos^2 x-1$．

（1）求 $f(x)$ 的最小正周期；

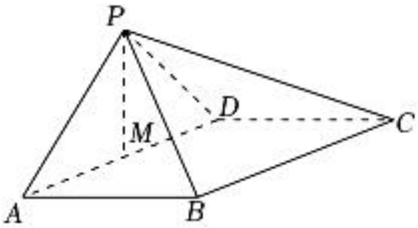
（2）当 $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$时，求 $f(x)$ 的最小值及取得最小值自变量 x 的值．

20．如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$PA\perp PD$，$PA=PD$，M 为 AD 的中点．

（1）求证：$PM\perp BC$；

（2）求证：平面 $PAB\perp$ 平面 PCD；

（3）在棱 PA 上是否存在一点 N，使得 $PC\parallel$ 平面 BMN？若存在，求$\dfrac{AN}{NP}$的值；若不存在，请说明理由．



21．某城市计划新修一座城市运动主题公园，该主题公园为平面五边形 $ABCDE$（如图所示），其中三角形 ABE 区域为儿童活动场所，三角形 BCD 区域为文艺活动场所，三角形 BDE 区域为球类活动场所，AB，BC，CD，DE，EA 为运动小道（不考虑宽度），$\angle BCD=\angle BAE=120°$，$BC=CD=2\sqrt{3}$ km，$DE=8km$．

（1）求 BD 的长度；

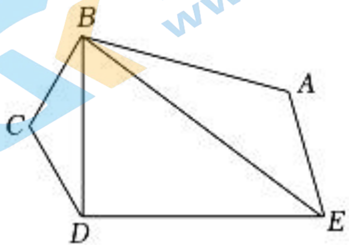
（2）再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求 BE 的长度；

（3）在（2）的条件下，应该如何设计，才能使儿童活动场所（即三角形 ABE）的面积最大？

条件①：$\cos\angle DBE=\frac{3}{5}$；

条件②：$\angle CDE=120°$．

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分．



参考答案

一、选择题。共10小题，每小题5分，共50分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．若角 α 的终边经过点 P（1，－2），则 sinα＝（　　）

A．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　　　B．$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　　　C．－2　　　　D．$-\frac{1}{2}$

【分析】由角 α 的终边经过点 P（1，－2），利用任意角的三角函数定义求出 sinα 即可．

解：∵点 P（1，－2），

∴x＝1，y＝－2，$|OP|=\sqrt{1+(-2)^2}=\sqrt{5}$，

因此，$\sin\alpha=\frac{y}{|OP|}=\frac{-2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$．

故选：B．

【点评】此题考查了同角三角函数间的基本关系，以及任意角的三角函数定义，熟练掌握三角函数的定义是解本题的关键．

2．在△ABC 中，已知 a＝2，b＝3，C＝60°，则 c 等于（　　）

A．$\sqrt{7}$　　　　B．7　　　　C．$\sqrt{19}$　　　　D．19

【分析】利用余弦定理列出关系式，将 a，b 及 cos$C$ 的值代入即可求出 c 的值．

解：∵在△ABC 中，a＝2，b＝3，C＝60°，

∴由余弦定理得：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=4+9-6=7$，

则 $c=\sqrt{7}$．

故选：A．

【点评】此题考查了余弦定理，以及特殊角的三角函数值，熟练掌握余弦定理是解本题的关键．

3．下列命题中，正确的是（　　）

A．一条直线和一个点确定一个平面

B．两个平面相交，可以只有一个公共点

C．三角形是平面图形

D．四边形是平面图形

【分析】根据基本事实 1、2 和 3 及基本事实 1 的推论逐一判断．

解：对于 A：一条直线和直线外一点确定一个平面，故 A 错；

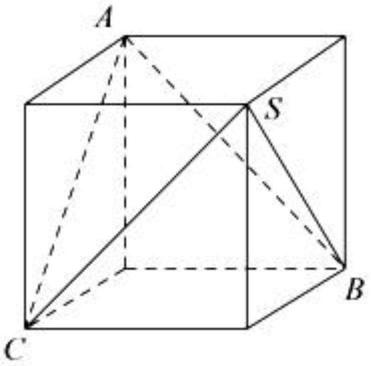
对于 B：两个平面相交，有一条公共直线，有无数个公共点，故 B 错；

对于 C：三角形的两条边一定相交，根据基本事实 1 的推论 2“过两条相交直线，有且只有一个平面”，所以三角形的两条边确定一个平面，而第三边的两个端点在该平面内，

根据基本事实 2“如果一条直线上的两点在一个平面内，

那么这条直线在此平面内”确定第三边在该平面内，故三角形是一个平面图形，故 C 正确；

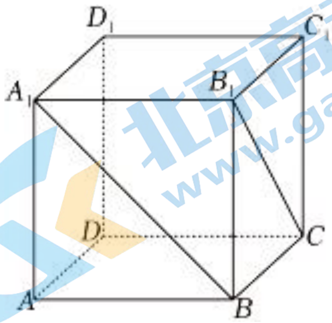
对于 D：如图四边形 $ACSB$ 不是平面图形，故 D 错误．



故选：C.

【点评】本题主要考查了平面的基本性质及推论，属于基础题.

4．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，异面直线 A_1B，B_1C 所成角的大小为（　　）



A．90°　　　　B．60°　　　　C．45°　　　　D．30°

【分析】先通过平行寻找线线角，再根据解三角形得结果.

解：因为 $A_1B // D_1C$，所以 $\angle D_1CB_1$ 为异面直线 A_1B 与 B_1C 所成角的平面角，

因为 $\triangle D_1CB_1$ 为正三角形，

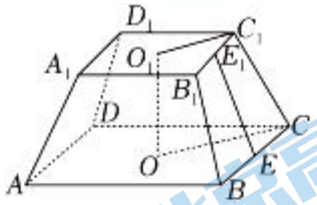
所以 $\angle D_1CB_1 = 60°$，

即异面直线 A_1B，B_1C 所成角的大小为 60°.

故选：B.

【点评】本题主要考查异面直线所成的角，属于中档题.

5．如图，在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，O_1，O 分别为上、下底面中心，E_1，E 分别为 B_1C_1，BC 的中点，则下列结论中错误的是（　　）

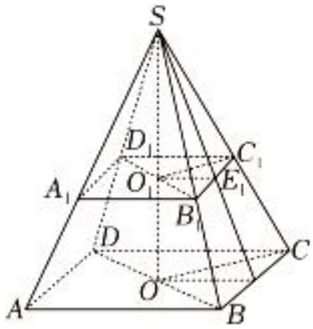


A．O_1OCC_1 是直角梯形　　　　B．E_1ECC_1 是直角梯形

C．直线 AD 与直线 B_1B 异面　　　　D．直线 O_1O 与直线 B_1B 异面

【分析】将正四棱台补全为正四棱锥，再结合正四棱锥的性质一一分析即可.

解：由棱台的定义可知可将正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 补全为如图所示正四棱锥 $S-ABCD$，



因为 O_1，O 分别为上、下底面中心，所以 S、O_1、O 三点共线，

且 $SO\perp$底面 $ABCD$，$SO\perp$底面 $A_1B_1C_1D_1$，$OC\subset$底面 $ABCD$，$O_1C_1\subset$底面 $A_1B_1C_1D_1$，

所以 $SO\perp OC$，$SO\perp O_1C_1$，

又 $OC /\!/ O_1C_1$，且 $O_1C_1\neq OC$，所以 O_1OCC_1 是直角梯形，故 A 正确；

因为 E_1，E 分别为 B_1C_1，BC 的中点，$\triangle SBC$ 与$\triangle SB_1C_1$ 均为等腰三角形，且 $SB=SC$，$SB_1=SC_1$，

所以 $SE_1\perp B_1C_1$，$SE\perp BC$，

又 $E_1C_1 /\!/ EC$，$E_1C_1\neq EC$，所以 E_1ECC_1 是直角梯形，故 B 正确；

因为 $AD /\!/ BC$，$B_1B\cap BC=B$，所以直线 AD 与直线 B_1B 异面，故 C 正确；

由 $SO\cap SB=S$，所以直线 O_1O 与直线 B_1B 相交于点 S，故 D 错误.

故选：D.

【点评】本题主要考查异面直线的判定，考查转化能力，属于中档题.

6．已知平面直角坐标系中的 3 点 A（2，2），B（6，0），C（0，0），则$\triangle ABC$ 中最大角的余弦值等于（　　）

A．$-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$-\frac{\sqrt{10}}{10}$　　D．$\frac{\sqrt{10}}{10}$

【分析】根据夹角公式算出$\triangle ABC$ 每个内角的余弦值，然后分析可得结果.

解：A（2，2），B（6，0），C（0，0），

$\overrightarrow{AB}=(4,\ -2)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,\ -2)$，$\cos A=\cos\langle\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{-4}{4\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$；

$\overrightarrow{CB}=(6,\ 0)$，$\overrightarrow{CA}=(2,\ 2)$，$\cos C=\cos\langle\overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{CA}\rangle=\frac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{CA}|}=\frac{12}{6\times2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\overrightarrow{BA}=(-4,\ 2)$，$\overrightarrow{BC}=(-6,\ 0)$，$\cos B=\cos\langle\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{BC}\rangle=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{24}{6\times2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$；

由 A，B，C 为三角形 ABC 的内角，

则 $\cos A<0$，$\cos B>0$，$\cos C>0$，于是 A 是钝角，B，C 是锐角，最大角是 A，余弦值为$-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

故选：C.

【点评】本题主要考查余弦定理的应用，属于基础题.

7．在三棱锥 $V-ABC$ 中，VA，VB，VC 两两垂直，$VA=VB=VC=1$，则点 V 到平面 ABC 的距离等于（　　）

A．1　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{3}$

【分析】根据 $V_{A-VBC}=V_{V-ABC}$ 利用等体积法求解即可．

解：设点 V 到平面 ABC 的距离为 h，

∵VA，VB，VC 两两垂直，且 $VA=VB=VC=1$，

∴$AB=BC=AC=\sqrt{2}$，$S_{\triangle VBC}=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$，

∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又 $VA\perp VB$，$VA\perp VC$，$VB\cap VC=V$，VB，$VC\subset$平面 VBC，

所以 $VA\perp$平面 VBC，

∵$V_{A-VBC}=V_{V-ABC}$，即$\frac{1}{3}S_{\triangle VBC}\cdot VA=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h$

∴$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times h$，

∴$h=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即点 V 到平面 ABC 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{3}$．

故选：D．

【点评】本题主要考查等体积法的运用，考查点到平面的距离求解，考查运算求解能力，属于中档题．

8．设 α，β 是两个不同的平面，m，n 是两条不同的直线，且 m，$n\subset\alpha$，则“$\alpha/\!/\beta$”是“$m/\!/\beta$ 且 $n/\!/\beta$”的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

【分析】由面面平行的判定与性质判断充分性和必要性即可．

解：由面面平行的性质可知：$\begin{cases}\alpha/\!/\beta\\ m,\ n\subset\alpha\end{cases}\Rightarrow m/\!/\beta$，且 $n/\!/\beta$，充分性成立，

当 $m/\!/n$ 时，若 m，$n\subset\alpha$，$m/\!/\alpha$，$n/\!/\beta$，则 α，β 可能平行或相交，必要性不成立；

∴“$\alpha/\!/\beta$”是“$m/\!/\beta$ 且 $n/\!/\beta$”的充分而不必要条件．

故选：A．

【点评】本题主要考查充分条件、必要条件的定义，属于基础题．

9．在△ABC 中，若 $B=3A$，则$\frac{b}{a}$的取值范围是（　　）

A．（1，2）　　B．（2，3）　　C．（1，3）　　D．（0，3）

【分析】利用正弦定理将边化角，再利用两角和的正弦公式及二倍角公式转化为 A 的三角函数，再结合 A 的范围计算可得．

解：由正弦定理可得$\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{\sin3A}{\sin A}=\frac{\sin2A\cos A+\cos2A\sin A}{\sin A}$

$=\dfrac{2\sin A\cos^2 A+\cos 2A\sin A}{\sin A}$

$=2\cos^2A+\cos 2A=4\cos^2A-1$；

因为$\begin{cases}0<B=3A<\pi\\0<B+A=4A<\pi\end{cases}$，

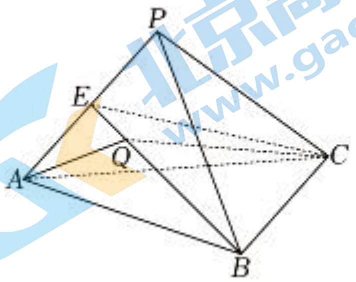
所以$0<A<\dfrac{\pi}{4}$，所以$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos A<1$，则$\dfrac{1}{2}<\cos^2A<1$，

则 $1<4\cos^2A-1<3$，即$\dfrac{b}{a}\in(1,3)$．

故选：C．

【点评】本题主要考查正弦定理的应用，属于基础题．

10．如图，在各棱长均为 1 的的四面体 $P-ABC$ 中，E 是 PA 的中点，Q 为直线 EB 上的动点，则 $AQ+CQ$ 的最小值为（　　）



A．$\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}}$　　B．$\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$　　C．$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$　　D．2

【分析】根据题意将△BCE 和△ABE 折成一个平面，可知 $AQ+CQ\geqslant AC$，结合余弦定理运算求解．

解：各棱长均为 1 的的四面体 $P-ABC$ 中，E 是 PA 的中点，

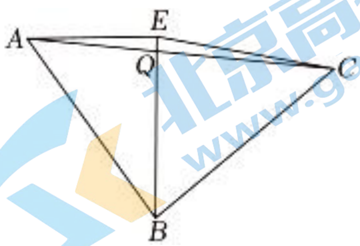
则$BE\perp PA$，$AE=\dfrac{1}{2}$，$BE=CE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

在△BCE 中，由余弦定理可得$\cos\angle BEC=\dfrac{BE^2+CE^2-BC^2}{2BE\cdot CE}=\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-1}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{1}{3}>0$，

可知∠BEC 为锐角，可得$\sin\angle BEC=\sqrt{1-\cos^2\angle BEC}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

将△BCE 和△ABE 折成一个平面，连接 AC，

可知 $AQ+CQ\geqslant AC$，当且仅当 A，Q，C 三点共线时，等号成立，



此时 $\cos\angle AEC=\cos(\angle AEB+\angle BEC)=-\sin\angle BEC=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

在 △ *ACE* 中，由余弦定理可得

$AC^2=AE^2+CE^2-2AE\cdot CE\cos\angle AEC=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times(-\frac{2\sqrt{2}}{3})=1+\frac{\sqrt{6}}{3}$，

即 $AC=\sqrt{1+\frac{\sqrt{6}}{3}}$，所以 $AQ+CQ$ 的最小值为 $\sqrt{1+\frac{\sqrt{6}}{3}}$．

故选：*B*．

【点评】本题主要考查棱锥的结构特征，属于中档题．

二、填空题。共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

11．在△*ABC* 中，若 $\cos A=-\frac{3}{5}$，则 $\sin A=$ ___$\frac{4}{5}$___．

【分析】根据同角三角函数基本关系式以及角的范围得答案．

解：因为 $\sin^2A+\cos^2A=1$，且 $\cos A=-\frac{3}{5}$，所以 $\sin A=\pm\frac{4}{5}$，

又在△*ABC* 中，$A\in(0，\pi)$，$\sin A>0$，所以 $\sin A=\frac{4}{5}$．

故答案为：$\frac{4}{5}$．

【点评】本题主要考查三角函数的同角关系，考查转化能力，属于基础题．

12．一个圆锥的侧面展开图是一个扇形，已知扇形的半径为 3，圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$，则扇形的弧长等于 ___2π___；该圆锥的体积等于 ___$\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$___．

【分析】利用扇形的弧长公式可得扇形的弧长；求出圆锥的底面半径和高可得圆锥的体积．

解：因为扇形的半径为 3，圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$，则扇形的弧长等于 $\frac{2\pi}{3}\times3=2\pi$，

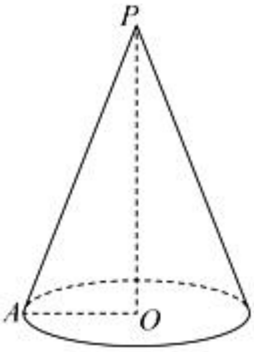
设圆锥的底面半径为 r（$r>0$），

所以 $2\pi=2\pi\times r$，解得 $r=1$，

则圆锥的高为 $PO=\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$，

所以圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi\times2\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$．

故答案为：2π；$\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$．



【点评】本题主要考查了圆锥的体积公式，属于基础题．

13．已知一个长方体的 8 个顶点都在一个球面上，且长方体的棱长为 2，3，$\sqrt{3}$，则长方体的体对角线的长等于 <u>4</u>；球的表面积等于 <u>16π</u>．

【分析】依题意长方体的体对角线即为外接球的直径，设外接球的半径为 R，利用勾股定理求出体对角线，即可求出 R，再根据球的表面积公式计算可得．

解：依题意长方体的体对角线即为外接球的直径，设外接球的半径为 R，

则 $(2R)^2=2^2+3^2+(\sqrt{3})^2=16$，

所以 $2R=4$，$R=2$，

即长方体的体对角线为 4，

则外接球的表面积 $S=4\pi R^2=16\pi$．

故答案为：4；16π．

【点评】本题主要考查了长方体的外接球问题，属于中档题．

14．已知 l，m 是两条不同的直线，α，β 是两个不同的平面，从下列四个条件中选择两个作为已知条件，能够得到 $l\perp\alpha$ 的是 <u>①③（或②④）</u>．（填入条件的序号即可）

①$l/\!/m$；②$\alpha/\!/\beta$；③$m\perp\alpha$；④$l\perp\beta$．

【分析】由直线与平面，平面与平面的位置关系对选项一一分析即可得出答案．

解：选①②⇒$l\perp\alpha$，

若 $l/\!/m$，$\alpha/\!/\beta$，则可能 $l\subset\alpha$，不正确；

选①③⇒$l\perp\alpha$，

若 $l/\!/m$，$m\perp\alpha$，则 $l\perp\alpha$，正确；

选①④⇒$l\perp\alpha$，

若 $l/\!/m$，$l\perp\beta$，则可能 $l\subset\alpha$，不正确；

选②③⇒$l\perp\alpha$，

若 $\alpha/\!/\beta$，$m\perp\alpha$，则可能 $l\subset\alpha$，不正确；

选②④⇒$l\perp\alpha$，

若 $\alpha/\!/\beta$，$l\perp\beta$，则 $l\perp\alpha$，正确；

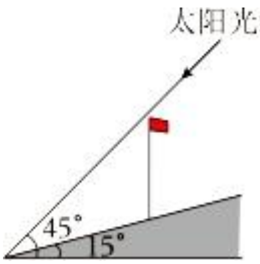
选③④⇒$l\perp\alpha$，

若 $m\perp\alpha$，$l\perp\beta$，则可能 $l\subset\alpha$，不正确．

故答案为：①③（或②④）．

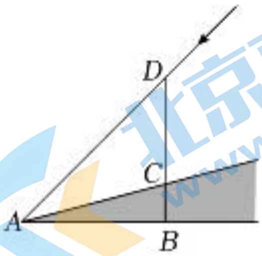
【点评】本题考查空间中线线，线面，面面间的位置关系，属于基础题．

15．如图所示，在倾斜角等于 15° 的山坡上有一根旗杆，当太阳的仰角是 45° 时，旗杆在山坡上的影子的长是 30 米，则旗杆的高等于 __$15\sqrt{2}$__米．



【分析】利用正弦定理求解，即可得出答案．

解：如图所示：



由题意得$\angle BAC=15°$，$\angle BAD=45°$，

则$\angle DAC=30°$，$\angle ADC=45°$，$AC=30$ 米，

在△ACD 中，由正弦定理得$\frac{CD}{\sin\angle DAC}=\frac{AC}{\sin\angle ADC}$，即$\frac{CD}{\sin30°}=\frac{30}{\sin45°}$，

解得$CD=15\sqrt{2}$．

故答案为：$15\sqrt{2}$．

【点评】本题考查解三角形，考查转化思想，考查逻辑推理能力和运算能力，属于中档题．

16．如图 1，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2AD=2$，E 为 AB 的中点，将△ADE 沿 DE 折起，点 A 折起后的位置记为点 A_1，得到四棱锥 A_1-BCDE，M 为 AC 的中点，如图 2．某同学在探究翻折过程中线面位置关系时，得到下列四个结论：

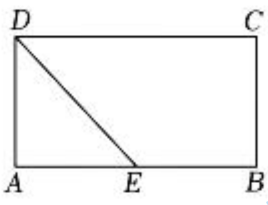


图1

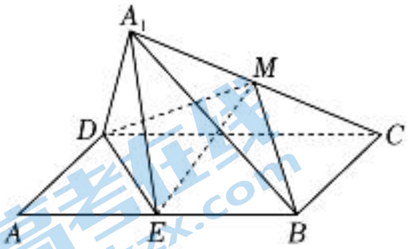


图2

①恒有 $A_1D\perp A_1E$；②恒有 BM∥平面 A_1DE；

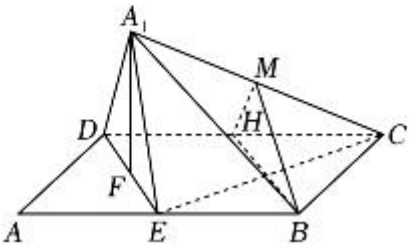
③三棱锥 A_1-DEM 的体积的最大值为$\frac{\sqrt{2}}{12}$；④存在某个位置，使得平面 $A_1DE\perp$平面 A_1CD．

其中所有正确结论的序号是 ___①②③___．

【分析】根据原图形判断①，根据面面平行得出线面平行判断②，结合面面垂直及体积公式判断体积最

大值得出③，应用面面垂直的性质定理及反证法得出④.

解：矩形 $ABCD$ 中，∵$AD\perp AE$，∴$A_1D\perp A_1E$，①正确；



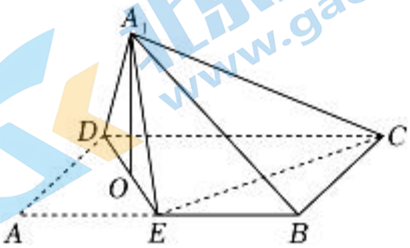
取 CD 中点 H，连接 MH，BH，∵M 和 H 分别是 A_1C，CD 的中点，∴$MH\parallel A_1D$，∵MH 在平面 A_1DE 外，

∴$MH\parallel$平面 A_1DE，∵E 是矩形 $ABCD$ 的 AB 边中点，∴$DH=EB$，$DH\parallel EB$，∴$HB\parallel DE$，

∵HB 在平面 A_1DE 外，∴$HB\parallel$平面 A_1DE，又 $HB\cap MH=H$，∴平面 $HBM\parallel$平面 A_1DE，

∵$BM\subset$平面 HBM，∴$BM\parallel A_1DE$，②正确；

取 DE 的中点 O，连接 A_1O，如图所示：



当平面 $A_1DE\perp$平面 $BCDE$ 时，A_1 到平面 $BCDE$ 的距离最大.

因为 $A_1D=AE$，O 为 DE 中点，所以 $A_1O\perp DE$.

又因为平面 $A_1DE\cap$平面 $BCDE=DE$，所以 $A_1O\perp BCDE$.

$DE=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，所以 $A_1O=\sqrt{1^2-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以四棱锥 A_1-BCDE 体积最大值为 $\frac{1}{3}\times\frac{(1+2)\times 1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

所以四棱锥 A_1-CDE 体积最大值为 $\frac{2}{3}\times V_{A_1-BCDE}=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{6}$，

M 为 AC 的中点，三棱锥 A_1-DEM 的体积的最大值为 $\frac{1}{2}\times V_{A_1-CDE}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{12}$，故③正确；

平面 $A_1DE\perp$平面 A_1CD，平面 $A_1DE\cap$平面 $A_1CD=A_1D$，$A_1E\perp A_1D$，$A_1E\subset$平面 A_1DE，

∴$A_1E\perp$平面 A_1CD，∴$A_1E\perp A_1C$，$A_1E=1$，$EC=\sqrt{2}$，

∴$A_1C=1$，△A_1DC，$A_1D=1$，∴$A_1C+A_1D=2=DC$，④错误.

故答案为：①②③.

【点评】本题考查线线垂直的证明，线面平行的证明，三棱锥的体积的最值的求解，属中档题.

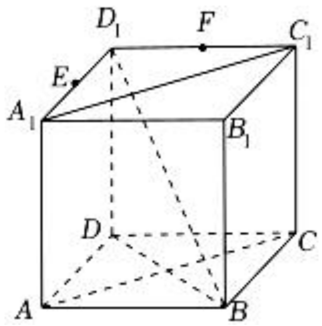
三、解答题。共 5 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

17．如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为 A_1D_1，D_1C_1 的中点.

（1）求证：$A_1A\parallel$平面 D_1B_1B；

（2）求证：$D_1B\perp AC$；

（3）求证：A，C，E，F 四点共面.



【分析】（1）由正方体的性质得到 $A_1A\parallel BB_1$，即可得证；

（2）通过证明 $AC\perp$ 平面 BB_1D_1D，即可得证；

（3）连接 A_1C_1，即可得到 $EF\parallel A_1C_1$，再由正方体的性质得到 $AC\parallel A_1C_1$，即可得证.

【解答】证明：（1）由正方体的性质 $A_1A\parallel BB_1$，$A_1A\not\subset$ 平面 D_1B_1B，$BB_1\subset$ 平面 D_1B_1B，

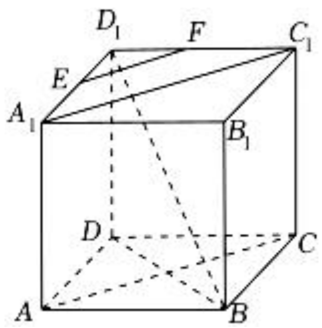
所以 $A_1A\parallel$ 平面 D_1B_1B.

（2）由正方体的性质 $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $DD_1\perp AC$，

又 $ABCD$ 为正方形，所以 $AC\perp BD$，$BD\cap DD_1=D$，BD，$DD_1\subset$ 平面 BB_1D_1D，

所以 $AC\perp$ 平面 BB_1D_1D，又 $D_1B\subset$ 平面 BB_1D_1D，

所以 $D_1B\perp AC$.



（3）连接 A_1C_1，因为 E，F 分别为 A_1D_1，D_1C_1 的中点，

所以 $EF\parallel A_1C_1$，

又 $AA_1\parallel CC_1$ 且 $AA_1=CC_1$，所以 AA_1C_1C 为平行四边形，

所以 $AC\parallel A_1C_1$，

所以 $AC\parallel EF$，所以 A，C，E，F 四点共面.

【点评】本题主要主要考查直线与平面垂直，考查转化能力，属于中档题.

18．在△ABC 中，$A=60^\circ$，$a=\sqrt{6}$，$b=2$.

（1）求∠B；

（2）求△ABC 的面积.

【分析】（1）利用正弦定理计算可得；

（2）首先利用两角和的正弦公式求出 $\sin C$，在根据面积公式计算可得.

解：（1）因为 $A=60^\circ$，$a=\sqrt{6}$，$b=2$，

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，即$\frac{\sqrt{6}}{\sin 60°}=\frac{2}{\sin B}$，解得$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又 $a>b$，所以 $A>B$，所以 $B=45°$；

（2）由（1）可得 $C=180°-60°-45°=75°$，

所以$\sin C=\sin 75°=\sin(45°+30°)=\sin 45°\cos 30°+\cos 45°\sin 30°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

【点评】本题主要考查正弦定理的应用，属于基础题.

19．已知函数 $f(x)=\sin 2x+2\cos^2 x-1$.

（1）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（2）当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时，求 $f(x)$ 的最小值及取得最小值自变量 x 的值.

【分析】（1）根据二倍角公式，辅助角公式将函数化简，然后根据三角函数的周期公式求解；

（2）根据三角函数的单调区间，结合 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$的范围进行求解.

解：（1）$f(x)=\sin 2x+2\cos^2 x-1=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$，

故最小正周期为$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，

（2）由于 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，则 $2x+\frac{\pi}{4}\in[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$，

注意到 $y=\sin x$ 在$[0,\pi]$上满足 $\sin x\geq 0$，$(\pi,\frac{5\pi}{4}]$上 $\sin x<0$，

于是要求 $f(x)$ 的最小值只用考虑$(\pi,\frac{5\pi}{4}]$的情况，

由 $y=\sin x$ 在$[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$上单调递减，$(\pi,\frac{5\pi}{4}]\subseteq[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$，

于是 $y=\sin x$ 在$(\pi,\frac{5\pi}{4}]$上递减，

故 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$时，即 $x=\frac{\pi}{2}$，$f(x)$ 取到最小值 $f(\frac{\pi}{2})=-1$.

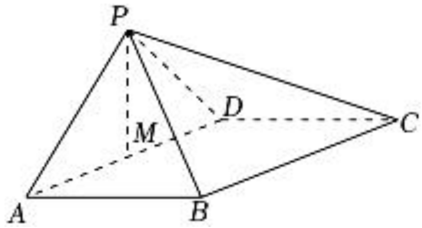
【点评】本题主要考查三角函数的最值，属于基础题.

20．如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，$PA\perp PD$，$PA=PD$，M 为 AD 的中点.

（1）求证：$PM\perp BC$；

（2）求证：平面 $PAB\perp$平面 PCD；

（3）在棱 PA 上是否存在一点 N，使得 $PC\parallel$平面 BMN？若存在，求$\frac{AN}{NP}$的值；若不存在，请说明理由.



【分析】（1）依题意可得 $PM\perp AD$，再由底面 $ABCD$ 为矩形，则 $AD\parallel BC$，即可得证；

（2）由已知证明 $PD\perp$ 平面 PAB，进一步可得平面 $PAB\perp$ 平面 PCD；

（3）连接 BM、AC，$BM\cap AC=O$，连接 ON，依题意可得△COB∽△AOM，则$\frac{AO}{OC}=\frac{AM}{BC}=\frac{1}{2}$，再由线面平行的性质得到 $ON\parallel PC$，即可得解．

解：（1）证明：因为 $PA=PD$，M 为 AD 的中点，所以 $PM\perp AD$，

又底面 $ABCD$ 为矩形，所以 $AD\parallel BC$，所以 $PM\perp BC$．

（2）证明：∵底面 $ABCD$ 为矩形，∴$AB\perp AD$．

∵平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

$AB\subset$ 平面 $ABCD$，∴$AB\perp$ 平面 PAD，

又 $PD\subset$ 平面 PAD，∴$AB\perp PD$．

又 $PA\perp PD$，$PA\cap AB=A$，PA、$AB\subset$ 平面 PAB，∴$PD\perp$ 平面 PAB，

而 $PD\subset$ 平面 PCD，∴平面 $PAB\perp$ 平面 PCD；

（3）存在，且$\frac{AN}{NP}=\frac{1}{2}$，理由如下：

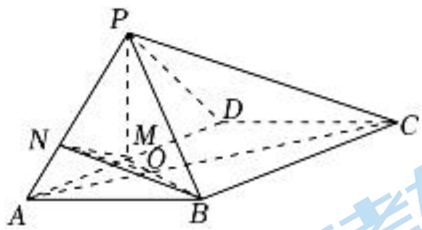
连接 BM、AC，$BM\cap AC=O$，连接 ON，

因为 $ABCD$ 是矩形，且 M 为 AD 的中点，所以△COB∽△AOM，所以$\frac{AO}{OC}=\frac{AM}{BC}=\frac{1}{2}$，

又 $PC\parallel$ 平面 BMN，平面 $APC\cap$ 平面 $BMN=ON$，$PC\subset$ 平面 APC，

所以 $ON\parallel PC$，

所以$\frac{AN}{NP}=\frac{AO}{OC}=\frac{1}{2}$．



【点评】本题考查线线垂直的证明，面面垂直的证明，线面平行的性质定理，属中档题．

21．某城市计划新修一座城市运动主题公园，该主题公园为平面五边形 $ABCDE$（如图所示），其中三角形 ABE 区域为儿童活动场所，三角形 BCD 区域为文艺活动场所，三角形 BDE 区域为球类活动场所，AB，BC，CD，DE，EA 为运动小道（不考虑宽度），$\angle BCD=\angle BAE=120^\circ$，$BC=CD=2\sqrt{3}$ km，$DE=8km$．

（1）求 BD 的长度；

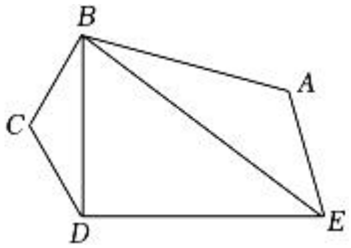
（2）再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求 BE 的长度；

（3）在（2）的条件下，应该如何设计，才能使儿童活动场所（即三角形 ABE）的面积最大？

条件①：$\cos\angle DBE=\frac{3}{5}$；

条件②：$\angle CDE=120°$．

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分．



【分析】（1）在△BCD 中，利用余弦定理，即可得出答案；

（2）若选①，在△BDE 中，利用余弦定理构造方程求解；若选②，利用勾股定理直接求解；

（3）在△ABE 中，利用余弦定理，结合基本不等式可求得 $AB\cdot AE$ 的最大值，代入三角形面积公式即可求得结果．

解：（1）在△BCD 中，由余弦定理得 $BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos\angle BCD=24-24\cos120°=36$，

∴$BD=6km$；

（2）若选条件①：由（1）得 $BD=6km$，

在△BDE 中，由余弦定理得 $DE^2=BD^2+BE^2-2BD\cdot BE\cos\angle DBE=36+BE^2-\frac{36}{5}BE=64$，

解得 $BE=-\frac{14}{5}$（不合题意，舍去）或 $BE=10$，

∴$BE=10km$；

若选条件②：∵$BC=CD$，$\angle BCD=120°$，

∴$\angle BDC=30°$，

∴$\angle BDE=\angle CDE-\angle BDC=90°$，

∴ $BE=\sqrt{DE^2+BD^2}=10km$．

（3）在△ABE 中，由余弦定理得 $BE^2=AB^2+AE^2-2AB\cdot AE\cos\angle BAE=AB^2+AE^2+AB\cdot AE=100$，

∵$AB^2+AE^2\geqslant 2AB\cdot AE$，当且仅当 $AB=AE$ 时等号成立，

∴$100\geqslant 3AB\cdot AE$，

∴$AB\cdot AE\leqslant\frac{100}{3}$，当且仅当 $AB=AE$ 时等号成立，

∴ $(S_{\triangle ABE})_{max}=\frac{1}{2}\times\frac{100}{3}\times\sin120°=\frac{25\sqrt{3}}{3}$，

即当 $AB=AE$ 时，儿童活动场所（即三角形 ABE）的面积最大．

【点评】本题考查解三角形，考查转化思想，考查逻辑推理能力和运算能力，属于中档题．