

高三数学

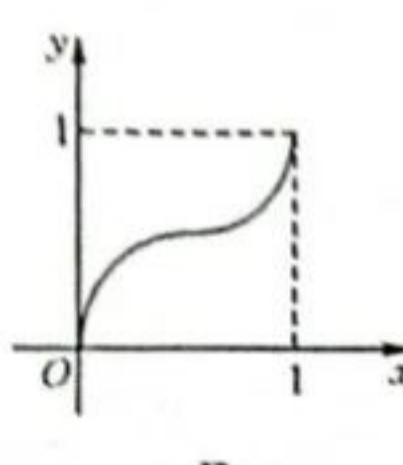
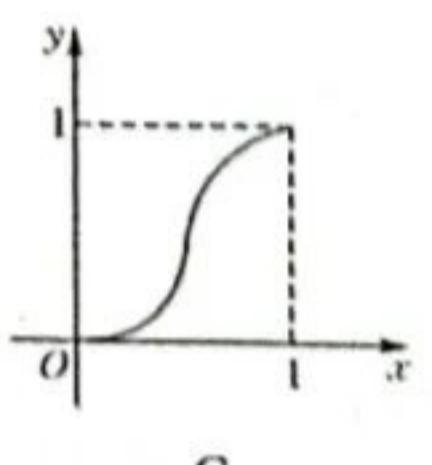
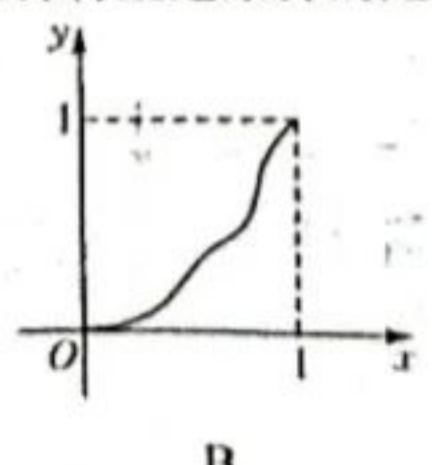
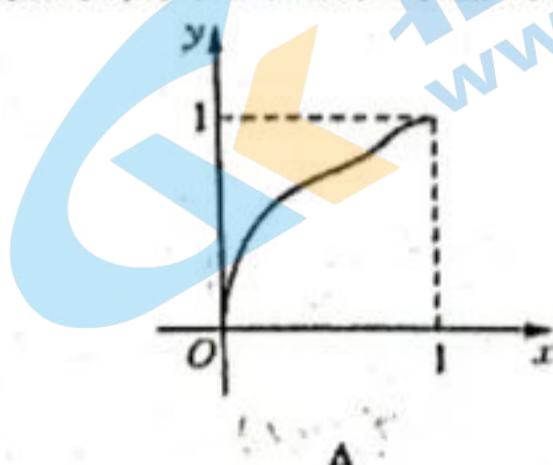
北京高考在线
www.gkaozx.com

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设 $z = \frac{1+i}{i}$ ，则 $|\bar{z}(z+2i)| =$
A. 2 B. 3 C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{3}$
2. 设集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$, $B = \{x | 2^x > 1\}$, 则 $A \cup B =$
A. $(-1, 3)$ B. $(0, 3)$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(-1, 0)$
3. 已知双曲线 $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线方程为 $y = \pm 2\sqrt{2}x$, 则 C 的离心率 $e =$
A. 3 B. $\frac{3}{4}\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
4. 已知 $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$, 则 $\cos 2\alpha =$
A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
5. 若一个二面角的两个半平面分别垂直于另一个二面角的两个半平面，则这两个二面角的大小关系是
A. 相等 B. 互补 C. 相等或互补 D. 不确定
6. 已知 $a = \log_2 2, b = \sin 2, c = e^{-\ln 2}$, 则
A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $b < a < c$ D. $c < a < b$
7. 函数 $y = f(x) (x \in [0, 1])$ 对任意 $a_1 \in (0, 1)$, 由 $a_{n+1} = f(a_n) (n \in \mathbb{N}^*)$ 得到的数列 $\{a_n\}$ 均是单调递增数列，则下列图象对应的函数符合上述条件的是



8. 已知抛物线 C 的焦点为 F , 点 A, B 在抛物线上, 过线段 AB 的中点 M 作抛物线 C 的准线的垂线, 垂足为 N , 以 AB 为直径的圆过点 F , 则 $\frac{|MN|}{|AB|}$ 的最大值为

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. 1

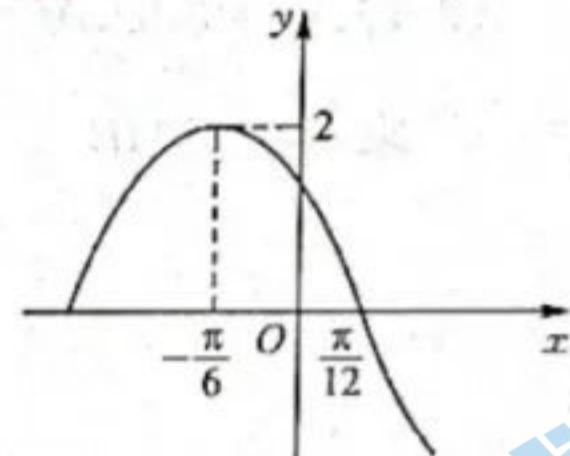
二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 从装有 2 个白球和 3 个红球的袋子中任取 2 个球, 则

- A. “都是红球”与“都是白球”是互斥事件
- B. “至少有一个红球”与“都是白球”是对立事件
- C. “恰有一个白球”与“恰有一个红球”是互斥事件
- D. “至少有一个红球”与“至少有一个白球”是互斥事件

10. 函数 $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则

- A. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 若 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M$ 恒成立, 则 $M \geq 4$
- B. 若 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $x_1 + x_2 = k\pi - \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$
- C. 若 $x_1 + x_2 = \frac{\pi}{6}$, 则 $f(x_1) + f(x_2) = 0$
- D. 若 $x_1, x_2 \in (\frac{\pi}{12}, \frac{7}{12}\pi)$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$ ($x_1 \neq x_2$), 则 $f(x_1 + x_2) = 1$



11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 = 3, a_n \cdot a_{n+1} = 3^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则

- A. $\{a_n\}$ 是等比数列
- B. $\{a_{2n}\}$ 是等比数列
- C. $S_{2022} = 2(3^{1011} - 1)$
- D. $\{a_n\}$ 中存在不相等的三项构成等差数列

12. 若动直线 $l: mx - y + 4 - 4m = 0$ 与圆 $C: (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 9$ 相交于 A, B 两点, 则

- A. $|AB|$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$
- B. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ 的最大值为 -7
- C. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ (O 为坐标原点) 的最大值为 78
- D. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的最大值为 18

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. $(x + 2y)(x - y)^5$ 的展开式中 $x^3 y^3$ 的系数为 _____.

14. 已知 6 个正整数, 它们的平均数是 5, 中位数是 4, 唯一的众数是 3, 则这 6 个数的极差最大时, 方差的值是 _____.

15. 表面积为 Q 的多面体的每一个面都与体积为 36π 的球相切, 则这个多面体的体积为 _____.

16. 已知函数 $f(x) = (a+1)x^2 + (a+2)x \ln x + \ln^2 x$ 有 3 个不同的零点, 则实数 a 的取值范围具
关注北京高考在线官方微信: 北京高考试题(微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

设正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1=1$ 且 $a_n=\frac{2}{3S_n-2a_n-S_{n-1}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$, 且 $n \geq 2$).

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n=\frac{1}{S_{n+1}+S_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本小题满分 12 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $b^2+c^2-a^2=2abs\sin C$.

(1) 求角 A ;

(2) 若 $AB=3\sqrt{2}$, $AC=3$, 点 P 在线段 BC 上, 且 $CP=\frac{1}{3}CB$, Q 是线段 AC 中点, AP 与 BQ 交于点 M ,
求 $\cos \angle AMB$.

19. (本小题满分 12 分)

第 24 届冬季奥林匹克运动会在首都北京举办, 北京成为世界上唯一一个双奥之城. 为了让更多青少年参与、热爱冰雪运动, 某调研机构在全市学生中组织了一次冬奥会相关知识竞赛, 并随机抽取 20 名参赛学生的成绩制成如下频数分布表:

得分	(60,70]	(70,80]	(80,90]	(90,100]
频数	4	5	7	4

规定得分在 $(70,80]$ 为“中等”, 得分在 $(90,100]$ 为“优秀”.

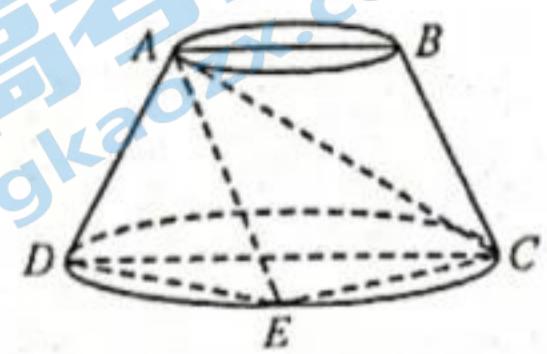
(1) 从“中等”和“优秀”两组学生中随机抽取 4 名学生, 求恰有 2 人是“中等”的概率;

(2) 将 20 名参赛学生的频率视为概率. 现从参赛学生中随机抽取 4 人, 记得分为“优秀”的人数为 X ,
求随机变量 X 的分布列和数学期望.

20.(本小题满分 12 分)

如图, AB, CD 分别是圆台上、下底面的直径, 且 $AB \parallel CD$, 点 E 是下底面圆周上一点, $AB = 2\sqrt{2}$, 圆台的高为 $\sqrt{14}$.

- (1) 证明: 不存在点 E 使平面 $AEC \perp$ 平面 ADE ;
(2) 若 $DE = CE = 4$, 求二面角 $D-AE-B$ 的余弦值.



21.(本小题满分 12 分)

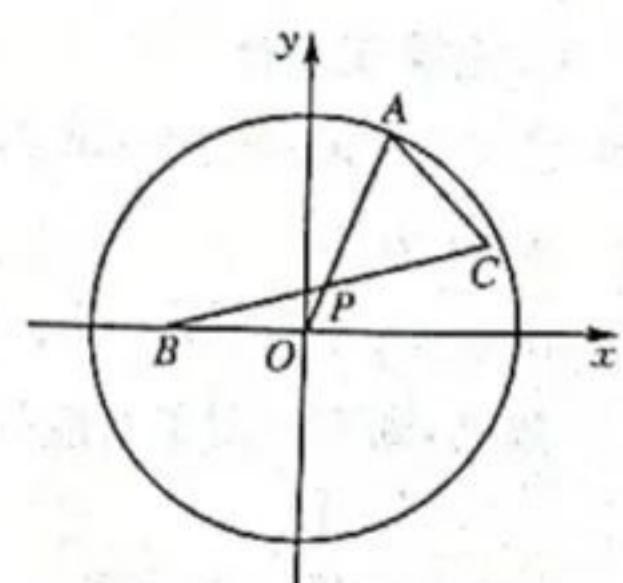
已知 $f(x) = x^2 - x \ln x$.

- (1) 求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程;
(2) 当 $a \in (0, 2e)$ 时, 证明: $2x^2 - (2x+a) \ln x > 0$.

22.(本小题满分 12 分)

如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $B(-2, 0)$, 点 A 在圆 $O: x^2 + y^2 = 9$ 上运动, 点 C 满足: 线段 BC 的中点 P 在线段 OA 上, 且 $PB = PA$. 设 C 点的轨迹为 E .

- (1) 求 E 的方程;
(2) 设 E 与 x 轴的交点分别为 J, K , J 在 K 的左边, 过 $D(-1, 0)$ 与 y 轴不垂直的直线 l 交 E 于 M, N 两点, 若直线 JM, KN 的斜率分别为 k_1, k_2 , 求证: $\frac{k_1}{k_2}$ 为定值.



高三数学参考答案、提示及评分细则

1. A $z = \frac{1+i}{i} = 1-i$, 所以 $|z(z+2i)| = |2i| = 2$. 故选 A.

2. C $A = (-1, 3), B = (0, +\infty)$, 则 $A \cup B = (-1, +\infty)$. 故选 C.

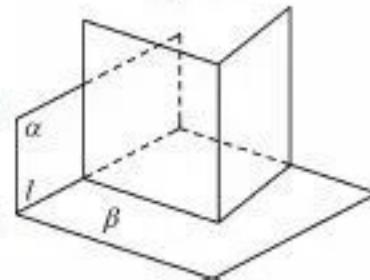
3. B 由题意可知 $\frac{a}{b} = 2\sqrt{2}$, 所以 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. 故选 B.

4. D 法 1: 由 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$, 得 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 两边平方得 $1 + 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}$, 即 $2\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{2}$, 由 $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 再结合 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 的和为正且积为负, 可得 $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$, 所以 $\sin 2\alpha = -\frac{1}{2}, \cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 D.

法 2: 由 $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 得 $\alpha - \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$; 再由 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$, 得 $\alpha - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3}$, 所以 $\alpha = -\frac{\pi}{12}$, 从而 $\cos 2\alpha = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 D.

5. D 如图所示, 当其中一个二面角的棱垂直于另一个二面角的一个半平面 β 时, 二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小可以任意改变, 这两个二面角的大小关系不确定. 故选 D.

6. B $a = \log_2 2 < \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}, e^{-b^2} = \frac{1}{2}$, 因为 $\frac{\pi}{2} < 2 < \frac{5\pi}{6} < \pi$, 函数 $y = \sin x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上单调递减, 所以 $\sin 2 > \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, 即 $\sin 2 > \frac{1}{2} > \log_2 2$. 故选 B.



7. A 因为 $a_{n+1} = f(a_n)$, 所以点 (a_n, a_{n+1}) 在函数 $y = f(x)$ 的图象上, 又 (a_n) 单调递增, $a_{n+1} > a_n$, 即 $f(a_n) > a_n$, 所以点 $(a_n, a_{n+1})(n \in \mathbb{N}^*)$ 始终在直线 $y = x$ 的上方. 对照四个选项, 只有 A 符合. 故选 A.

8. C 设 $|AF| = a, |BF| = b$, 则 $|MN| = \frac{a+b}{2}, |AB| = \sqrt{a^2+b^2}, \frac{|MN|}{|AB|} = \frac{\frac{a+b}{2}}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a+b}{2\sqrt{a^2+b^2}}, \left(\frac{|MN|}{|AB|}\right)^2 = \frac{a^2+b^2+2ab}{4(a^2+b^2)} = \frac{1}{4} + \frac{ab}{2(a^2+b^2)} \leq \frac{1}{2}$ (当且仅当 $a=b$ 且 $AF \perp BF$ 时取等号), 即 $\frac{|MN|}{|AB|}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 C.

9. AB “都是红球”与“都是白球”不能同时发生, 是互斥事件, 故 A 正确; “至少有一个红球”与“都是白球”是对立事件, 故 B 正确; “恰有一个白球”与“恰有一个红球”是相等事件, 非互斥, 故 C 错误; “至少有一个红球”与“至少有一个白球”可能同时发生, 非互斥, 故 D 错误. 故选 AB.

10. ACD 易求得 $f(x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 若 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M$ 恒成立, 即 $f(x)_{\max} - f(x)_{\min} = 4 \leq M$, 故 A 正确; 若 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $\cos\left(2x_1 + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x_2 + \frac{\pi}{3}\right)$, 则 $2x_1 + \frac{\pi}{3} = (2x_2 + \frac{\pi}{3}) + 2k\pi$, 或 $2x_1 + \frac{\pi}{3} = (2x_2 + \frac{\pi}{3}) - 2k\pi$, 这里 $k \in \mathbb{Z}$, 解得 $x_1 - x_2 = k\pi$, 或 $x_1 + x_2 = k\pi - \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. 故 B 错误; 若 $x_1 + x_2 = \frac{\pi}{6}$, 则 $f(x_1) + f(x_2) = f\left(\frac{\pi}{6} - x_2\right) + f(x_2)$, 由 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{12}, 0)$ 对称, 得 $f\left(\frac{\pi}{6} - x_2\right) + f(x_2) = 0$, 故 C 正确; 若 $x_1, x_2 \in (\frac{\pi}{12}, \frac{7}{12}\pi)$, 且 $f(x_1) = f(x_2)(x_1 \neq x_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{2}{3}\pi$, 所以 $f(x_1 + x_2) = f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 2\cos\frac{5}{3}\pi = 1$, 故 D 正确. 故选 ACD.

11. BC 由已知, 得 $a_1 \cdot a_2 = 3$, 所以 $a_1 = 1$, 由 $a_n \cdot a_{n+1} = 3^n(n \in \mathbb{N}^*)$, 得 $\begin{cases} a_n \cdot a_{n+1} = 3^n, \\ a_{n+1} \cdot a_{n+2} = 3^{n+1}, \end{cases}$ 所以 $\frac{a_{n+2}}{a_n} = 3$, 所有奇数项构成等比数列, 所有偶数项也构成等比数列, 公比均为 3. 数列 $\{a_n\}$: 1, 3, 3, 9, 9, ..., 故 A 错误, B 正确; $S_{2022} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2021} + a_{2022} = (a_1 + a_3 + \dots + a_{2021}) + (a_2 + a_4 + \dots + a_{2022}) = \frac{1(3^{1011}-1)}{3-1} + \frac{3(3^{1011}-1)}{3-1} = 2(3^{1011}-1)$, 故 C 正确; 假设 $3^{p-1}, 3^{q-1}, 3^{r-1}(p < q < r)$ 三项构成等差数列, 则 $3^{p-1} + 3^{r-1} = 2 \times 3^{q-1}$, 整理得 $3^{r-p}(2 - 3^{q-p}) = 1$, 因为 $r-p \geq 1, q-p \geq 1$, 该式显然不成立. 故 D 错误. 故选 BC.

12. AB 直线 l 恒过点 $M(4, 4)$, 点 M 在圆 C 内.

对于 A, 当 $MC \perp AB$ 时, $|AB|$ 取最小值, 所以 $|AB|_{\min} = 2\sqrt{|CA|^2 - |CM|^2} = 4\sqrt{2}$, 故 A 正确;

$=-\frac{7}{9}$, 所以 $(\vec{CA} \cdot \vec{CB})_{\max} = 3 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{7}{9}\right) = -7$, 故 B 正确;

对于 C, 设 AB 中点为 D, $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = (\vec{OD} + \vec{DA}) \cdot (\vec{OD} + \vec{DB}) = \vec{OD}^2 - \vec{DA}^2$, 而点 D 在以 MC 为直径的圆 $(x-4)^2 + (y-\frac{9}{2})^2 = \frac{1}{4}$ 上. 设 $D(x, y)$, 则 $\begin{cases} x = 4 + \frac{1}{2} \cos \theta, \\ y = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} \sin \theta \end{cases} (\theta \in [0, 2\pi), \theta \neq \frac{\pi}{2})$, 所以 $\vec{OD}^2 - \vec{DA}^2 = |\vec{OD}|^2 - (|\vec{CA}|^2 - |\vec{CD}|^2) = |\vec{OD}|^2 + |\vec{CD}|^2 - 9 = (4 + \frac{1}{2} \cos \theta)^2 + (\frac{9}{2} + \frac{1}{2} \sin \theta)^2 + (\frac{1}{2} \cos \theta)^2 + (\frac{1}{2} \sin \theta)^2 - 9 = 28 + 4 \cos \theta + 4 \sin \theta = 28 + 4\sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \leq 28 + 4\sqrt{2}$. 故 C 错误;

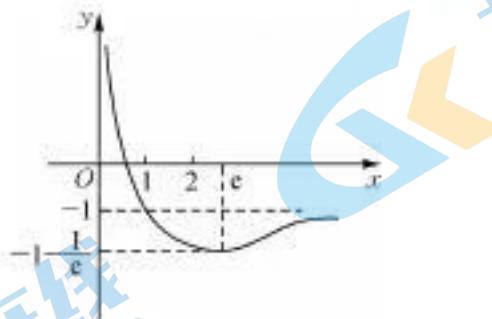
对于 D, $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = |\vec{AC}| \cdot |\vec{AB}| \cos \angle CAB = \frac{1}{2} |\vec{AB}|^2$, 当 AB 过圆心 C 时最大, 但动直线 $l: mx - y + 4 - 4m = 0$ 不包括垂直于 x 轴的直线, 所以 $\vec{AC} \cdot \vec{AB}$ 的最大值不存在. 故 D 错误. 故选 AB.

13. 10 因为 $(x) \cdot C_3^2 x^2 (-y)^3 = -10x^3 \cdot y^3$, $(2y) \cdot C_3^2 x^3 (-y)^2 = 20x^3 y^3$, 所以 $x^3 y^3$ 的系数为 10.

14. $\frac{37}{3}$ 因为 6 个正整数, 它们的平均数是 5, 中位数是 4, 唯一的众数是 3, 要使这 6 个数极差最大, 所以最小数是 1, 若 6 个数中有 3 个 3, 则设数据为 1, 3, 3, 3, d, e , 不满足中位数是 4; 若数据中只有 2 个 3, 设这 6 个数为 1, 3, 3, 5, b, c , 且 $b+c=18$, 又仅有一个众数 3, 所以 $b \geq 5$, 且 $b \in \mathbb{N}^*$, 所以 $b=6$ 时, c 最大, 极差最大, 此时 $c=18-b=12$, 所以方差为 $\frac{1}{6}[(1-5)^2 + (3-5)^2 + (3-5)^2 + (5-5)^2 + (6-5)^2 + (12-5)^2] = \frac{37}{3}$.

15. Q 因为球的体积为 36π , 设球的半径为 R, 则 $\frac{4\pi R^3}{3} = 36\pi$, 解得 $R=3$. 因为表面积为 Q 的多面体的每一个面都与体积为 36π 的球相切, 所以球心到多面体各个面的距离相等且等于球的半径. 所以多面体的体积为 $\frac{1}{3}Q \times 3 = Q$.

16. $(-1 - \frac{1}{e}, -1)$ $f(x) = (a+1)x^2 + (a+2)x \ln x + \ln^2 x$ 有 3 个不同零点, 即方程 $[(a+1)x + \ln x](x + \ln x) = 0$ 有 3 个不同的根, 易知方程 $x + \ln x = 0$ 有唯一一个根 $x_0 \in (\frac{1}{e}, 1)$, 显然 $a=0$ 时不适合, 则 $ax_0 + x_0 + \ln x_0 \neq 0$, 则方程 $ax + x + \ln x = 0$ 有 2 个不同的根即可, 即方程 $a = -1 - \frac{\ln x}{x}$ 有 2 个不同的根, 也即直线 $y=a$ 与曲线 $y=-1 - \frac{\ln x}{x}$ 有 2 个不同交点. 令 $g(x) = -1 - \frac{\ln x}{x}$, 易知 $g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递减, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递增, $g(x)_{\min} = -1 - \frac{\ln e}{e} = -1 - \frac{1}{e}$, 并且当 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow -1$. 画出 $g(x)$ 图象如下:



由图可知, $a \in (-1 - \frac{1}{e}, -1)$, 故实数 a 的取值范围 $(-1 - \frac{1}{e}, -1)$.

17. 解: (1) 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = \frac{2}{3S_n - 2a_n - S_{n-1}} = \frac{2}{3S_n - 2(S_n - S_{n-1}) - S_{n-1}} = \frac{2}{S_n + S_{n-1}}$,
即 $(S_n - S_{n-1}) \cdot (S_n + S_{n-1}) = 2$, 所以 $S_n^2 - S_{n-1}^2 = 2$ 2 分
又 $S_1^2 = a_1^2 = 1$, 所以 $\{S_n^2\}$ 是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列, 故 $S_n^2 = 2(n-1) + 1 = 2n-1$,
所以 $a_n = S_n - S_{n-1} = \sqrt{2n-1} - \sqrt{2n-3}$; 3 分
当 $n=1$, $a_1=1$ 不符合上式. 4 分

所以 $a_n = \begin{cases} 1, & n=1, \\ \sqrt{2n-1} - \sqrt{2n-3}, & n \geq 2. \end{cases}$ 5 分

(2) 关注北京高考在线官方微博: [@北京高考在线](#) (微博号: bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息! 7 分

所以 $T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} + \dots + \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2} = \frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}$ 10 分

18. 解:(1)由余弦定理,得 $b^2+c^2-a^2=2bcc\cos A=2abs\sin C$, 所以 $\cos A=\sin C$. 2分

再由正弦定理,得 $\sin C\cos A=\sin A\sin C$. 4分

因为 $\sin C \neq 0$, 所以 $\tan A=1$, 又 A 是三角形内角, 所以 $A=\frac{\pi}{4}$. 5分

(2)由余弦定理,得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A=18+9-2\times 3\sqrt{2}\times 3\times \frac{\sqrt{2}}{2}=9$,

所以 $BC=3$. 7分

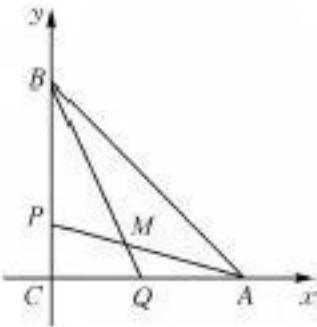
因为 $BC^2+AC^2=3^2+3^2=(3\sqrt{2})^2=AB^2$, 所以 $C=\frac{\pi}{2}$.

以 CA 为 x 轴, CB 为 y 轴建立平面直角坐标系, 则 $P(0,1)$, $Q(\frac{3}{2},0)$, $A(3,0)$, $B(0,3)$, 所以

$\vec{PA}=(3,-1)$, $\vec{QB}=\left(-\frac{3}{2},3\right)$. 10分

$\angle AMB$ 即为 \vec{PA} 与 \vec{QB} 的夹角,

所以 $\cos \angle AMB=\frac{\vec{PA} \cdot \vec{QB}}{|\vec{PA}| \cdot |\vec{QB}|}=\frac{3 \times \left(-\frac{3}{2}\right)+(-1) \times 3}{\sqrt{10} \times \sqrt{\frac{9}{4}+9}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 12分



法二: 用解三角形相关知识, 求出 $\angle ABM$, $\angle BAM$ 的正, 余弦值, 然后利用内角和为 π 转化即可.

19. 解:(1)从“中等”“优秀”两组学生中随机抽 4 名学生, 恰有 2 人是“中等”为事件 A ,

则 $P(A)=\frac{C_2^1 \cdot C_4^3}{C_6^4}=\frac{10}{21}$. 4分

(2)由题意可知, X 的可能取值为 0, 1, 2, 3, 4.

得分为“优秀”的概率 $P_1=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$, 得分不是“优秀”的概率 $P_2=1-P_1=\frac{4}{5}$, X 服从二项分布 $B\left(4, \frac{1}{5}\right)$. 6分

$$P(X=0)=C_4^0\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^4=\frac{256}{625}, P(X=1)=C_4^1\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{256}{625},$$

$$P(X=2)=C_4^2\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{96}{625}, P(X=3)=C_4^3\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^1=\frac{16}{625},$$

$$P(X=4)=C_4^4\left(\frac{1}{5}\right)^4\left(\frac{4}{5}\right)^0=\frac{1}{625}.$$

X 的分布列如下:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{256}{625}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$	$\frac{1}{625}$

10分

故 $E(X)=4 \times \frac{1}{5}=\frac{4}{5}$. 12分

20. (1) 证明: 假设存在点 E 使平面 $AEC \perp$ 平面 ADE , 显然 E 异于 D 或 C .

$\because CD$ 是底面圆的直径, $\therefore CE \perp DE$. 1分

在平面 ADE 中, 过点 D 作 $DM \perp AE$, 垂足为 M , \because 平面 $AEC \perp$ 平面 ADE , 平面 $AEC \cap$ 平面 $ADE=AE$, $\therefore DM \perp$ 平面 ACE , $CE \subset$ 平面 ACE , $\therefore DM \perp CE$. 3分

又 $DM \cap DE=D$, $DM, DE \subset$ 平面 ADE , $\therefore CE \perp$ 平面 ADE . 4分

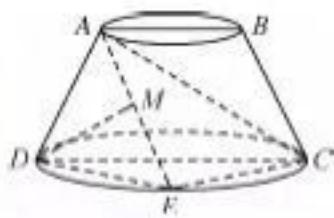
$\because AD \subset$ 平面 ADE , $\therefore CE \perp AD$. 设上、下底面的圆心分别为 O' , O , 则 $O'O \perp CE$, 又 $AD, O'O$ 相交, 所以 $CE \perp$ 平面 $ABCD$, $\therefore CE \perp CD$, 从而 $DE \parallel CD$, 这是不可能的, 故假设不成立,

即不存在点 E 使平面 $AEC \perp$ 平面 ADE . 6分

(2) 解: 设圆台上下底面圆的圆心分别为 O' , O , 如图, 分别以 OE, OC, OO' 所在直线为 x ,

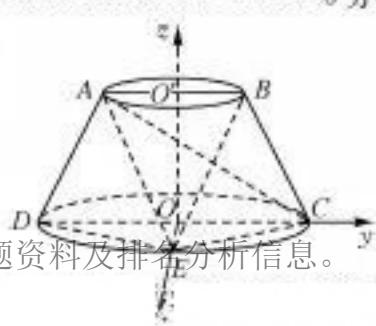
y , z 轴, 建立空间直角坐标系,

由 $DE=CE=4$, 得 $CD=4\sqrt{2}$, 则 $E(2\sqrt{2}, 0, 0)$, $D(0, -2\sqrt{2}, 0)$, $A(0, -\sqrt{2}, \sqrt{14})$, $B(0, \sqrt{2}, \sqrt{14})$, $\therefore \vec{EA}=(-2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{14})$, $\vec{DA}=(0, \sqrt{2}, \sqrt{14})$, $\vec{AB}=(0, 2\sqrt{2}, 0)$.



关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯(微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。设平面 ADE 的法向量 $\vec{m}=(x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{DA} \cdot \vec{m}=\sqrt{2}y+\sqrt{14}z=0, \\ \vec{EA} \cdot \vec{m}=\sqrt{2}y-\sqrt{14}z=0, \end{cases}$

令 $z=1$, 得 $\vec{m}=(\sqrt{7}, -\sqrt{7}, 1)$. 8分



同理得平面 ABE 的法向量 $\mathbf{n} = \left(-\frac{\sqrt{7}}{2}, 0, -1 \right)$, 10 分

$$\therefore \cos(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} = -\frac{3\sqrt{165}}{55}.$$

设二面角 $D-AE-B$ 的大小为 θ , 由图可知 θ 为钝角, 故所求二面角的余弦值为 $-\frac{3\sqrt{165}}{55}$ 12 分

21. (1) 解: $f'(x) = 2x - 1 - \ln x$, $f'(1) = 1$, $f(1) = 1$.

所以所求切线方程为 $y - 1 = 1 \cdot (x - 1)$, 即 $y = x$ 4 分

(2) 证明: x 的取值范围为 $(0, +\infty)$,

由 $2x^2 - (2x+a)\ln x > 0$, 整理得 $x - \ln x > \frac{a \ln x}{2x}$ 6 分

令 $g(x) = x - \ln x$, 则 $g'(x) = \frac{x-1}{x}$, 由 $g'(x) < 0$ 得 $0 < x < 1$, $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减; 由 $g'(x) > 0$ 得 $x > 1$, $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(x) \geq g(1) = 1$ 8 分

令 $h(x) = \frac{a \ln x}{2x}$, $h'(x) = \frac{a(1-\ln x)}{2x^2}$, 因为 $a \in (0, 2e)$, 易得 $h(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $h(x) \leq h(e) = \frac{a}{2e} < 1$ 10 分

所以 $g(x) > h(x)$ 恒成立, 即 $x - \ln x > \frac{a \ln x}{2x}$ 恒成立,

所以当 $a \in (0, 2e)$ 时, $2x^2 - (2x+a)\ln x > 0$ 12 分

22. (1) 解: 因为 $|PA| = |PB|$, 所以 $|OP| + |PB| = |OA| = 3$ 1 分

设 $F(2, 0)$, 连接 CF , 则 O 为 BF 的中点, 所以 $|CB| + |CF| = 2|BP| + 2|OP| = 6 > |BF| = 4$,

根据椭圆的定义可知, 点 C 的轨迹 E 是以 B, F 为焦点, 长轴长为 6 的椭圆. 3 分

设 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 其中 $a = 3$, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5}$,

所以轨迹 E 的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 5 分

(2) 证明: 当 l 的斜率存在时, 设 $l: y = k(x+1) (k \neq 0)$.

联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1, \\ y = k(x+1), \end{cases}$ 化简得 $(9k^2 + 5)x^2 + 18k^2x + 9k^2 - 45 = 0$.

因为点 $D(-1, 0)$ 在椭圆内部, 则直线 l 与 E 一定交于 M, N 两点, 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

则 $x_1 + x_2 = -\frac{18k^2}{9k^2 + 5}$, $x_1 x_2 = \frac{9k^2 - 45}{9k^2 + 5}$ 6 分

而 $J(-3, 0), K(3, 0)$,

则直线 JM 的斜率 $k_1 = \frac{y_1}{x_1 + 3}$, 直线 KN 的斜率 $k_2 = \frac{y_2}{x_2 - 3}$,

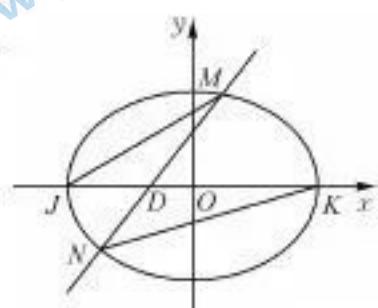
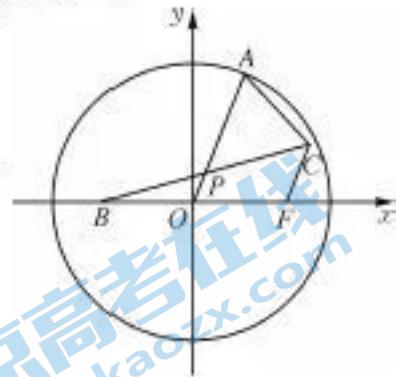
所以 $\frac{k_1}{k_2} = \frac{\frac{y_1}{x_1 + 3}}{\frac{y_2}{x_2 - 3}} = \frac{k(x_1 + 1)(x_2 - 3)}{k(x_2 + 1)(x_1 + 3)} = \frac{x_1 x_2 + x_2 - 3x_1 - 3}{x_1 x_2 + x_1 + 3x_2 + 3}$

$$= \frac{\frac{9k^2 - 45}{9k^2 + 5} + x_2 - 3 \left(-\frac{18k^2}{9k^2 + 5} - x_1 \right) - 3}{\frac{9k^2 - 45}{9k^2 + 5} + \left(-\frac{18k^2}{9k^2 + 5} - x_1 \right) + 3x_2 + 3}$$

$$= \frac{\frac{12(3k^2 - 5)}{9k^2 + 5} + 4x_2}{\frac{9k^2 + 5}{9k^2 + 5} + 2x_2} = 2; 10 分$$

当 l 的斜率不存在时, 可得点 $M\left(-1, \frac{2}{3}\sqrt{10}\right), N\left(-1, -\frac{2}{3}\sqrt{10}\right)$, 或 $N\left(-1, \frac{2}{3}\sqrt{10}\right), M\left(-1, -\frac{2}{3}\sqrt{10}\right)$.

经验注地有 $\frac{k_1}{k_2}$ 为定值 2. 12 分



关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的设计理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力。

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯

官方微博账号: bjgkzx

官方网站: www.gaokzx.com

咨询热线: 010-5751 5980

微信客服: gaokzx2018