北京汇文中学教育集团 2023-2024 学年度第一学期

期中考试

高三年级　数学学科

本试卷共 6 页，共 150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.

一、选择题(每题 4 分，共 40 分)

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-x-6\le 0\}$， $B=\{y|y=|x|+1\}$，则 $A\cap B=$ (　　)

A. [1，2]　　B. [1，3]　　C. [0，2]　　D. [0，3]

2. 下列命题中，正确的是 (　　)

A. $1-2i$ 的虚部是 2　　B. $|1-2i|=\sqrt{5}$

C. $1-2i$ 的共轭复数是 $-1-2i$　　D. $1-2i$ 在复平面内对应的点在第二象限

3. 已知点 $P(6,-8)$ 是角 α 终边上一点，则 $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=$ (　　)

A. $\frac{3}{5}$　　B. $-\frac{3}{5}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $-\frac{4}{5}$

4. 已知 l， m 表示两条不同的直线， α 表示平面，则下列说法正确的是 (　　)

A. 若 $l//m$， $m\subset\alpha$，则 $l//\alpha$　　B. 若 $l//\alpha$， $m\subset\alpha$，则 $l//m$

C. 若 $l\perp m$， $m\subset\alpha$，则 $l\perp\alpha$　　D. 若 $l\perp\alpha$， $m\subset\alpha$，则 $l\perp m$

5. 在△ ABC 中，点 D 在边 AB 上， $BD=2DA$. 记 $\overrightarrow{CA}=\vec{m}$， $\overrightarrow{CD}=\vec{n}$. 则 $\overrightarrow{CB}=$ (　　)

A. $3\vec{m}-2\vec{n}$　　B. $-2\vec{m}+3\vec{n}$　　C. $3\vec{m}+2\vec{n}$　　D. $2\vec{m}+3\vec{n}$

6. 函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 (　　)

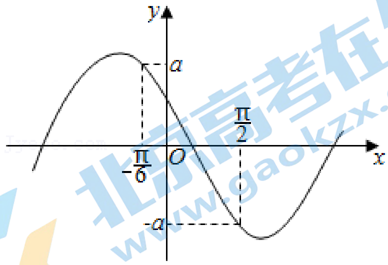
A. $\frac{1}{2}$　　B. $\sqrt{3}-1$　　C. 1　　D. $\sqrt{3}$

7. 在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_n=n^2+\lambda n$， $n\in\mathrm{N}^*$，则“$a_1<a_2$”是“$\{a_n\}$ 是单调递增数列”的 (　　)

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8.已知函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示，将该函数的图象向左平移 $t(t>0)$ 个单位长度，得到函数 $y=f(x)$ 的图象．若函数 $y=f(x)$ 为奇函数，则 t 的最小值是(　　)



A. $\frac{\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　C. $\frac{\pi}{4}$　D. $\frac{\pi}{3}$

9．布达佩斯的伊帕姆维泽蒂博物馆收藏的达·芬奇方砖，在正六边形上画了具有视觉效果的正方体图案(如图 1)，把三片这样的达·芬奇方砖形成图 2 的组合，这个组合表达了图 3 所示的几何体．如图 3 中每个正方体的棱长为1，则点 A 到平面 QGC 的距离为(　　)

图 1

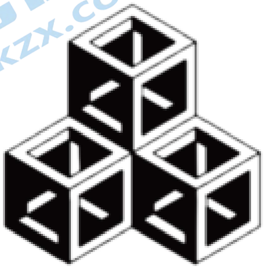


图 2

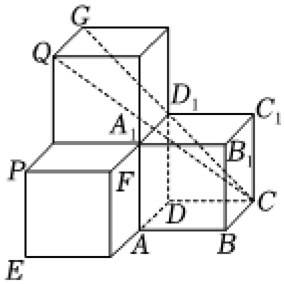


图 3

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C.1　　D. $\sqrt{2}$

10.设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-(a+1)x+2a, x<1\\ a|x-2|, x\geq 1\end{cases}$，给出下列四个结论：

①当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 有三个极值点；

②当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 有三个极值点；

③ $\forall a\in \mathrm{R}, x=2$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点；

④ $\forall a\in \mathrm{R}, x=\frac{a+1}{2}$ 不是函数 $f(x)$ 的极大值点．

其中，所有正确结论的序号是(　　)

A. ①②　B. ②③　C. ①④　D. ②④

二、填空题(每题 5 分，共 25 分)

11．首项为1的等比数列 $\{a_n\}$ 中，$4a_1, 2a_2, a_3$ 成等差数列，则公比 $q=$________．

12.若函数 $f(x)=2^x-a\cdot(\frac{1}{2})^x$ 为偶函数，则 $a=$________， $f(x)$ 的最小值为_______.

13.已知正四棱锥 $S-ABCD$，底面边长为 2 ，体积为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$，则这个四棱锥的侧棱长为_______.

14．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$， $a_{2n}=n+1$， $a_{2n+1}=a_{2n}+a_{2n-1}$， $n\in N^*$.则集合 $\{m\mid a_m\le 20\}$ 中元素的个数为________.

15.已知 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 是空间单位向量， $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=\frac{1}{2}$， 若空间向量 $\vec{b}$ 满足 $\vec{b}\cdot\vec{e}_1=2$， $\vec{b}\cdot\vec{e}_2=\frac{5}{2}$， 且对于任意 $x,y\in R$， $|\vec{b}-(x\vec{e_1}+y\vec{e_2})|\ge|\vec{b}-(x_0\vec{e_1}+y_0\vec{e_2})|=1(x_0,y_0\in R)$， 则 $x_0+y_0=$_______，$|\vec{b}|=$______.

三、**解答题**（本大题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

16.（13 分） $\triangle ABC$ 中， $b^2+c^2=a^2+\sqrt{3}bc$.

（I）求 $\angle A$ 的大小；

（II）以下三组条件中恰有一组条件使得三角形存在且唯一确定，请选出该组条件，并求 $\triangle ABC$ 的面积.

条件①： $\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$， $b=\sqrt{2}$；

条件②： $\cos B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$， $a=\sqrt{2}$；

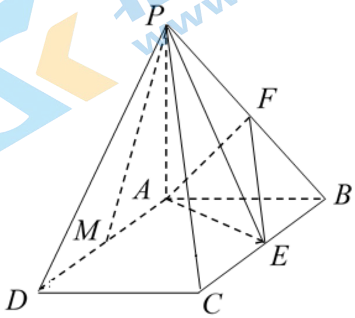
条件③： $a=1$， $b=\sqrt{2}$.

注：条件选择错误，第（2）问得 0 分.

17. （14 分）如图，已知平面$PAB\perp$平面$ABCD$，四边形$ABCD$是矩形，$PA=AB$，点E，F分别是BC，PB的中点.

（I）若点M为线段AD中点，求证：PM // 平面AEF；

（II）求证：$AF\perp$平面PBC.



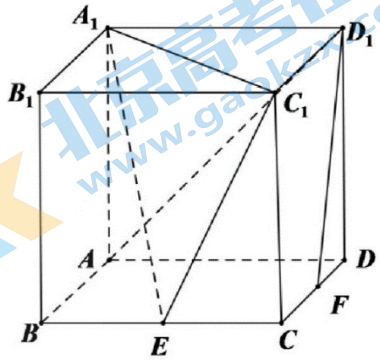
18. （15 分）已知函数$f(x)=x\ln x$.

（I）求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

（II）求$f(x)$的单调区间；

（III）若对于任意$x\in[\frac{1}{e},e]$，都有$f(x)\le ax-1$，求实数a的取值范围.

19. （14 分）如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 BC 的中点，F 为棱 CD 上一点.



（I）求直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成角的正弦值；

（II）求二面角 $A-A_1C_1-E$ 的正弦值；

（III）是否存在点 F，使 D_1F //平面 A_1EC_1？若存在，求出 DF 的长度；若不存在，请说明理由.

20. （14 分）已知函数 $f(x)=(x-2)e^x-x+\ln x$.

（I）求证：函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上为单调递增函数；

（II）若函数 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{4},1]$ 上的最大值在区间 $(m,m+1)$ 内，求整数 m 的值.

21. （15 分）已知数列 $A_n:a_1,a_2,\cdots,a_n$.如果数列 $B_n:b_1,b_2,\cdots,b_n$ 满足 $b_1=a_n$，$b_k=a_{k-1}+a_k-b_{k-1}$，

其中 $k=2,3,\cdots,n$，则称 B_n 为 A_n 的“衍生数列”.

（I）若数列 $A_4:a_1,a_2,a_3,a_4$ 的“衍生数列”是 $B_4:5,-2,7,2$，求 A_4；

（II）若 n 为偶数，且 A_n 的“衍生数列”是 B_n，证明：B_n 的“衍生数列”是 A_n；

（III）若 n 为奇数，且 A_n 的“衍生数列”是 B_n，B_n 的“衍生数列”是 C_n，….依次将数列 A_n，B_n，C_n，…的第 i $(i=1,2,\cdots,n)$ 项取出，构成数列 $\Omega_i:a_i,b_i,c_i,\cdots$.

求证：Ω_i 是等差数列.

（此页为答题纸，请勿在此作答）

【参考答案】

一、选择题：BBADB　CCBAD

二、填空题

11. 2

12. -1,2

13. $\sqrt{6}$

14.24

15. $3, 2\sqrt{2}$

16.（1）由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，又 $b^2+c^2=a^2+\sqrt{3}bc$，可得

$2bc\cos A=\sqrt{3}bc$，所以 $\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，又因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\dfrac{\pi}{6}$

（2）选择条件②

由（1）知，$A=\dfrac{\pi}{6}$，根据条件②中 $\cos B=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$B\in(0,\pi)$，所以 $\angle B$ 也是唯一确定的，从而可得 $\angle C$ 也是唯一确定的，再由 $a=\sqrt{2}$，代入正弦定理计算可得边 b,c 也是唯一确定的，故选择条件②.

因为 $\cos B=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B=\dfrac{1}{3}$.

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，

可得 $b=\dfrac{\sin B}{\sin A}a=\dfrac{\frac{1}{3}\times\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$

所以三角形面积 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{9}$

17.（I）证明：连结 BM 交 AE 于 N，连结 PM， FN．

因为四边形 $ABCD$ 是矩形，

所以 $AD//BC$，且 $AD=BC$，

又 M， E 分别为 AD， A 的中点，

所以四边形 $AMEB$ 是平行四边形，

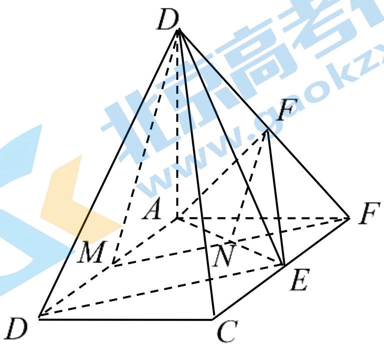
所以 N 为 BM 的中点，

又因为 M 是 PB 的中点，

所以 PM // FN，

因为 $PM \not\subset$ 平面 AEF， $NF \subset$ 平面 AEF，

所以 PM // 平面 AEF．



（II）证明：

在矩形$ABCD$中,$BC \perp AB$

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ 面PAB \perp 面ABCD \\ 面PAB \cap 面ABCD = AB \\ BC \subset 面ABCD \end{cases}$$

$\therefore BC \perp 面PAB$

因为 $AF \subset$ 平面 PAB，

所以 $BC \perp AF$．

因为 $PA = AB$，点 M 是 PB 的中点，

所以 $PB \perp AF$

又因为 $BC \bigcap PB = B$，

所以 $AF \perp$ 平面 PBC．

18. 解：(I)因为函数$f(x) = xlnx$，

所以$f\ '(x) = lnx + x \cdot \frac{1}{x} = lnx + 1$，

$f'(1) = ln1 + 1 = 1$.

又因为$f(1) = 0$，

所以曲线$y = f(x)$在点$(1, f(1))$处的切线方程为$y = x - 1$.

(II)函数$f(x)=xlnx$定义域为$(0,+\infty)$，

由(I)可知，$f'(x)=lnx+1$.

令$f'(x)=0$，解得$x=\frac{1}{e}$.

$f(x)$与$f'(x)$在区间$(0,+\infty)$上的情况如下：

x	$\left(0,\frac{1}{e}\right)$	$\frac{1}{e}$	$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↓	极小值	↑

故$f(x)$的增区间为$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$，减区间为$\left(0,\frac{1}{e}\right)$.

(III)当$\frac{1}{e}\leqslant x\leqslant e$时，“$f(x)\le ax-1$”等价于“$a\ge \ln x+\frac{1}{x}$”恒成立，

令$g(x)=\ln x+\frac{1}{x}$，$x\in[\frac{1}{e},e]$，

$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，$x\in[\frac{1}{e},e]$.

当$x\in[\frac{1}{e},1)$时，$g'(x)<0$，所以$g(x)$在区间$[\frac{1}{e},1)$单调递减.

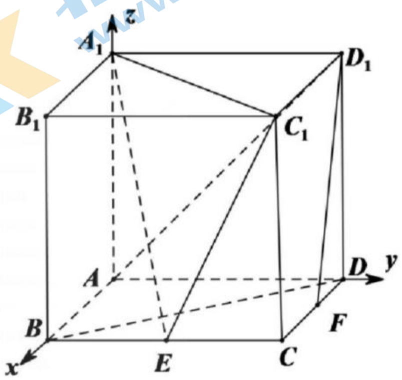
当$x\in(1,e]$时，$g'(x)>0$，所以$g(x)$在区间$(1,e]$单调递增.

而$g(\frac{1}{e})=-\ln e+e=e-1>1.5$，$g(e)=1+\frac{1}{e}<1.5$，

所以$g(x)$在区间$\left[\frac{1}{e},e\right]$上的最大值为$g(\frac{1}{e})=e-1$.

所以当$a\ge e-1$时，对于任意$x\in[\frac{1}{e},e]$，都有$f(x)\le ax-1$.

19.（1）以 A为原点，AB,AD,AA_1分别为 x,y,z轴，建立如图空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0)$，$A_1(0,0,2)$，$B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，

$D(0,2,0)$，$C_1(2,2,2)$，$D_1(0,2,2)$，E(2,1,0)

$\overrightarrow{AC_1}=(2,2,2),\overrightarrow{A_1C_1}=(2,2,0),\overrightarrow{EC_1}=(0,1,2)$

设平面 A_1C_1E 的一个法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$

$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{EC_1}=0\end{cases}$ 不妨设$y=2$，则$x=-2$，$z=-1$，

$\vec{m}=(-2,2,-1)$

设直线 AC_1与平面 A_1EC_1所成角为 θ，

则 $\sin\theta = |\cos < \vec{m}, \overrightarrow{AC_1} >| = \left|\dfrac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{AC_1}}{|\vec{m}|,|\overrightarrow{AC_1}|}\right| = \dfrac{2}{3\times 2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

(2) 由正方体可得，平面 AA_1C_1的一个法向量为 $\overrightarrow{DB} = (2,-2,0)$，

则 $\cos < \overrightarrow{DB}, \vec{m} > = \dfrac{\overrightarrow{DB}\cdot\vec{m}}{|\overrightarrow{DB}|\cdot|\vec{m}|} = \dfrac{8}{3\times 2\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

因为二面角 $A-A_1C_1-E$为锐二面角，

所以二面角 $A-A_1C_1-E$的正弦值为 $\sqrt{1-\cos^2\langle\overrightarrow{DB},\vec{m}\rangle} = \frac{1}{3}$.

（3）存在，设 F 点的坐标为(t, 2, 0)，所以$\overrightarrow{FD_1} = (-t,0,2)$

平面 A_1EC_1的一个法向量为 $\vec{m} = (-2,2,-1)$，

因为$\overrightarrow{FD_1} \perp \vec{m}$，所以$\vec{m}\cdot\overrightarrow{FD_1} = 0$，$t=1$

因为 $D_1F \not\subset$平面 A_1EC_1，所以 $D_1F//$平面 A_1EC_1．此时$DF=1$

20. 解：(1)

$x\in[1,+\infty), f'(x) = e^x + (x-2)e^x - 1 + \frac{1}{x} = (x-1)\left(e^x - \frac{1}{x}\right)$

当$x\geq 1$时$x-1\geq 0, e^x \geq e, \frac{1}{x}\leq 1, e^x > \frac{1}{x} \therefore f'(x)\geq 0$，$f(x)$单调递增

$(2) f'(x) = (x-1)e^x - 1 + \dfrac{1}{x} = (x-1)(e^x - \dfrac{1}{x})$.

令$h(x) = e^x - \frac{1}{x}$，则$h'(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0$，所以$h(x)$在$[\frac{1}{4},1]$上单调递增，

因为$h(\frac{1}{2}) = e^{\frac{1}{2}} - 2 < 0$，$h(1) = e-1 > 0$，

所以存在$x_0\in(\frac{1}{2},1)$，使得$h(x_0)=0$，即$e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$，即$\ln x_0 = -x_0$，

故当$x\in[\frac{1}{4},x_0)$时，$h(x)<0$，当$x\in(x_0,1]$时，$h(x)>0$，

又当$x\in[\frac{1}{4},1]$时，$x-1\leq 0$(等号仅在$x=1$时成立)，所以当$x\in[\frac{1}{4},x_0)$时，$f'(x)>0$，

当$x\in(x_0,1]$时，$f'(x)\leq 0$(等号仅在$x=1$时成立)，

所以$f(x)$在$[\frac{1}{4},x_0)$上单调递增，在$(x_0,1]$上单调递减，

则$f(x)_{\max} = g(x_0) = (x_0-2)e^{x_0} - x_0 + \ln x_0 = (x_0-2)\cdot\frac{1}{x_0} - x_0 - x_0 = 1 - \frac{2}{x_0} - 2x_0$，

令$G(x) = 1 - \frac{2}{x} - 2x$，$x\in(\frac{1}{2},1)$，则$G'(x) = \frac{2}{x^2} - 2 = \frac{2(1-x^2)}{x^2} > 0 (x\in(\frac{1}{2},1))$，

所以$G(x)$在$(\frac{1}{2},1)$上单调递增，则$G(x)>G(\frac{1}{2})=-4$，$G(x)<G(1)=-3$，

所以$-4<f(x)_{max}<-3$，所以$m=-4$.

21.（I）解： $A_4:2,1,4,5$. ………3 分

（II）证法一：

证明：由已知，$b_1=a_1-(a_1-a_n)$，$b_2=a_1+a_2-b_1=a_2+(a_1-a_n)$.

因此，猜想$b_i=a_i+(-1)^i(a_1-a_n)$. ………………4 分

① 当$i=1$时，$b_1=a_1-(a_1-a_n)$，猜想成立；

② 假设$i=k\,(k\in\mathbf{N}^*)$时，$b_k=a_k+(-1)^k(a_1-a_n)$.

当$i=k+1$时，$b_{k+1}=a_k+a_{k+1}-b_k$

$$=a_k+a_{k+1}-[a_k+(-1)^k(a_1-a_n)]$$

$$=a_k+a_{k+1}-a_k-(-1)^k(a_1-a_n)$$

$$=a_{k+1}+(-1)^{k+1}(a_1-a_n)$$

故当$i=k+1$时猜想也成立.

由 ①、② 可知，对于任意正整数i，有$b_i=a_i+(-1)^i(a_1-a_n)$. ………………7 分

设数列B_n的“衍生数列”为C_n，则由以上结论可知

$c_i=b_i+(-1)^i(b_1-b_n)=a_i+(-1)^i(a_1-a_n)+(-1)^i(b_1-b_n)$，其中$i=1,2,3,\cdots,n$.

由于n为偶数，所以$b_n=a_n+(-1)^n(a_1-a_n)=a_1$，

所以 $c_i=a_i+(-1)^i(a_1-a_n)+(-1)^i(a_n-a_1)=a_i$，其中$i=1,2,3,\cdots,n$.

因此，数列C_n即是数列A_n. ………………9 分

证法二：

因为 $b_1=a_n$，

$b_1+b_2=a_1+a_2$，

$b_2+b_3=a_2+a_3$，

……

$b_{n-1}+b_n=a_{n-1}+a_n$，

由于n为偶数，将上述n个等式中的第$2,4,6,\cdots,n$这$\frac{n}{2}$个式子都乘以-1，相加得

$$b_1-(b_1+b_2)+(b_2+b_3)-\cdots-(b_{n-1}+b_n)=a_n-(a_1+a_2)+(a_2+a_3)-\cdots-(a_{n-1}+a_n)$$

即$-b_n=-a_1$，$b_n=a_1$. ………………7 分

由于$a_1=b_n$，$a_i=b_{i-1}+b_i-a_{i-1}\ (i=2,3,\cdots,n)$，

根据“衍生数列”的定义知，数列A_n是B_n的“衍生数列”. ………………9 分

（III）证法一：

证明：设数列X_n,Y_n,Z_n中后者是前者的“衍生数列”.欲证Ω_i成等差数列，只需证明x_i,y_i,z_i成等差数列，即只要证明$2y_i=x_i+z_i\ (i=1,2,3,\cdots,n)$即可. ……10 分

由（II）中结论可知 $y_i=x_i+(-1)^i(x_1-x_n)$，

$$\begin{aligned}z_i&=y_i+(-1)^i(y_1-y_n)\\&=x_i+(-1)^i(x_1-x_n)+(-1)^i(y_1-y_n)\\&=x_i+(-1)^i(x_1-x_n)+(-1)^i[x_n-x_n-(-1)^n(x_1-x_n)]\\&=x_i+(-1)^i(x_1-x_n)+(-1)^i(x_1-x_n)\\&=x_i+2(-1)^i(x_1-x_n),\end{aligned}$$

所以，$x_i+z_i=2x_i+2(-1)^i(x_1-x_n)=2y_i$，即 x_i,y_i,z_i 成等差数列，

所以 Ω_i 是等差数列. ………………13 分

证法二：

因为 $b_i=a_{i-1}+a_i-b_{i-1}\ (i=2,3,4,\cdots,n)$，

所以 $b_i-a_i=-(b_{i-1}-a_{i-1})\ (i=2,3,4,\cdots,n)$.

所以欲证 Ω_i 成等差数列，只需证明 Ω_1 成等差数列即可. ………………10 分

对于数列 A_n 及其“衍生数列” B_n，

因为 $b_1=a_n$，

$b_1+b_2=a_1+a_2$，

$b_2+b_3=a_2+a_3$，

……

$b_{n-1}+b_n=a_{n-1}+a_n$，

由于 n 为奇数，将上述 n 个等式中的第 $2,4,6,\cdots,n-1$ 这 $\dfrac{n-1}{2}$ 个式子都乘以 -1，

相加得

$$b_1-(b_1+b_2)+(b_2+b_3)-\cdots+(b_{n-1}+b_n)=a_n-(a_1+a_2)+(a_2+a_3)-\cdots+(a_{n-1}+a_n)$$

即 $b_n=a_n-a_1+a_n=2a_n-a_1$.

设数列 B_n 的“衍生数列”为 C_n，

因为 $b_1=a_n$，$c_1=b_n=2a_n-a_1$，

所以 $2b_1=a_1+c_1$，即 a_1,b_1,c_1 成等差数列.

同理可证，$b_1,c_1,d_1;c_1,d_1,e_1,\cdots$ 也成等差数列.

即 Ω_1 是等差数列.

所以 Ω_i 成等差数列. ………………13 分