秘密★启用前　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　试卷类型：B

广州市2020届高三年级阶段训练题

理科数学

本试卷共5页，23小题，满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名和考生号、试室号、座位号填写在答题卡上，并用2B铅笔在答题卡的相应位置填涂考生号，并将试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上。

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。写在本试卷上无效。

3．作答填空题和解答题时，必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4．考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知复数z满足$(1+\mathrm{i})\ z=2\mathrm{i}$，则$|z|=$

A. $\sqrt{2}$　　B. 1　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

2. 已知集合$A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{x|x=n^2-1,n\in A\}$，$P=A\cap B$，则P的子集共有

A. 2个　　B. 4个　　C. 6个　　D. 8个

3. $\sin 80^\circ\cos 50^\circ+\cos 140^\circ\sin 10^\circ=$

A. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

4. 已知命题p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+1<0$；命题 q：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2>2^x$，则下列命题中为真命题的是

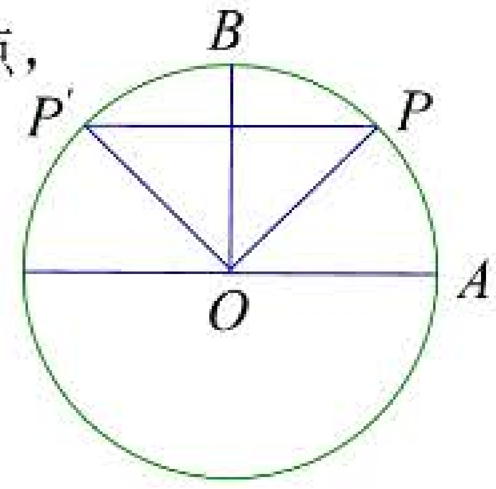
A. $p\wedge q$　　B. $\neg p\wedge q$　　C. $p\wedge\neg q$　　D. $\neg p\wedge\neg q$

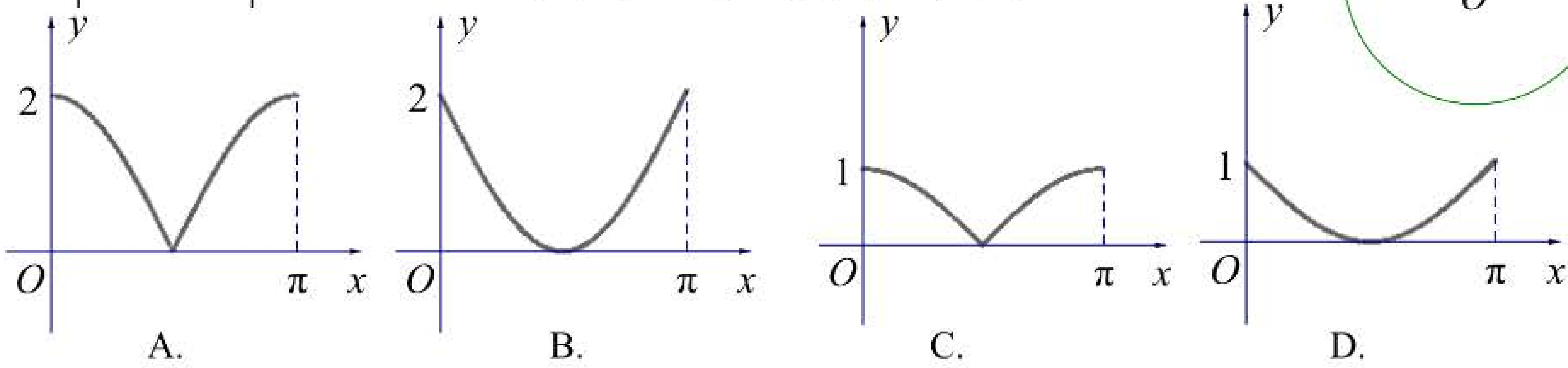
5. 已知函数$f(x)$满足$f(1-x)=f(1+x)$，当$x\geq 1$时，$f(x)=x-\dfrac{2}{x}$，则$\{x|f(x+2)>1\}=$

A. $\{x|x<-3或x>0\}$　　B. $\{x|x<0或x>2\}$

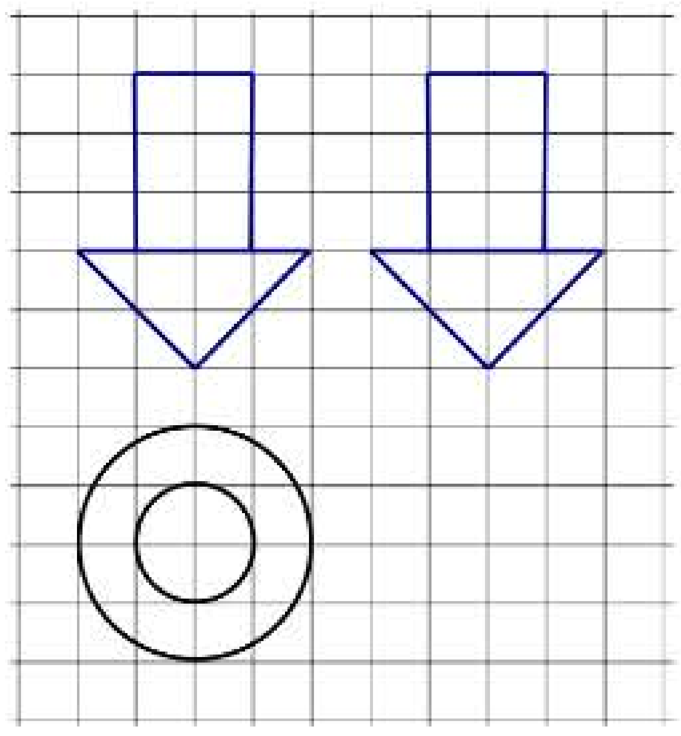
C. $\{x|x<-2或x>0\}$　　D. $\{x|x<2或x>4\}$

6. 如图，圆O的半径为1，A，B是圆上的定点，$OB\perp OA$，P是圆上的动点，点P关于直线OB的对称点为P'，角x的始边为射线OA，终边为射线OP，将$\left|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP'}\right|$表示为$x$的函数$f\left(x\right)$，则$y=f\left(x\right)$在$\left[0,\pi\right]$上的图像大致为





7. 陀螺是中国民间最早的娱乐工具，也称陀罗. 如图，网格纸上小正方形的边长为1，粗线画出的是某个陀螺的三视图，则该陀螺的表面积为



A. $\left(7+2\sqrt{2}\right)\pi$　　B. $\left(10+2\sqrt{2}\right)\pi$

C. $\left(10+4\sqrt{2}\right)\pi$　　D. $\left(11+4\sqrt{2}\right)\pi$

8. 某人造地球卫星的运行轨道是以地心为一个焦点的椭圆， 其轨道的离心率为e，设地球半径为R，该卫星近地点离地面的距离为r，则该卫星远地点离地面的距离为

A. $\dfrac{1+e}{1-e}r+\dfrac{2e}{1-e}R$　　B. $\dfrac{1+e}{1-e}r+\dfrac{e}{1-e}R$

C. $\dfrac{1-e}{1+e}r+\dfrac{2e}{1+e}R$　　D. $\dfrac{1-e}{1+e}r+\dfrac{e}{1+e}R$

9. 羽毛球混合双打比赛每队由一男一女两名运动员组成. 某班级从3名男生A_1，A_2，A_3和3名女生B_1，B_2，B_3中各随机选出两名，把选出的4人随机分成两队进行羽毛球混合双打比赛，则A_1和B_1两人组成一队参加比赛的概率为

A. $\dfrac{1}{9}$　　B. $\dfrac{2}{9}$　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{4}{9}$

10. 已知F_1，F_2是双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1\left(a>0\right)$的两个焦点，过点$F_1$且垂直于$x$轴的直线与$C$相交于$A$，$B$两点，若$\left|AB\right|=\sqrt{2}$，则$\triangle ABF_2$的内切圆的半径为

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

11. 已知函数$f\left(x\right)$的导函数为$f'\left(x\right)$，记$f_1\left(x\right)=f'\left(x\right)$，$f_2\left(x\right)=f_1'\left(x\right)$，…，

$f_{n+1}\left(x\right)=f_n'\left(x\right)$ $(n\in \mathbf{N}^*)$. 若$f\left(x\right)=x\sin x$，则$f_{2019}\left(x\right)+f_{2021}\left(x\right)=$

A. $-2\cos x$　　B. $-2\sin x$　　C. $2\cos x$　　D. $2\sin x$

12. 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为2，E，F，G分别是棱AD，CC_1，C_1D_1的中点，给出下列四个命题:

① $EF\perp B_1C$；

② 直线FG与直线A_1D所成角为60°；

③ 过E，F，G三点的平面截该正方体所得的截面为六边形;

④ 三棱锥$B-EFG$的体积为$\dfrac{5}{6}$.

其中，正确命题的个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 设向量$\boldsymbol{a}=\left(m,1\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(2,1\right)$，且$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2\right)$，则$m=$________.

14. 某种产品的质量指标值Z服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，且$P(\mu-3\sigma<Z<\mu+3\sigma)=0.9974$.

某用户购买了10000件这种产品，则这10000件产品中质量指标值位于区间$(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$之外的产品件数为________.

15. $\left(3x^2-2x-1\right)^5$的展开式中，x^2的系数是________. (用数字填写答案)

16. 已知△ABC的三个内角为A，B，C，且$\sin A$，$\sin B$，$\sin C$成等差数列，则$\sin 2B+2\cos B$的最小值为________，最大值为________. （第1空2分，第2空3分）

三、解答题：共70分. 解答应写出文字说明、证明过程和演算步骤. 第17～21题为必考题，每个试题考生都必须做答. 第22、23题为选考题，考生根据要求做答.

（一）必考题：共60分.

17. (12分)

记S_n为数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和，$2S_n-a_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}$ $(n\in \mathbf{N}^*)$.

（1）求a_n+a_{n+1}；

（2）令$b_n=a_{n+2}-a_n$，证明数列$\left\{b_n\right\}$是等比数列，并求其前n项和T_n.

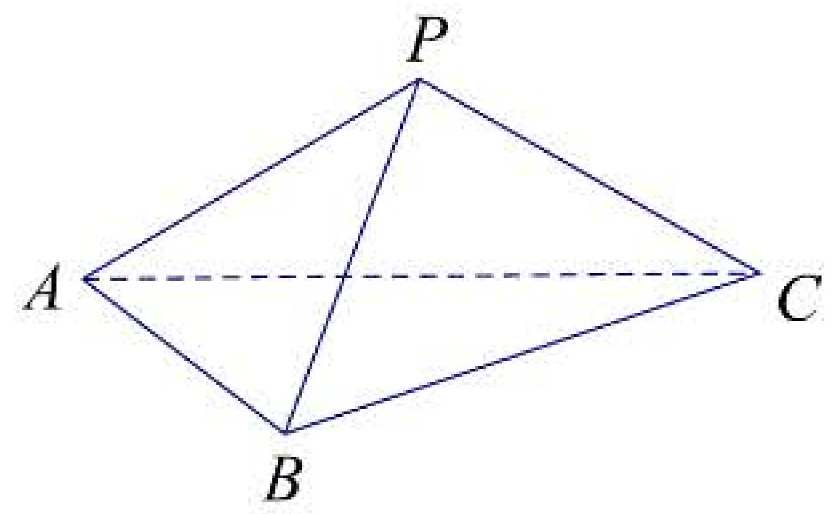
18. (12 分)

如图，三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=PC$，$AB=BC$，$\angle APC=120^\circ$，$\angle ABC=90^\circ$，

$AC=\sqrt{3}PB$.

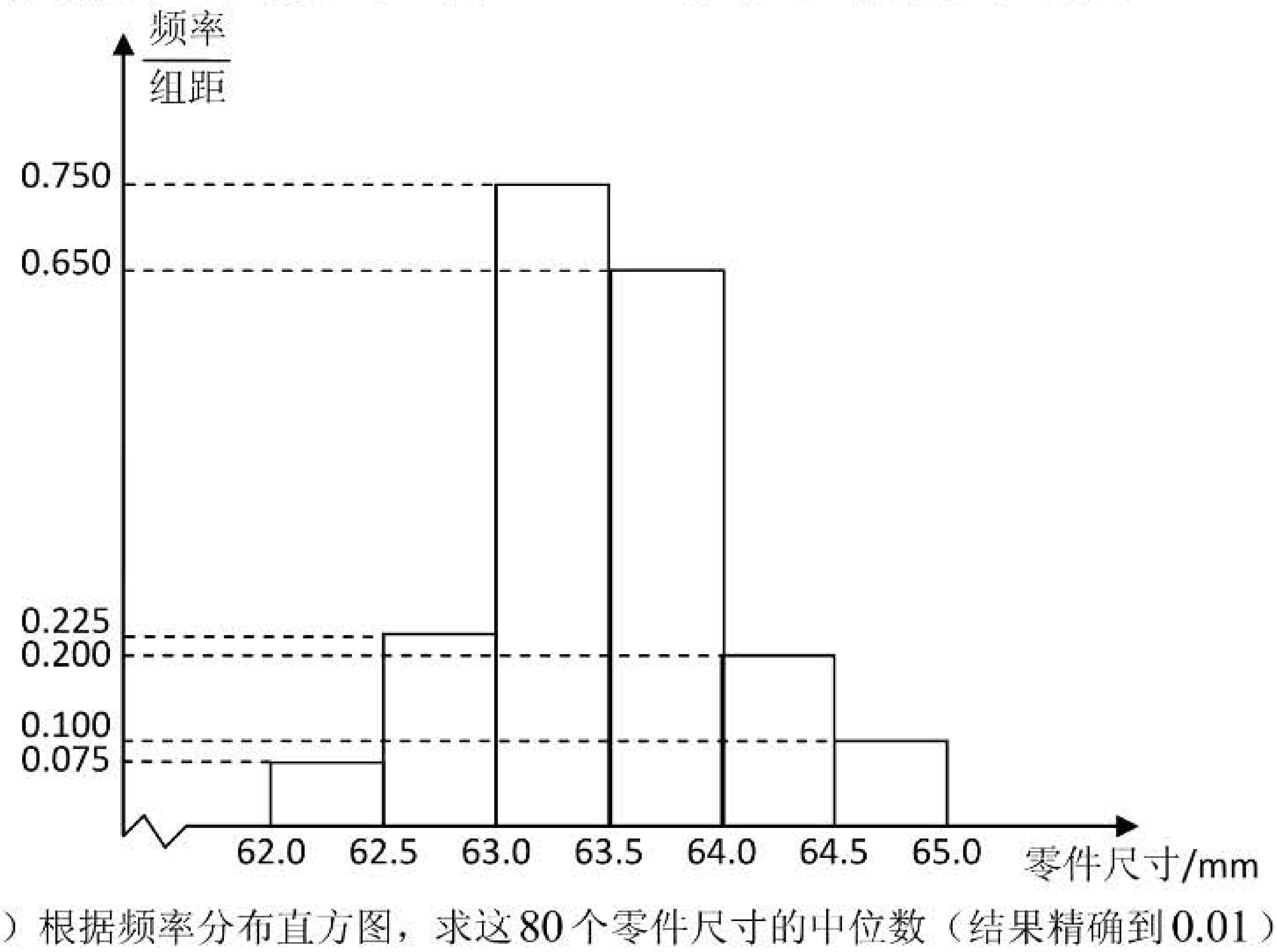
（1）求证：$AC\perp PB$；

（2）求直线 AC 与平面 PAB 所成角的正弦值.



19. (12 分)

某企业质量检验员为了检测生产线上零件的质量情况，从生产线上随机抽取了80个零件进行测量，根据所测量的零件尺寸（单位：mm），得到如下的频率分布直方图：



（1）根据频率分布直方图，求这80个零件尺寸的中位数（结果精确到0.01）；

（2）若从这80个零件中尺寸位于$[62.5,64.5)$之外的零件中随机抽取4个，设 X 表示尺寸在$[64.5,65]$上的零件个数，求 X 的分布列及数学期望 EX；

（3）已知尺寸在$[63.0,64.5)$上的零件为一等品，否则为二等品，将这80个零件尺寸的样本频率视为概率. 现对生产线上生产的零件进行成箱包装出售，每箱100个. 企业在交付买家之前需要决策是否对每箱的所有零件进行检验，已知每个零件的检验费用为99元. 若检验，则将检验出的二等品更换为一等品；若不检验，如果有二等品进入买家手中，企业要向买家对每个二等品支付500元的赔偿费用. 现对一箱零件随机抽检了11个，结果有1个二等品，以整箱检验费用与赔偿费用之和的期望值作为决策依据，该企业是否对该箱余下的所有零件进行检验？请说明理由.

20. (12 分)

已知函数 $f\left(x\right)=a\ln x-\dfrac{be^{x}}{x}$，曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程为

$2x-y-2-\mathrm{e}=0$.

（1）求 a，b 的值；

（2）证明函数 $f\left(x\right)$ 存在唯一的极大值点 x_0，且 $f\left(x_0\right)<2\ln 2-2$.

21. (12 分)

已知点 P 是抛物线 $C:y=\dfrac{1}{4}x^2-3$ 的顶点，A，B 是 C 上的两个动点，且 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-4$.

（1）判断点 $D\left(0,1\right)$ 是否在直线 AB 上？说明理由；

（2）设点 M 是△PAB 的外接圆的圆心，点 M 到 x 轴的距离为 d，点 $N\left(1,0\right)$，

求 $\left|MN\right|-d$ 的最大值.

（二）选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4：坐标系与参数方程] (10 分)

已知曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=1+t\sin\alpha,\end{cases}$ (t 为参数)， 曲线 C_2 的参数方程为

$\begin{cases}x=\sin\theta,\\ y=\sqrt{1+\cos 2\theta},\end{cases}$ (θ 为参数).

（1）求 C_1 与 C_2 的普通方程；

（2）若 C_1 与 C_2 相交于 A，B 两点，且 $\left|AB\right|=\sqrt{2}$，求 $\sin\alpha$ 的值.

23. [选修 4-5：不等式选讲] (10 分)

已知 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=1$.

（1）求 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}$ 的最小值；

（2）证明：$\dfrac{ab+2b}{a^2+b^2+1}<\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

广州市 2020 届高三年级阶段训练题

理科数学试题参考答案及评分标准

评分说明:

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则.

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

4．只给整数分数．选择题不给中间分.

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	D	B	C	A	C	A	B	B	D	C

二、填空题

13. 2　　14. 26　　15. -25　　16. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$，$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

三、解答题

17. (12 分)

（1） **解**: 因为 $2S_n-a_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}$，　①

所以 $2S_{n+1}-a_{n+1}=\dfrac{1}{2^n}$．　② ……………………………………1 分

②$-$①得 $2\left(S_{n+1}-S_n\right)-a_{n+1}+a_n=\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{2^{n-1}}$， ……………………………………2 分

即 $2a_{n+1}-a_{n+1}+a_n=-\dfrac{1}{2^n}$， ……………………………………3 分

所以 $a_n+a_{n+1}=-\dfrac{1}{2^n}$． ……………………………………4 分

（2）**解法 1**: 由 $b_n=a_{n+2}-a_n$

$=a_{n+2}+a_{n+1}-a_{n+1}-a_n$ ……………………………………5 分

$=\left(a_{n+2}+a_{n+1}\right)-\left(a_{n+1}+a_n\right)$ ……………………………………6 分

$=-\dfrac{1}{2^{n+1}}+\dfrac{1}{2^n}$ ……………………………………7 分

$=\dfrac{1}{2^{n+1}}$． ……………………………………8 分

得 $b_1=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}$. ……………………………………………9 分

因为 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{\dfrac{1}{2^{n+2}}}{\dfrac{1}{2^{n+1}}}=\dfrac{1}{2}$, ……………………………………………10 分

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 $\dfrac{1}{4}$ 为首项，公比为 $\dfrac{1}{2}$ 的等比数列. ……………………………11 分

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $T_n=\dfrac{\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$. ……………………………12 分

解法 2:由 $a_n+a_{n+1}=-\dfrac{1}{2^n}$，得 $a_{n+1}+\dfrac{1}{3\times 2^n}=-\left(a_n+\dfrac{1}{3\times 2^{n-1}}\right)$,……………………………5 分

所以数列 $\left\{a_n+\dfrac{1}{3\times 2^{n-1}}\right\}$ 是公比为 -1 的等比数列. ……………………………6 分

由 $2S_1-a_1=\dfrac{1}{2^0}=1$，得 $a_1=1$,

则 $a_n+\dfrac{1}{3\times 2^{n-1}}=\left(a_1+\dfrac{1}{3\times 2^0}\right)\cdot(-1)^{n-1}$,

所以 $a_n=\dfrac{4}{3}\times(-1)^{n-1}-\dfrac{1}{3\times 2^{n-1}}$. ……………………………………………7 分

故 $b_n=a_{n+2}-a_n$

$=\dfrac{4}{3}\times(-1)^{n+1}-\dfrac{1}{3\times 2^{n+1}}-\dfrac{4}{3}(-1)^{n-1}+\dfrac{1}{3\times 2^{n-1}}$

$=\dfrac{1}{2^{n+1}}$. ……………………………………………8 分

得 $b_1=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}$. ……………………………………………9 分

因为 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{\dfrac{1}{2^{n+2}}}{\dfrac{1}{2^{n+1}}}=\dfrac{1}{2}$, ……………………………………………10 分

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 $\dfrac{1}{4}$ 为首项，公比为 $\dfrac{1}{2}$ 的等比数列. ……………………………11 分

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $T_n=\dfrac{\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$. ……………………………12 分

18.（12 分）

（1）**证明**: 取 AC 的中点 O，连接 PO， BO，

因为 $PA=PC$，所以 $PO\perp AC$． ……………………………………………1 分

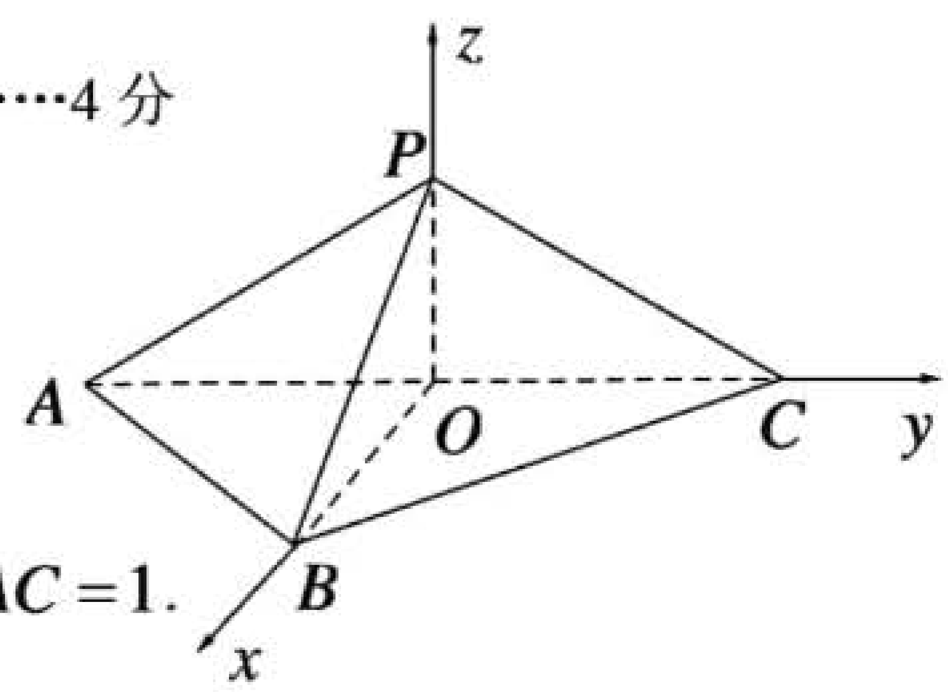
因为 $AB=BC$，所以 $BO\perp AC$． ……………………………………………2 分

因为 $PO\cap BO=O$， $PO\subset$ 平面 POB， $BO\subset$ 平面 POB，

所以 $AC\perp$ 平面 POB．……………………………3 分

因为 $PB\subset$ 平面 POB，

所以 $AC\perp PB$．……………………………………4 分



（2）**解法 1**：不妨设 $AC=2$，

因为 $AC=\sqrt{3}PB$，则 $PB=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$．

因为 $AB=BC$，$\angle ABC=90^\circ$，则 $BO=AO=\dfrac{1}{2}AC=1$．

因为 $PA=PC$，$\angle APC=120^\circ$，则 $\angle APO=60^\circ$．

在 Rt△ POA 中，$PO=\dfrac{AO}{\tan 60^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$， ……………………………………………5 分

因为 $BO^2+PO^2=\dfrac{4}{3}=PB^2$，

所以 $PO\perp BO$． ……………………………………………6 分

因为 $PO\perp AC$， $AC\cap BO=O$， $AC\subset$ 平面 ABC， $BO\subset$ 平面 ABC，

所以 $PO\perp$ 平面 ABC． ……………………………………………7 分

如图，以 O 为坐标原点，OB 为 x 轴，OC 为 y 轴，OP 为 z 轴，建立空间直角坐标系 $O-xyz$．

则 $A(0,-1,0)$， $B(1,0,0),C(0,1,0),P\left(0,0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$，

$\overrightarrow{AB}=(1,1,0),\overrightarrow{AP}=\left(0,1,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right),\overrightarrow{AC}=(0,2,0)$． ……………………………8 分

设平面 PAB 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$， $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$，得 $\begin{cases}x+y=0,\\ y+\dfrac{\sqrt{3}}{3}z=0,\end{cases}$

令 $z=\sqrt{3}$，则 $y=-1,x=1$．

故平面 PAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,-1,\sqrt{3})$． ……………………………………9 分

则 $\cos\left\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{AC}\right\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\boldsymbol{n}|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{-2}{2\times\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ……………………………………10 分

记直线 AC 与平面 PAB 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{AC}\right\rangle\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ……………………………………11 分

所以直线 AC 与平面 PAB 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ……………………………………12 分

解法 2： 作 $AD\perp PB$ 于 D，连接 CD，

根据题意，得 $\triangle ABP\cong\triangle CBP$，

则 $CD\perp PB$， $AD=CD$. ……………………………………5 分

因为 $AD\cap CD=D$， $AD\subset$ 平面 ACD， $CD\subset$ 平面 ACD，

所以 $PB\perp$ 平面 ACD. ……………………………………6 分

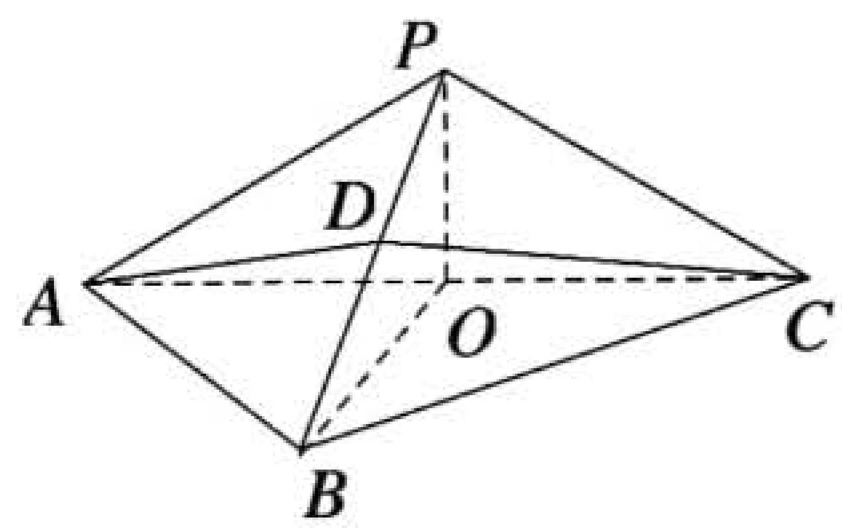
因为 $PB\subset$ 平面 PAB，

所以平面 $PAB\perp$ 平面 ACD. ……………………………………7 分

则 AD 是直线 AC 在平面 PAB 上的射影.

所以 $\angle CAD$ 为直线 AC 与平面 PAB 所成角. ……………………………………8 分

不妨设 $AC=2$，



因为 $AC=\sqrt{3}PB$，则 $PB=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

因为 $AB=BC$，$\angle ABC=90^\circ$，则 $AB=\sqrt{2}$， $AO=1$.

因为 $PA=PC$，$\angle APC=120^\circ$，则 $\angle PAO=30^\circ$.

在 Rt$\triangle POA$ 中， $PA=\dfrac{AO}{\cos 30^\circ}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

故 $PA=PB=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

则 $\triangle ABP$ 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot\sqrt{PA^2-\left(\dfrac{1}{2}AB\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{6}$，

又 $S=\dfrac{1}{2}\cdot PB\cdot AD$，即 $\dfrac{\sqrt{15}}{6}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cdot AD$，得 $AD=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. ……………………9 分

在 $\triangle ACD$ 中， $CD=AD=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$， $AC=2$，

则 $\cos\angle CAD=\dfrac{AC^2+AD^2-CD^2}{2\cdot AC\cdot AD}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$， ……………………………………10 分

故 $\sin\angle CAD=\sqrt{1-\cos^2\angle CAD}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. ……………………………………11 分

所以直线 AC 与平面 PAB 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$. ……………………………………12 分

19. (12 分)

(1) **解**：由于 $[62.0,63.0)$ 内的频率为 $(0.075+0.225)\times0.5=0.15$，

$[63.0,63.5)$ 内的频率为 $0.75\times0.5=0.375$，

得 $0.15+0.375=0.525>0.5$，

令这 80 个零件尺寸的中位数为 x，则 $x\in[63.0,63.5)$，……………………………1 分

即有 $0.15+(x-63)\times0.75=0.5$，

解得 $x\approx63.47$.

故这 80 个零件尺寸的中位数为 63.47. ……………………………2 分

(2) **解**：从频率分布直方图中可得尺寸在 $[62.5,64.5)$ 之外的零件共有 7 个，其中尺寸位于 $[62.0,62.5)$ 上的共有 3 个，位于 $[64.5,65]$ 上的共有 4 个，

则 X 的所有可能取值为 $1,2,3,4$， ……………………………………3 分

$P(X=1)=\frac{C_3^3C_4^1}{C_7^4}=\frac{4}{35}$， $P(X=2)=\frac{C_3^2C_4^2}{C_7^4}=\frac{18}{35}$， ……………………………………4 分

$P(X=3)=\frac{C_3^1C_4^3}{C_7^4}=\frac{12}{35}$， $P(X=4)=\frac{C_3^0C_4^4}{C_7^4}=\frac{1}{35}$， ……………………………5 分

则 X 的分布列为：

X	1	2	3	4
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

……………………………………6 分

所以 $EX=1\times\frac{4}{35}+2\times\frac{18}{35}+3\times\frac{12}{35}+4\times\frac{1}{35}=\frac{16}{7}$. ……………………………………7 分

(3) **解**：根据频率分布直方图，每个零件是二等品的概率为

$P=(0.075+0.225+0.100)\times0.5=0.2$. ……………………………………8 分

设余下的 89 个零件中的二等品的个数为 Y，依题意知 $Y\sim B(89,0.2)$，

所以 $EY=89\times0.2=17.8$. ……………………………………9 分

若不对余下的零件作检验，设检验费用与赔偿费用之和为 S，

则$S=11\times99+500Y=1089+500Y$.

若对余下的零件作检验，则这一箱零件所需要的检验费用为9900元. ………………10分

若不对余下的零件作检验，则检验费用与赔偿费用之和的期望值为

$ES=1089+500EY=9989$. ………………………………………11分

(本问题从下面两方面回答都合理，都给满分)

① 因为$ES>9900$，所以应该对余下的零件作检验.………………………………12分

② 由于$ES=9989$与9900相差不大，又因为对余下零件检验要投入大量人力和物力，

所以对余下的零件不作检验. ………………………………………12分

20.（12分）

（1）**解**：函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

由$f(x)=a\ln x-\dfrac{be^x}{x}$，得$f'(x)=\dfrac{a}{x}-\dfrac{b\left(xe^x-e^x\right)}{x^2}$， ……………………………1分

则$f'(1)=a$，$f(1)=-be$.

故曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y+be=a(x-1)$，

即$ax-y-a-be=0$. ………………………………………2分

因为曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$2x-y-2-\mathrm{e}=0$，

所以$a=2$，$b=1$. ………………………………………4分

（2）**证法1:** 由(1)知$f(x)=2\ln x-\dfrac{e^x}{x}$，

则$f'(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{\left(xe^x-e^x\right)}{x^2}=\dfrac{2x-xe^x+e^x}{x^2}$.

令$g(x)=2x-xe^x+e^x\ (x>0)$，得$g'(x)=2-\left(e^x+xe^x\right)+e^x=2-xe^x$，

则$g'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.

由于$g'(0)=2>0$，$g'(1)=2-e<0$，

则存在$x_1\in(0,1)$，使得$g'(x_1)=0$. ………………………………5分

当$x\in(0,x_1)$时，$g'(x)>0$；当$x\in(x_1,+\infty)$时，$g'(x)<0$.

故$g(x)$在$(0,x_1)$上单调递增，在$(x_1,+\infty)$上单调递减.

由于 $g(0)=1>0$，$g(1)=2>0$，$g(2)=4-e^2<0$，

故存在 $x_0\in(1,2)$，使得 $g(x_0)=0$， ……………………………………………6 分

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g(x)>0$，则 $f'(x)>0$；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g(x)<0$，则 $f'(x)<0$.

故函数 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减. ……………………7 分

故函数 $f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0. ……………………………………………8 分

由于 $g(x_0)=0$，即 $2x_0-x_0e^{x_0}+e^{x_0}=0$，得 $e^{x_0}=\dfrac{2x_0}{x_0-1}$，$x_0\in(1,2)$，

则 $f(x_0)=2\ln x_0-\dfrac{e^{x_0}}{x_0}=2\ln x_0-\dfrac{2}{x_0-1}$. ……………………………………………9 分

令 $h(x)=2\ln x-\dfrac{2}{x-1}$，$1<x<2$，

则 $h'(x)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{(x-1)^2}>0$.

故函数 $h(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增. ……………………………………………10 分

由于 $1<x_0<2$，则 $h(x_0)<h(2)=2\ln 2-2$. ……………………………………………11 分

即 $2\ln x_0-\dfrac{2}{x_0-1}<2\ln 2-2$.

所以 $f(x_0)<2\ln 2-2$. ……………………………………………12 分

证法 2: 由(1)知 $f(x)=2\ln x-\dfrac{e^x}{x}$，

则 $f'(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{(xe^x-e^x)}{x^2}=\dfrac{2x-xe^x+e^x}{x^2}=\dfrac{2x-e^x(x-1)}{x^2}(x>0)$.

当 $0<x\le 1$ 时，$f'(x)>0$；

当 $x>1$ 时，令 $g(x)=2x-e^x(x-1)$，

得 $g'(x)=2-e^x(x-1)-e^x=2-xe^x<2-e<0$，

则 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减. ……………………………………5 分

又 $g(1)=2>0$，$g(2)=4-e^2<0$，

故存在 $x_0\in(1,2)$，使得 $g(x_0)=0$， ……………………………………6 分

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g(x)>0$，则 $f'(x)>0$；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g(x)<0$，则 $f'(x)<0$.

故函数 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减. ……………………7 分

故函数 $f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0. ……………………………………8 分

由于 $g(x_0)=0$，即 $2x_0-e^{x_0}(x_0-1)=0$，得 $e^{x_0}=\dfrac{2x_0}{x_0-1}$，$x_0\in(1,2)$，

则 $f(x_0)=2\ln x_0-\dfrac{e^{x_0}}{x_0}=2\ln x_0-\dfrac{2}{x_0-1}$. ……………………………………9 分

令 $h(x)=2\ln x-\dfrac{2}{x-1}$，$1<x<2$，

则 $h'(x)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{(x-1)^2}>0$.

故函数 $h(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增. ……………………………………10 分

由于 $1<x_0<2$，则 $h(x_0)<h(2)=2\ln 2-2$.……………………………………11 分

即 $2\ln x_0-\dfrac{2}{x_0-1}<2\ln 2-2$.

所以 $f(x_0)<2\ln 2-2$. ……………………………………12 分

21. (12 分)

(1) **解法 1**：因为点 P 是抛物线 $C: y=\dfrac{1}{4}x^2-3$ 的顶点，所以点 P 的坐标为 $(0,-3)$. …1 分

依题意知直线 AB 的斜率存在，设直线 $AB: y=kx+b$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

则 $\overrightarrow{PA}=(x_1,y_1+3),\overrightarrow{PB}=(x_2,y_2+3)$.

因为 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-4$，所以 $x_1x_2+(y_1+3)(y_2+3)=-4$.

因为 A，B 是 C 上的两个动点，所以 $y_1=\frac{1}{4}x_1^2-3$，$y_2=\frac{1}{4}x_2^2-3$.

则 $x_1x_2+\frac{1}{16}x_1^2x_2^2=-4$.

整理得 $x_1^2x_2^2+16x_1x_2+64=0$，解得 $x_1x_2=-8$. ……………………………………2 分

由 $\begin{cases} y=kx+b, \\ y=\frac{1}{4}x^2-3, \end{cases}$ 得 $x^2-4kx-12-4b=0$,

则 $x_1+x_2=4k$， $x_1x_2=-12-4b$.

故 $-12-4b=-8$，解得 $b=-1$.

所以直线 AB: $y=kx-1$. ……………………………………………3 分

所以直线 AB 过定点 $(0,-1)$. ……………………………………………4 分

所以点 $D(0,1)$ 不在直线 AB 上. ……………………………………………5 分

解法 2：因为点 P 是抛物线 $C: y=\frac{1}{4}x^2-3$ 的顶点, 所以点 P 的坐标为 $(0,-3)$. ………1 分

设 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$, 则 $\overrightarrow{PA}=(x_1,y_1+3), \overrightarrow{PB}=(x_2,y_2+3)$.

因为 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-4$，所以 $x_1x_2+(y_1+3)(y_2+3)=-4$.

因为 A，B 是 C 上的两个动点，所以 $y_1=\frac{1}{4}x_1^2-3$，$y_2=\frac{1}{4}x_2^2-3$.

则 $x_1x_2+\frac{1}{16}x_1^2x_2^2=-4$.

整理得 $x_1^2x_2^2+16x_1x_2+64=0$，解得 $x_1x_2=-8$. ……………………………2 分

直线 AB 的斜率为 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{\frac{1}{4}x_1^2-\frac{1}{4}x_2^2}{x_1-x_2}=\frac{x_1+x_2}{4}$,

则直线 AB 的方程为 $y-\left(\frac{1}{4}x_1^2-3\right)=\frac{x_1+x_2}{4}(x-x_1)$,

即 $y=\frac{x_1+x_2}{4}x-\frac{x_1(x_1+x_2)}{4}+\left(\frac{1}{4}x_1^2-3\right)$

$=\frac{x_1+x_2}{4}x-\frac{x_1x_2}{4}-3$

$=\dfrac{x_1+x_2}{4}x-1$. ……………………………………3 分

所以直线 AB 过定点 $(0,-1)$. ……………………………………4 分

所以点 $D(0,1)$ 不在直线 AB 上. ……………………………………5 分

解法 3：因为点 P 是抛物线 $C: y=\dfrac{1}{4}x^2-3$ 的顶点, 所以点 P 的坐标为 $(0,-3)$. ………1 分

设 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$, 则 $\overrightarrow{PA}=(x_1,y_1+3), \overrightarrow{PB}=(x_2,y_2+3)$.

因为 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-4$，所以 $x_1x_2+(y_1+3)(y_2+3)=-4$.

因为 A，B 是 C 上的两个动点，所以 $y_1=\dfrac{1}{4}x_1^2-3$，$y_2=\dfrac{1}{4}x_2^2-3$.

则 $x_1x_2+\dfrac{1}{16}x_1^2x_2^2=-4$.

整理得 $x_1^2x_2^2+16x_1x_2+64=0$，解得 $x_1x_2=-8$. ……………………………2 分

直线 AD 的斜率为 $k_1=\dfrac{y_1-1}{x_1}=\dfrac{x_1^2-16}{4x_1}$,

直线 BD 的斜率为 $k_2=\dfrac{y_2-1}{x_2}=\dfrac{x_2^2-16}{4x_2}$,

则 $k_1-k_2=\dfrac{x_1^2-16}{4x_1}-\dfrac{x_2^2-16}{4x_2}$

$=\dfrac{x_2(x_1^2-16)-x_1(x_2^2-16)}{4x_1x_2}$

$=\dfrac{x_2-x_1}{4}$. ……………………………………3 分

依题意知 $x_1\neq x_2$，得 $x_1-x_2\neq 0$,

则 $k_1-k_2\neq 0$, 得 $k_1\neq k_2$.

故 A, B, D 三点不共线. ……………………………………4 分

所以点 $D(0,1)$ 不在直线 AB 上. ……………………………………5 分

(2) **解法** 1:线段 PA 的中点坐标为 $\left(\dfrac{x_1}{2},\dfrac{x_1^2}{8}-3\right)$，$k_{PA}=\dfrac{\frac{1}{4}x_1^2}{x_1}=\dfrac{x_1}{4}$,

则线段 PA 的中垂线方程为 $y-\frac{x_1^2}{8}+3=-\frac{4}{x_1}\left(x-\frac{x_1}{2}\right)$.　①　………………6 分

同理得线段 PB 的中垂线方程为 $y-\frac{x_2^2}{8}+3=-\frac{4}{x_2}\left(x-\frac{x_2}{2}\right)$.　②

由①②解得 $x=\frac{x_1+x_2}{4}=k$，$y=2k^2$.　………………………………………8 分

所以点 M 的坐标为 $\left(k,2k^2\right)$.

设点 $M\left(x,y\right)$，则 $\begin{cases}x=k,\\ y=2k^2.\end{cases}$

消去 k，得 $x^2=\frac{1}{2}y$.

所以点 M 的轨迹方程为 $x^2=\frac{1}{2}y$.　………………………………………9 分

抛物线 Γ: $x^2=\frac{1}{2}y$ 的焦点为 $F\left(0,\frac{1}{8}\right)$，准线为 $l: y=-\frac{1}{8}$，

设点 M 到直线 l 的距离为 d_1，根据抛物线的定义得 $d_1=|MF|$，

因为点 M 到 x 轴的距离为 d，点 $N\left(1,0\right)$，

则 $|MN|-d=|MN|-\left(d_1-\frac{1}{8}\right)$

$=|MN|-|MF|+\frac{1}{8}$　………………………………………10 分

$\le |NF|+\frac{1}{8}$　………………………………………11 分

$=\frac{\sqrt{65}+1}{8}$.

当 M,N,F 三点共线，且点 M 在 NF 的延长线时，等号成立.

所以 $|MN|-d$ 取得最大值为 $\frac{\sqrt{65}+1}{8}$.　………………………………………12 分

解法 2：线段 PA 的中点坐标为 $\left(\frac{x_1}{2},\frac{x_1^2}{8}-3\right)$，$k_{PA}=\frac{\frac{1}{4}x_1^2}{x_1}=\frac{x_1}{4}$，

则线段 PA 的中垂线方程为 $y-\frac{x_1^2}{8}+3=-\frac{4}{x_1}\left(x-\frac{x_1}{2}\right)$. ① ……………6 分

同理得线段 PB 的中垂线方程为 $y-\frac{x_2^2}{8}+3=-\frac{4}{x_2}\left(x-\frac{x_2}{2}\right)$. ②

由①②解得 $x=\frac{x_1+x_2}{4}$，$y=\frac{\left(x_1+x_2\right)^2}{8}$. ……………………………………8 分

设点 $M\left(x,y\right)$，则 $\begin{cases}x=\frac{x_1+x_2}{4}, \\ y=\frac{\left(x_1+x_2\right)^2}{8}.\end{cases}$

消去 x_1+x_2，得 $x^2=\frac{1}{2}y$.

所以点 M 的轨迹方程为 $x^2=\frac{1}{2}y$. ……………………………………9 分

抛物线 $\Gamma: x^2=\frac{1}{2}y$ 的焦点为 $F\left(0,\frac{1}{8}\right)$，准线为 $l: y=-\frac{1}{8}$，

设点 M 到直线 l 的距离为 d_1，根据抛物线的定义得 $d_1=\left|MF\right|$，

因为点 M 到 x 轴的距离为 d，点 $N\left(1,0\right)$，

则 $\left|MN\right|-d=\left|MN\right|-\left(d_1-\frac{1}{8}\right)$

$=\left|MN\right|-\left|MF\right|+\frac{1}{8}$ ……………………………………10 分

$\le\left|NF\right|+\frac{1}{8}$ ……………………………………11 分

$=\frac{\sqrt{65}+1}{8}$.

当 M,N,F 三点共线，且点 M 在 NF 的延长线时，等号成立。

所以 $\left|MN\right|-d$ 取得最大值为 $\frac{\sqrt{65}+1}{8}$. ……………………………………12 分

22. （10 分）

(1) 解：由 $\begin{cases}x=t\cos\alpha, \\ y=1+t\sin\alpha,\end{cases}$ (t 为参数)，得 $x\sin\alpha-y\cos\alpha+\cos\alpha=0$，

所以曲线C_1的普通方程为$x\sin\alpha - y\cos\alpha + \cos\alpha = 0$. ························2 分

由$\begin{cases} x=\sin\theta, \\ y=\sqrt{1+\cos 2\theta}, \end{cases}$($\theta$为参数)，得$2x^2+y^2=2\left(y\ge 0\right)$.

所以曲线C_2的普通方程为$2x^2+y^2=2\left(y\ge 0\right)$. ································5 分

（2）**解法 1**:把$\begin{cases} x=t\cos\alpha, \\ y=1+t\sin\alpha \end{cases}$代入$2x^2+y^2=2$，

得$\left(2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)t^2+2t\sin\alpha-1=0$，···6 分

由于$\Delta=\left(2\sin\alpha\right)^2+4\left(2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)=8>0$，

则$t_1+t_2=-\dfrac{2\sin\alpha}{2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}$， $t_1t_2=-\dfrac{1}{2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}$. ························8 分

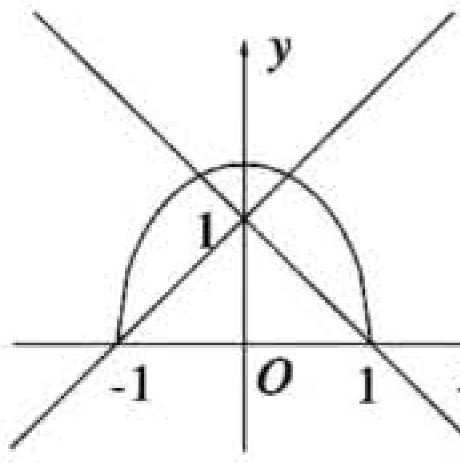
则$\left|AB\right|=\left|t_1-t_2\right|=\sqrt{\left(t_1+t_2\right)^2-4t_1t_2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}$. ························9 分

由于$\left|AB\right|=\sqrt{2}$，则$\dfrac{2\sqrt{2}}{2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\sqrt{2}$.

解得$\sin\alpha=0$.
经检验，$\sin\alpha=0$符合题意，
所以$\sin\alpha=0$. ···10 分

解法 2:由（1）可知C_1是直线，且过点$\left(0,1\right)$，

C_2是椭圆$2x^2+y^2=2$在x轴上方（包括与x轴的两个交点），



如图可知，若C_1与C_2有两个交点，则C_1的斜率$k\in\left[-1,1\right]$.

设$C_1: y=kx+1$，$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，

由$\begin{cases} y=kx+1, \\ 2x^2+y^2=2, \end{cases}$得$\left(k^2+2\right)x^2+2kx-1=0$，································6 分

由于$\Delta=\left(2k\right)^2+4\left(k^2+2\right)=8k^2+8>0$，

则$x_1+x_2=-\dfrac{2k}{k^2+2}$，$x_1x_2=-\dfrac{1}{k^2+2}$. ································7 分

$$\left|AB\right|=\sqrt{\left(1+k^2\right)\left[\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2\right]}=\sqrt{\left(1+k^2\right)\left[\left(-\frac{2k}{k^2+2}\right)^2+\frac{4}{k^2+2}\right]}$$

$=\dfrac{2\sqrt{2}\left(k^2+1\right)}{k^2+2}$. ……………………………………8 分

由于 $|AB|=\sqrt{2}$, 得 $\dfrac{2\sqrt{2}\left(k^2+1\right)}{k^2+2}=0$，解得 $k=0$. ……………………………9 分

则 $\tan\alpha=0$，得 $\sin\alpha=0$. ……………………………………10 分

23. (10 分)

（1）**解法 1**:因为 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=1$,

所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=\dfrac{a+b}{a}+\dfrac{2(a+b)}{b}$ ……………………………………1 分

$=3+\dfrac{b}{a}+\dfrac{2a}{b}$

$\geq 3+2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{2a}{b}}$ ……………………………………2 分

$=3+2\sqrt{2}$. ……………………………………3 分

当且仅当 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{2a}{b}$, 即 $b^2=2a^2$ 时, 等号成立.

由 $\begin{cases}a>0,b>0,\\a+b=1,\\b^2=2a^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\sqrt{2}-1,\\b=2-\sqrt{2}.\end{cases}$ ……………………………………4 分

所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$. ……………………………………5 分

解法 2:因为 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=1$,

所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}\right)$ ……………………………………1 分

$=3+\dfrac{b}{a}+\dfrac{2a}{b}$

$\geq 3+2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{2a}{b}}$ ……………………………………2 分

$=3+2\sqrt{2}$. ……………………………………3 分

当且仅当 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{2a}{b}$, 即 $b^2=2a^2$ 时, 等号成立.

由 $\begin{cases}a>0,b>0,\\a+b=1,\\b^2=2a^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\sqrt{2}-1,\\b=2-\sqrt{2}.\end{cases}$ ……………………………………4 分

所以$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$的最小值为$3+2\sqrt{2}$. ……………………………………5 分

（2）**证法 1**：因为$a>0$，$b>0$，

所以$\frac{ab+2b}{a^2+b^2+1}=\frac{ab+2b}{a^2+\frac{b^2}{5}+\frac{4b^2}{5}+1}$ ……………………………………6 分

$\le\frac{ab+2b}{2\sqrt{a^2\cdot\frac{b^2}{5}}+2\sqrt{\frac{4b^2}{5}\times 1}}$ ……………………………………7 分

$=\frac{ab+2b}{\frac{2}{\sqrt{5}}(ab+2b)}$

$=\frac{\sqrt{5}}{2}$. ……………………………………8 分

当且仅当$\begin{cases}a^2=\frac{b^2}{5},\\ \frac{4b^2}{5}=1\end{cases}$时, 等号成立.

解得$a=\frac{1}{2},b=\frac{\sqrt{5}}{2}$, 此时$a+b\ne 1$. ……………………………………9 分

所以$\frac{ab+2b}{a^2+b^2+1}<\frac{\sqrt{5}}{2}$. ……………………………………10 分

证法 2:由于$a>0$，$b>0$，$a+b=0$，得$a=1-b$，

要证明$\frac{ab+2b}{a^2+b^2+1}<\frac{\sqrt{5}}{2}$，只要证明$\frac{(1-b)b+2b}{(1-b)^2+b^2+1}<\frac{\sqrt{5}}{2}$， ………………6 分

即证$\frac{3b-b^2}{2b^2-2b+2}<\frac{\sqrt{5}}{2}$，只要证$\frac{3b-b^2}{b^2-b+1}<\sqrt{5}$.

由于$b^2-b+1>0$, 则只要证明$3b-b^2<\sqrt{5}b^2-\sqrt{5}b+\sqrt{5}$,

即$(\sqrt{5}+1)b^2-(\sqrt{5}+3)b+\sqrt{5}>0$. ……………………………………7 分

因为$\Delta=(\sqrt{5}+3)^2-4\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)=-6+2\sqrt{5}<0$, ……………………………8 分

所以$(\sqrt{5}+1)b^2-(\sqrt{5}+3)b+\sqrt{5}>0$成立. ……………………………………9 分

所以$\dfrac{ab+2b}{a^2+b^2+1}<\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. ……………………………………10 分

证法 3:由于$a>0$，$b>0$，$a+b=0$，得$b=1-a$，

所以
$$\frac{ab+2b}{a^2+b^2+1}=\frac{a(1-a)+2(1-a)}{a^2+(1-a)^2+1}$$
$$=\frac{-a^2-a+2}{2(a^2-a+1)}$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{3-2a}{2(a^2-a+1)}.$$
……………………………………6 分

令$3-2a=t$, 得$a=\dfrac{3-t}{2}$, 由于$0<a<1$, 则$1<t<3$.

则
$$-\frac{1}{2}+\frac{3-2a}{2(a^2-a+1)}=-\frac{1}{2}+\frac{2t}{t^2-4t+7}$$
……………………………………7 分
$$=-\frac{1}{2}+\frac{2}{t+\frac{7}{t}-4}$$
$$\leq-\frac{1}{2}+\frac{2}{2\sqrt{t\times\frac{7}{t}}-4}$$
……………………………………8 分
$$=\frac{2\sqrt{7}+1}{6}.$$
……………………………………9 分

当且仅当$t=\dfrac{7}{t}$, 即$t=\sqrt{7}$时, 等号成立.

由于$\dfrac{2\sqrt{7}+1}{6}<\dfrac{\sqrt{5}}{2}$,

所以$\dfrac{ab+2b}{a^2+b^2+1}<\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. ……………………………………10 分