2024 北京房山高二（上）期末

数　学

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共 50 分）

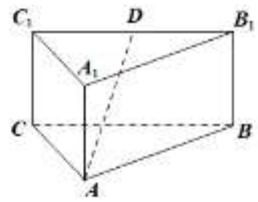
一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）在复平面内，复数 z 对应的点的坐标是 $(-1,\sqrt{3})$，则 z 的共轭复数 $\bar{z}=$

（A）$-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　　（B）$-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

（C）$1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　　（D）$1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

（2）在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 为棱 B_1C_1 的中点. 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，用基底 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 表示向量 $\overrightarrow{AD}$，则 $\overrightarrow{AD}=$



（A）$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　（B）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

（C）$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　（D）$-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

（3）两条直线 $l_1: x-2y-4=0$ 与 $l_2: x-2y+1=0$ 之间的距离是

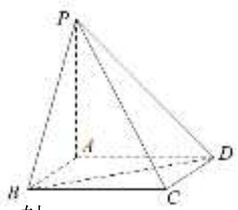
（A）5　　（B）1　　（C）$\sqrt{5}$　　（D）$\frac{3\sqrt{5}}{5}$

（4）设直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{a}$，两个不同的平面 α,β 的法向量分别为 $\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}$，则下列说法中错误的是

（A）若 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{m}$，则 $\alpha\perp\beta$　　（B）若 $\boldsymbol{n}/\!/\boldsymbol{m}$，则 $\alpha/\!/\beta$

（C）若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{n}$，则 $l\perp\alpha$　　（D）若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{n}$，则 $l/\!/\alpha$

（5）如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，$AD=2AB$，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，下列叙述中错误的是



（A）$AB/\!/$ 平面 PCD　　（B）$PB\perp BC$

（C）$PC\perp BD$　　（D）平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$

（6）已知 M 为抛物线 $C: x^2=-2py(p>0)$ 上一点，M 到 C 的焦点 F 的距离为 6，到 x 轴的距离为 4，则 $p=$

（A）6　　（B）4　　（C）2　　（D）1

（7）下列双曲线中以 $y=\pm 2x$ 为渐近线的是

（A）$x^2-\frac{y^2}{4}=1$　　（B）$\frac{x^2}{4}-y^2=1$

(C) $y^2-\dfrac{x^2}{3}=1$　　(D) $y^2-\dfrac{x^2}{4}=1$

(8) 已知点 $A(-1,0)$， $B(1,0)$，若直线 $y=kx-2$ 上存在点 P，使得 $\angle APB=90°$，则实数 k 的取值范围是

(A) $(-\infty,-\sqrt{3}]$　　(B) $[\sqrt{3},+\infty)$

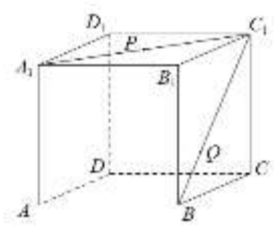
(C) $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$　　(D) $(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty)$

(9) 已知双曲线 Q 与椭圆 $E:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{21}=1$ 有公共焦点，且左、右焦点分别为 F_1， F_2，这两条曲线在第一象限的交点为 P，$\triangle PF_1F_2$ 是以 PF_1 为底边的等腰三角形，则双曲线 Q 的标准方程为

(A) $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$　　(B) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{5}=1$

(C) $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$　　(D) $y^2-\dfrac{x^2}{3}=1$

(10) 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， P 为线段 A_1C_1 的中点， Q 为线段 BC_1 上的动点，
则下列结论正确的是



(A) 存在点 Q，使得 $PQ\parallel BD$　　(B) 存在点 Q，使得 $PQ\perp$ 平面 AB_1C_1D

(C) 三棱锥 $Q-APD$ 的体积是定值　　(D) 存在点 Q，使得 PQ 与 AD 所成角为 $\dfrac{\pi}{6}$

第二部分（非选择题 共 100 分）

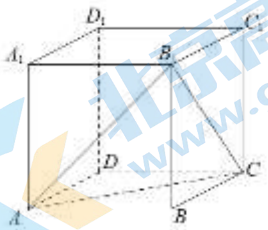
二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

(11) 若直线 $2x+(1-a)y+a=0$ 与直线 $ax+y+2=0$ 垂直，则 a 的值为__.

(12) 复数 $z=(2-\mathrm{i})^2$ 的实部是__.

(13) 已知圆 $C_1:x^2+(y-1)^2=1, C_2:(x-\sqrt{3})^2+y^2=r^2(r>0)$. 则圆 C_1 的圆心坐标为__；若圆 C_1 与圆 C_2 内切，则 $r=$__.

(14) 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 AB_1 与直线 D_1C_1 所成角的大小为__；平面 $ABCD$ 与平面 ACB_1 夹角的余弦值为__.



(15) 已知直线 $l_1:3x-y+1=0,\ l_2:x+y-5=0,\ l_3:x-ay-3=0$，则 l_1 与 l_2 的交点坐标为__；若直线

l_1, l_2, l_3不能围成三角形，写出一个符合要求的实数 a 的值__.

（16）已知曲线 $W_1: x^2+y^2=m$，$W_2: x^4+y^2=m(m>0)$，给出下列四个命题：

①曲线 W_1 关于 x 轴、y 轴和原点对称；

②当 $m=1$ 时，曲线 W_1, W_2 共有四个交点；

③当 $m=2$ 时，曲线 W_2 围成的区域内（含边界）两点之间的距离的最大值是 3；

④当 $0<m<1$ 时，曲线 W_1 围成的区域面积大于曲线 W_2 围成的区域面积．其中所有真命题的序号是__.

三、解答题共 5 小题，共 70 分。 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（17）（本小题 14 分）

已知复数 $z=1-2\mathrm{i}$.

（Ⅰ）求 $|z|$；

（Ⅱ）若 $z_1=\dfrac{z}{3+4\mathrm{i}}$，求 z_1；

（Ⅲ）若 $|z_2|=\sqrt{5}$，且 zz_2 是纯虚数，求 z_2 .

（18）（本小题 13 分）

已知△ABC 的三个顶点分别为 $A(1,3), B(3,1), C(-1,0)$.

（Ⅰ）设线段 AB 的中点为 M，求中线 CM 所在直线的方程；

（Ⅱ）求 AB 边上的高线的长.

（19）（本小题 13 分）

已知直线 $l: y=-x+2$ 与抛物线 $C: y^2=8x$ 相交于 A, B 两点.

（Ⅰ）写出抛物线 C 的焦点坐标和准线方程；

（Ⅱ）求弦长 $|AB|$.

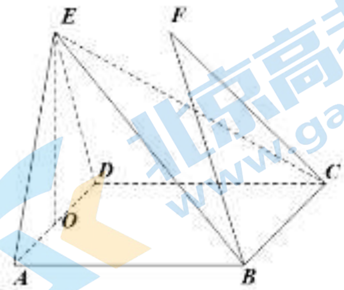
（20）（本小题 15 分）

如图，在五面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 是正方形，$\triangle ADE$ 是等边三角形，平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$，$EF\,//\,AB$，$EF=1, AB=2$，O 是 AD 的中点.

（Ⅰ）求证：$EO\perp$ 平面 $ABCD$；

（Ⅱ）求直线 AB 与平面 BCF 所成角的大小；

（Ⅲ）求三棱锥 $E-BCF$ 的体积.



（21）（本小题 15 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的一个焦点为 $(2,0)$，一个顶点为 $(0,\sqrt{2})$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程和离心率；

（Ⅱ）已知直线 l 与椭圆 C 相切于点 M，直线 l 交 y 轴于点 N，O 为坐标原点，$|OM|=|ON|$，求 $\triangle OMN$ 的面积.

参考答案

一、选择题（每小题 5 分，共 50 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	A	C	D	C	B	A	D	C	B

二、填空题（每小题 5 分，共 30 分）

（11）-1　　（12）3

（13）$(0,1)$；3　（14）45°；$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

（15）$(1,4)$；　答案不唯一（只需写出 $-1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}$ 中的一个即可）　（16）①②③

三、解答题（共 5 小题，共 70 分）

（17）（本小题 14 分）

（Ⅰ）$|z|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$.

（Ⅱ）$z_1=\dfrac{z}{3+4\text{i}}=\dfrac{1-2\text{i}}{3+4\text{i}}=\dfrac{(1-2\text{i})(3-4\text{i})}{(3+4\text{i})(3-4\text{i})}=\dfrac{3-4\text{i}-6\text{i}+8\text{i}^2}{3^2-(4\text{i})^2}=\dfrac{-5-10\text{i}}{25}=-\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}\text{i}$.

（Ⅲ）设 $z_2=a+b\text{i}$，

则 $|z_2|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}$，所以 $a^2+b^2=5$ ①

$zz_2=(1-2\text{i})(a+b\text{i})=(a+2b)+(b-2a)\text{i}$，

因为 zz_2 是纯虚数，所以 $a+2b=0, b-2a\neq 0$ ②

由①②联立，解得 $\begin{cases}a=2\\ b=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2\\ b=1.\end{cases}$

所以 $z_2=2-\text{i}$ 或 $z_2=-2+\text{i}$.

（18）（本小题 13 分）

（Ⅰ）设 M 的坐标为 (x_0,y_0)，则 $x_0=\dfrac{1+3}{2}=2, y_0=\dfrac{3+1}{2}=2$，即 $M(2,2)$.

所以 $k_{MC}=\dfrac{2-0}{2-(-1)}=\dfrac{2}{3}$，

则中线 CM 所在直线方程为 $y=\dfrac{2}{3}(x+1)$，即 $2x-3y+2=0$.

（Ⅱ）$k_{AB}=\dfrac{1-3}{3-1}=-1$.

则直线 AB 的方程为 $y-3=-1(x-1)$，即 $x+y-4=0$

$\triangle ABC$ 中，AB 边上的高线的长就是点 C 到直线 AB 的距离，

所以 $h=\dfrac{|-1+0-4|}{\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

（19）（本小题 13 分）

（Ⅰ）由抛物线 C 的方程可知 $p=4$，抛物线开口向右，

所以 抛物线 C 的焦点坐标为 $(2,0)$，准线方程为 $x=-2$.

（Ⅱ）将 $y=-x+2$ 代入 $y^2=8x$，整理得 $x^2-12x+4=0$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=12, x_1x_2=4$，所以

$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{2(x_1-x_2)^2}$$
$$=\sqrt{2}\times\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$
$$=\sqrt{2}\times\sqrt{12^2-4\times4}$$
$$=16$$

（20）（本小题 15 分）

（Ⅰ）因为 $\triangle ADE$ 是等边三角形，O 是 AD 的中点，

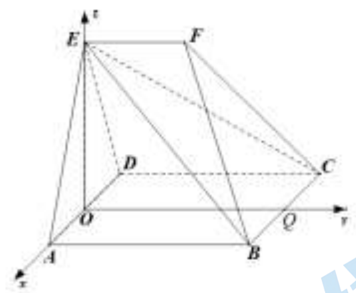
所以 $EO\perp AD$，且 $EO=\sqrt{3}$.

又平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $ADE\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

所以 $EO\perp$ 平面 $ABCD$.

（Ⅱ）记 BC 的中点为 Q，易知 EO,OA,OQ 两两互相垂直，

以 O 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$.



则 $A(1,0,0),B(1,2,0),C(-1,2,0),E(0,0,\sqrt{3}),F(0,1,\sqrt{3})$，

所以 $\overrightarrow{CB}=(2,0,0),\overrightarrow{BF}=(-1,-1,\sqrt{3}),\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$.

设平面 BCF 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0.\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}2x=0,\\ -x-y+\sqrt{3}z=0.\end{cases}$

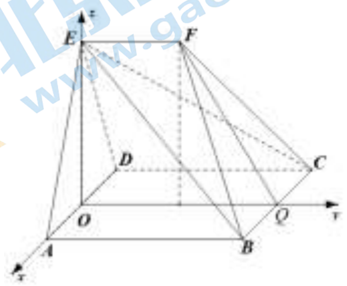
令 $z=1$，得 $y=\sqrt{3}$，此时 $\vec{n}=(0,\sqrt{3},1)$.

设直线 AB 与平面 BCF 所成角为 θ，则

$$\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{AB},\vec{n}>|=\left|\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{AB}||\vec{n}|}\right|=\left|\frac{0\times0+2\times\sqrt{3}+0\times1}{2\times\sqrt{0+3+1}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

所以直线 AB 与平面 BCF 所成角为 $\frac{\pi}{3}$.

（Ⅲ）设点 E 到平面 BCF 的距离为 h，



则 $h=\left|\frac{\overrightarrow{EF}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|=\left|\frac{0\times0+1\times\sqrt{3}+0\times1}{\sqrt{0+3+1}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由平面几何知识，易知在直角梯形 $EFQO$ 中 $QF=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，

所以 $V_{E-BCF}=\frac{1}{3}S_{\Delta BCF}h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times BC\times FQ\times h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

（21）（本小题 15 分）

（Ⅰ）由题意可得 $c=2,b=\sqrt{2}$，

所以 $a^2=c^2+b^2=6$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$.

离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

（Ⅱ）易知直线 l 斜率存，

设直线 l 的方程为 $y=kx+m$，代入椭圆方程 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$，整理得

$$(1+3k^2)x^2+6kmx+3m^2-6=0.$$

因为 直线 l 与椭圆 C 有唯一交点 M，

所以 $\Delta=(6km)^2-4(1+3k^2)(3m^2-6)=0$.

整理得 $m^2-6k^2-2=0$.

设 $M(x_0,y_0)$，则 $2x_0=-\frac{6km}{1+3k^2}$，

所以 $x_0=-\frac{3km}{1+3k^2}$，$y_0=kx_0+m=-\frac{3k^2m}{1+3k^2}+m=\frac{m}{1+3k^2}$.

因为 $|OM|=|ON|$，

所以 $(-\frac{3km}{1+3k^2})^2+(\frac{m}{1+3k^2})^2=m^2$.

整理得 $k^2=\frac{1}{3}$.

所以 $m^2=6k^2+2=4$.

所以 $S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}|ON|\times|x_0|=\frac{1}{2}\times\frac{3km^2}{1+3k^2}=\frac{1}{2}\times\frac{3\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times 4}{1+3\times\frac{1}{3}}=\sqrt{3}$.