2024年高考数学仿真模拟卷(一)（新高考专用）

(时间：120分钟　满分：150分)

一、选择题(本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1．(2023·南平质检)设集合 $A=\{x|x^2-4<0\}$，$B=\{-2,-1,0,1,2\}$，则 $A\cap B$ 等于(　　)

A．$\{-2,2\}$　　B．$\{-1,0\}$　　C．$\{-1,0,1\}$　　D．$\{0,1\}$

2．(2023·长春模拟)已知复数 $\mathrm{i}z=1+5\mathrm{i}$，则复数 $z+\bar{z}$ 等于(　　)

A．-10　　B．10　　C．-2　　D．2

3．(2023·郴州模拟)已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$，则向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为(　　)

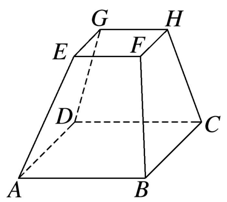
A.$\frac{\pi}{6}$　　B.$\frac{\pi}{3}$　　C.$\frac{\pi}{2}$　　D.$\frac{2\pi}{3}$

4．(2023·江苏七市调研)星载激光束与潜艇通信传输中会发生信号能量衰减．已知一星载激光通信系统在近海水下某深度的能量估算公式为 $E_r=\frac{3}{S}E_P\times10^{-7}$，其中 E_P 是激光器输出的单脉冲能量，E_r 是水下潜艇接收到的光脉冲能量，S 为光脉冲在潜艇接收平面的光斑面积(单位：km²，光斑面积与卫星高度有关)．若水下潜艇光学天线接收到信号能量衰减 Γ 满足 $\Gamma=10\lg\frac{E_r}{E_P}$(单位：dB)．当卫星达到一定高度时，该激光器光脉冲在潜艇接收平面的光斑面积为75 km²，则此时 Γ 的大小约为(参考数据：$\lg 2\approx0.301$)(　　)

A．-76.02 dB　　B．-83.98 dB

C．-93.01 dB　　D．-96.02 dB

5．(2023·沈阳模拟)《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著，它将正四棱台形状的建筑物(棱台的上下底面均为正方形)称为方亭．如图，现有一方亭 $ABCD-EFHG$，其中上底面与下底面的面积之比为1∶4，方亭的高 $h=EF$，$BF=\frac{\sqrt{6}}{2}EF$，方亭的四个侧面均为全等的等腰梯形，已知方亭的体积为 $\frac{56}{3}$，则该方亭的表面积为(　　)



A．$20+12\sqrt{5}$　　B．$20+6\sqrt{5}$　　C．$5+3\sqrt{5}$　　D．$5+6\sqrt{5}$

6．(2023·苏州八校联盟模拟)二项式 $\left(\sqrt{3}x+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 的展开式中只有第11项的二项式系数最大，则展开式中 x 的指数为整数的项的个数为(　　)

A．3　　B．5　　C．6　　D．7

7．定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x)=2-f(x)$．若 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称，则下列选项中一定成立的是(　　)

A．$f(-3)=1$　　B．$f(0)=0$　　C．$f(3)=2$　　D．$f(5)=-1$

8．(2023·华南师范大学附中模拟)在平面直角坐标系中，若抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 的准线与圆 M：$(x+1)^2+y^2=1$ 相切于点 A，直线 AB 与抛物线 C 切于点 B，点 N 在圆 M 上，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AN}$ 的取值范围为(　　)

A．$[0,8]$　　B．$[2-2\sqrt{5}，2+2\sqrt{5}]$

C．$[4-4\sqrt{2}，4+4\sqrt{2}]$　　D．$[4\sqrt{2}-4,4\sqrt{2}+4]$

二、选择题(本大题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求的．全部选对得5分，部分选对得2分，有选错的得0分)

9．(2023·张家口模拟)一组互不相等的样本数据 x_1，x_2，…，x_n，其平均数为 $\bar{x}$，方差为 s^2，极差为 m，中位数为 n，去掉其中的最小值和最大值后，余下数据的平均数为 $\bar{x}'$，方差为 s'^2，极差为 m'，中位数为 n'，则下列选项一定正确的有(　　)

A．$n=n'$　　B.$\bar{x}=\bar{x}'$　　C．$s^2>s'^2$　　D．$m>m'$

10．已知 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 为偶函数，其图象与直线 $y=2$ 的其中两个交点的横坐标分别为 x_1，x_2，$|x_1-x_2|$ 的最小值为 π，将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，则下列选项正确的是(　　)

A．$g(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

B．函数 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$ 上单调递减

C.$\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$ 是函数 $g(x)$ 图象的一个对称中心

D．若方程 $g(x)=m$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有两个不相等的实根，则 $1\leqslant m<2$

11．(2023·唐山模拟)函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，若 $f(x)$ 为奇函数，且 $f(x+2)=f(x)$，则(　　)

A．$f'(x)$ 为偶函数

B．$f'(0)=0$

C．$f(x)$ 的图象关于 $(1,0)$ 对称

D．若 $F(x)=f(x)+xf'(x)$，则 $F'(x)$ 为奇函数

12．(2023·深圳中学模拟)如图，棱长为2的正四面体 $ABCD$ 中，M，N 分别为棱 AD，BC 的中点，O 为线段 MN 的中点，球 O 的表面与线段 AD 相切于点 M，则下列结论中正确的是(　　)

A．$AO\perp$ 平面 BCD

B．球 O 的体积为 $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$

C．球 O 被平面 BCD 截得的截面面积为 $\frac{4\pi}{3}$

D．球 O 被正四面体 $ABCD$ 表面截得的截面周长为 $\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$

三、填空题(本大题共4小题，每小题5分，共20分)

13．(2023·济宁模拟)已知 $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{3}{5}$，则 $\sin 2\alpha=$________．

14．(2023·石家庄模拟)已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n-1$，数列 $\{b_n\}$ 是以1为首项，2为公比的等比数列，则 $ab_1+ab_2+\cdots+ab_9=$________．

15．(2023·南京模拟)一个袋子中有 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 个红球和5个白球，每次从袋子中随机摸出2个球．若记“摸出的两个球颜色不相同”发生的概率为 $p(n)$，则 $p(n)$ 的最大值为________．

16．(2023·江苏统考)已知 F_1，F_2 分别为双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$ 的左、右焦点，过 F_2 作 C 的两条渐近线的平行线，与渐近线交于 M，N 两点．若 $\cos\angle MF_1N=\frac{5}{13}$，则 C 的离心率为________．

四、解答题(本大题共6小题，共70分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17．(10分)(2023·湖北十一校模拟)已知在△ABC 中，其角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且满足 $b\cos C+\sqrt{3}b\sin C=a+c$．

(1)若 $b=\sqrt{3}$，求△ABC 的外接圆半径；

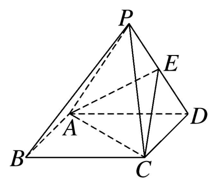
(2)若 $a+c=4\sqrt{3}$，且 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=6$，求△$ABC$ 的内切圆半径．

18．(12 分)(2023·淮北模拟)数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$\frac{a_{n+1}}{3a_n}=1+\frac{1}{n}$.

(1)设 $b_n=\frac{n^2-7n}{a_n}$，求$\{b_n\}$的最大项；

(2)求数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n.

19．(12 分)(2023·杭州模拟)如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，侧面 PAD 是边长为 2 的正三角形，平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，$AB\perp PD$.



(1)求证：平行四边形 $ABCD$ 为矩形；

(2)若 E 为侧棱 PD 的中点，且平面 ACE 与平面 ABP 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{4}$，求点 B 到平面 ACE 的距离.

20．(12 分)(2023·烟台模拟)已知函数 $f(x)=ae^x-\frac{1}{2}x^2-x$.

(1)若 $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，求实数 a 的取值范围；

(2)当 $a=1$ 时，证明：$\forall x\in(-2，+\infty)$，$f(x)>\sin x$.

21．(12 分)抚州不仅有着深厚的历史积淀与丰富的民俗文化，更有着许多旅游景点．每年来抚州旅游参观的人数不胜数．其中，名人园与梦岛被称为抚州的两张名片，为合理配置旅游资源，现对已游览名人园景点的游客进行随机问卷调查．若不去梦岛记 1 分，若继续去梦岛记 2 分．每位游客去梦岛的概率均为$\frac{2}{3}$，且游客之间的选择意愿相互独立．

(1)从游客中随机抽取 3 人，记总得分为随机变量 X，求 X 的分布列与均值；

(2)若从游客中随机抽取 m 人，记总分恰为 m 分的概率为 A_m，求数列$\{A_m\}$的前 6 项和；

(3)在对所有游客进行随机问卷调查的过程中，记已调查过的累计得分恰为 n 分的概率为 B_n，探讨 B_n 与 B_{n-1} 之间的关系，并求数列$\{B_n\}$的通项公式.

22．(12 分)(2023·烟台模拟)在平面直角坐标系中，P，Q 是抛物线 C：$x^2=y$ 上两点(异于点 O)，过点 P 且与 C 相切的直线 l 交 x 轴于点 M，且直线 OQ 与 l 的斜率乘积为-2.

(1)求证：直线 PQ 过定点，并求此定点 D 的坐标；

(2)过 M 作 l 的垂线交椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 于 A，B 两点，过 D 作 l 的平行线交直线 AB 于 H，记△OPQ 的面积为 S，△ABD 的面积为 T.

①当$\frac{T}{S^2}$取最大值时，求点 P 的纵坐标；

②证明：存在定点 G，使$|GH|$为定值.