北京市朝阳区高三年级第二学期质量检测二

数学

2021.5

（考试时间 120 分钟　满分 150 分）

本试卷分为选择题（共 40 分）和非选择题（共 110 分）两部分

考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

(1) 在复平面内，复数 $z=(1-i)^2+1$ 对应的点位于

(A) 第一象限　　(B) 第二象限　　(C) 第三象限　　(D) 第四象限

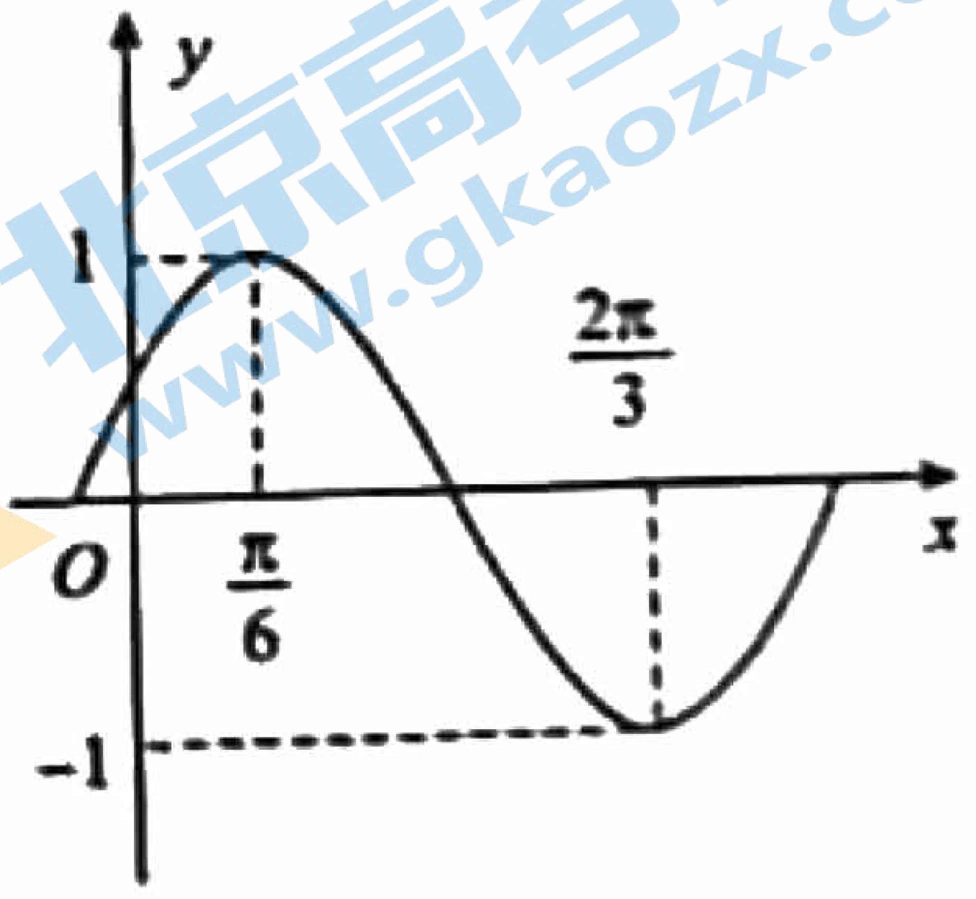
(2) 下列函数是奇函数的是

(A) $y=\cos x$　　(B) $y=x^2$　　(C) $y=\ln|x|$　　(D) $y=e^x-e^{-x}$

(3) 已知双曲线 $C:x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的一个焦点为 $(-2,0)$，则双曲线 C 的一条渐近线方程为

(A) $x+\sqrt{3}y=0$　　(B) $\sqrt{3}x+y=0$　　(C) $x+\sqrt{3}y-1=0$　　(D) $\sqrt{3}x+y-1=0$

(4) 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\ (\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，则 $f(x)$ 的表达式为



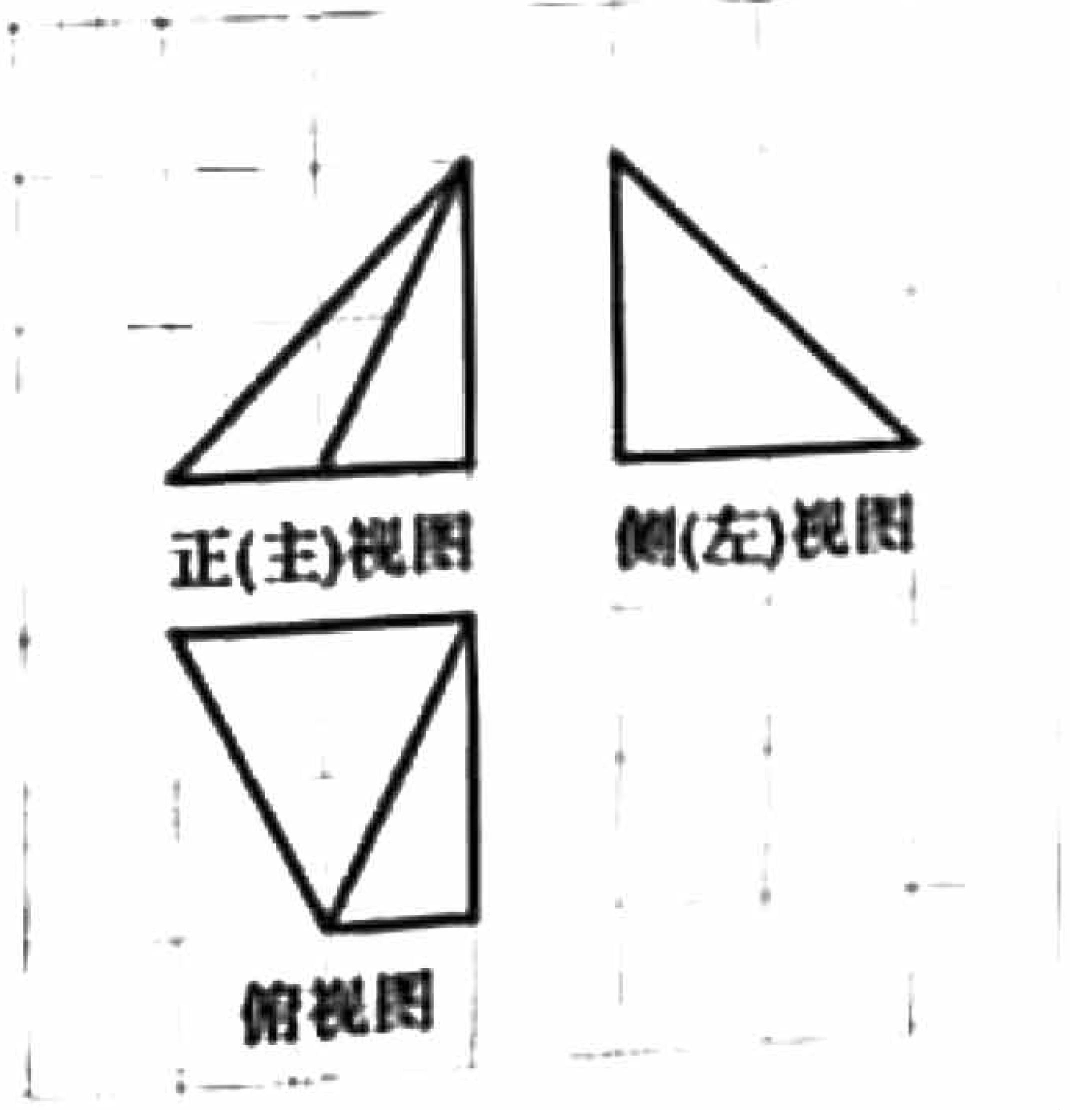
(A) $f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$

(B) $f(x)=\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$

(C) $f(x)=\sin(x+\dfrac{\pi}{6})$

(D) $f(x)=\sin(x+\dfrac{\pi}{3})$

(5) 某四棱锥的三视图如图所示，已知网格纸上小正方形的边长为 1，则该四棱锥的 5 个面的面积中，最大的是



(A) 2

(B) $\sqrt{5}$

(C) $\sqrt{6}$

(D) 3

(6) 设 $x>0,y>0$，则“$x+y=1$”是“$xy\leq\frac{1}{4}$”的

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

(7) 某地对生活垃圾使用填埋和环保两种方式处理．该地 2020 年产生的生活垃圾为 20 万吨，其中 15 万吨以填埋方式处理，5 万吨以环保方式处理．预计每年生活垃圾的总量比前一年增加 1 万吨，同时，因垃圾处理技术越来越进步，要求从 2021 年起每年通过环保方式处理的生活垃圾量是前一年的 q 倍，若要使得 2024 年通过填埋方式处理的生活垃圾量不高于当年生活垃圾总量的 50%，则 q 的值至少为

(A) $\sqrt[5]{2.4}$　　(B) $\sqrt[5]{2.5}$　　(C) $\sqrt[4]{2.4}$　　(D) $\sqrt[4]{2.5}$

(8) 若圆 $O:x^2+y^2=1$ 上存在点 P，直线 $l:y=k(x+2)$ 上存在点 Q，使得 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{QO}$，则实数 k 的取值范围为

(A) $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$　　(B) $[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}]$　　(C) $\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$　　(D) $\{-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\}$

(9) 集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$ 的所有三个元素的子集记为 $B_1,B_2,\cdots,B_n(n\in\mathbf{N}^*)$．记 b_i 为集合 $B_i(i=1,2,3,\cdots,n)$ 中的最大元素，则 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=$

(A) 10　　(B) 40　　(C) 45　　(D) 50

(10) 已知抛物线 C 的焦点 F 到准线 l 的距离为 2，点 P 是直线 l 上的动点．若点 A 在抛物线 C 上，且 $|AF|=5$，过点 A 作直线 PF 的垂线，垂足为 H，则 $|PH|\cdot|PF|$ 的最小值为

(A) $2\sqrt{5}$　　(B) 6　　(C) $\sqrt{41}$　　(D) $2\sqrt{13}$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

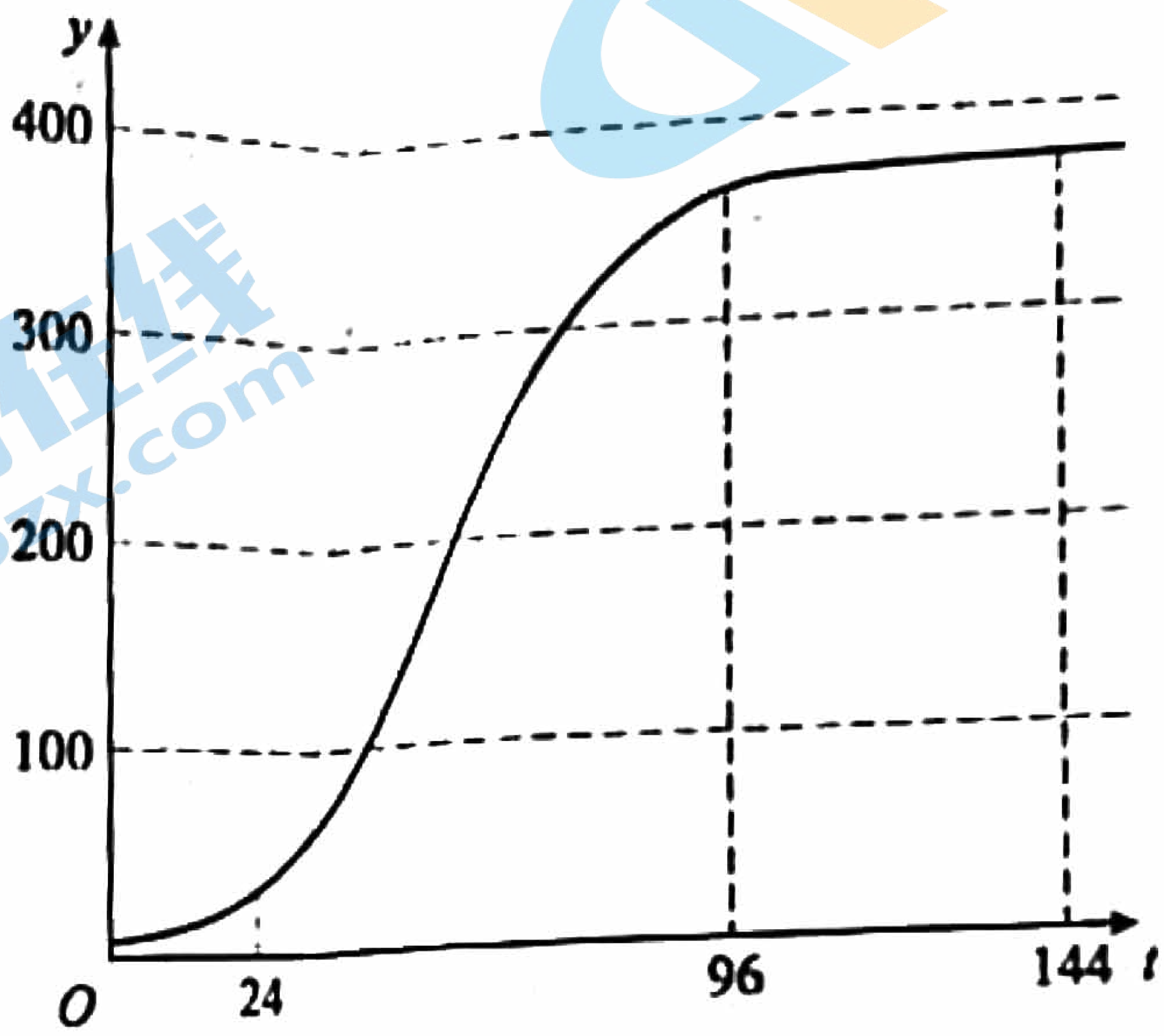
(11) 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,m)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2)$，且 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$，则 $m=$________．

(12) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_2=5,a_5=2$，则 $a_3+a_5+a_7+a_9=$________．

(13) 已知 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，则 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{2})=$________．

(14) 已知函数 $f(x)=3^x$，$g(x)=|x+a|-2(a\in\mathbf{R})$．若函数 $y=f(g(x))$ 是偶函数，则 $a=$________；若函数 $y=g(f(x))$ 存在两个零点，则 a 的一个取值是________．

(15)"S"型函数是统计分析、生态学、人工智能等领域常见的函数模型，其图象形似英文字母"S"，所以其图象也被称为"S"型曲线．某校生物兴趣小组在 0.5 毫升培养液中放入 5 个大草履虫，每隔一段时间统计一次大草履虫的数量，经过反复试验得到大草履虫的数量 y（单位：个）与时间 t（单位：小时）的关系近似为一个"S"型函数 $y=\dfrac{375}{1+74e^{-0.06t}}$．已知函数 $f(t)=\dfrac{375}{1+74e^{-0.06t}}(t\geq 0)$ 的部分图象如图所示，$f'(t)$ 为 $f(t)$ 的导函数．



给出下列四个结论：

① 对任意 $t_1\in(0,24)$，$t_3\in(96,144)$，存在 $t_2\in(24,96)$，使得 $f'(t_2)>\dfrac{f'(t_1)+f'(t_3)}{2}$；

② 对任意 $t_1\in(0,24)$，$t_3\in(96,144)$，存在 $t_2\in(24,96)$，使得 $f'(t_2)=\dfrac{f(t_3)-f(t_1)}{t_3-t_1}$；

③ 对任意 $t_2\in(24,96)$，存在 $t_1\in(0,24)$，$t_3\in(96,144)$，使得 $f(t_2)>\dfrac{f(t_1)+f(t_3)}{2}$；

④ 对任意 $t_2\in(24,96)$，存在 $t_1\in(0,24)$，$t_3\in(96,144)$，使得 $f'(t_2)=\dfrac{f(t_3)-f(t_1)}{t_3-t_1}$.

其中所有正确结论的序号是______．

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

(16)（本小题 13 分）

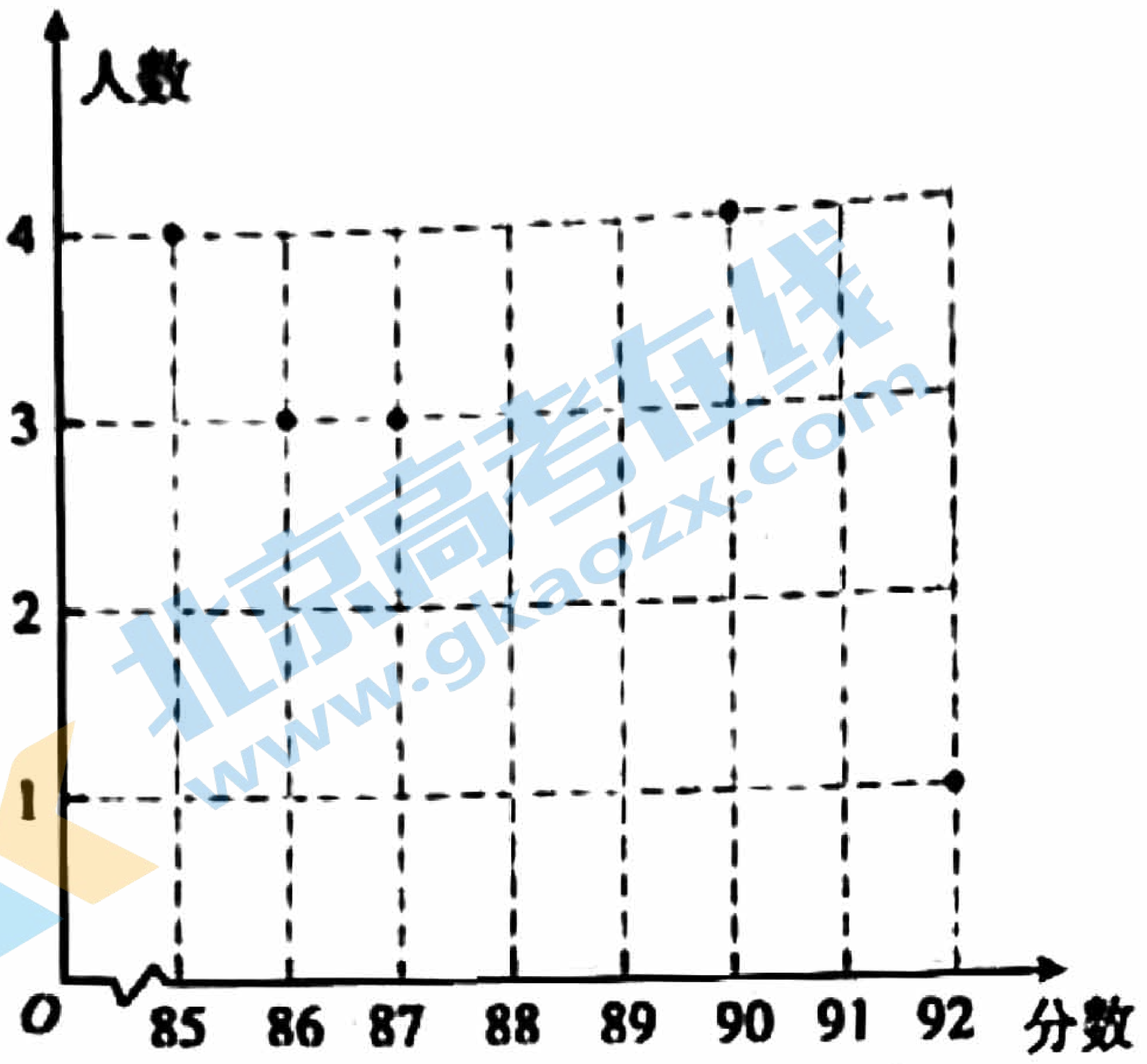
在 $\triangle ABC$ 中，$b^2+c^2-a^2=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}bc$.

（Ⅰ）求 $\tan A$ 的值；

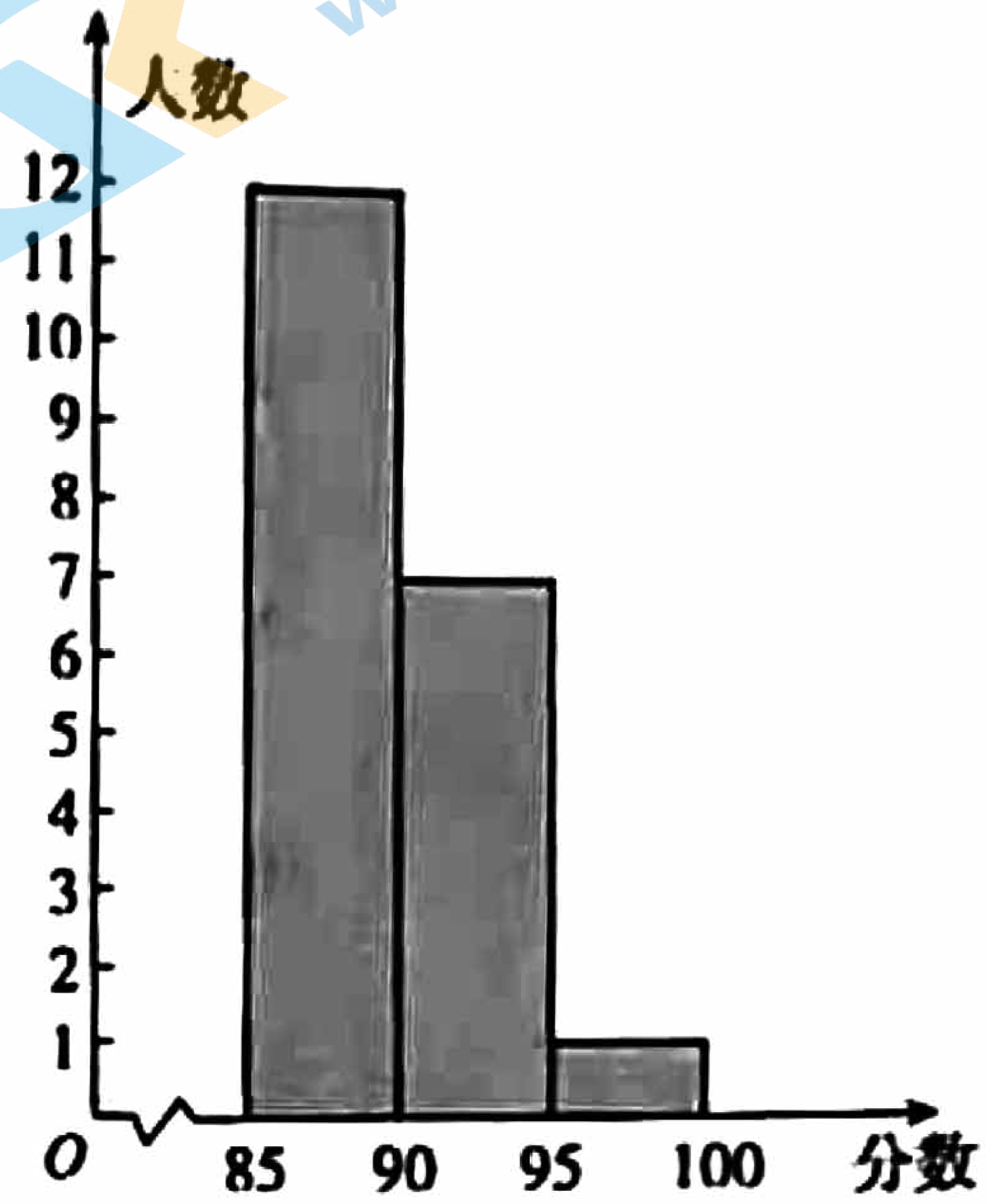
（Ⅱ）若 $3c\sin A=\sqrt{2}a\sin B$，且 $\triangle ABC$ 的面积 $S=2\sqrt{2}$，求 c 的值．

(17)(本小题 14 分)

为迎接 2022 年冬奥会,某地区高一、高二年级学生参加了冬奥知识竞赛. 为了解知识竞赛成绩优秀(不低于 85 分)学生的得分情况,从高一、高二这两个年级知识竞赛成绩优秀的学生中分别随机抽取容量为 15、20 的样本,得分情况统计如下图所示(满分 100 分,得分均为整数),其中高二年级学生得分按[85,90)、[90,95)、[95,100]分组.



高一年级成绩优秀学生得分分布



高二年级成绩优秀学生得分分布

(Ⅰ)从抽取的高二年级学生样本中随机抽取一人,求其得分不低于 90 分的概率;

(Ⅱ)从该地区高二年级参加知识竞赛成绩优秀的学生中随机抽取 3 人,用频率估计概率,记 X 为取出的 3 人中得分不低于 90 分的人数,求 X 的分布列及数学期望;

(Ⅲ)由于高二年级学生样本原始数据丢失,请根据统计图信息,判断高二年级学生样本得分的最高分至少为多少分时,高二年级学生样本得分的平均分一定超过高一年级学生样本得分的平均分,并说明理由.

(18)(本小题 13 分)

如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,四边形 AA_1C_1C 是边长为 4 的正方形,$AB=3$. 再从条件①、条件②、条件③中选择两个能解决下面问题的条件作为已知,并作答.

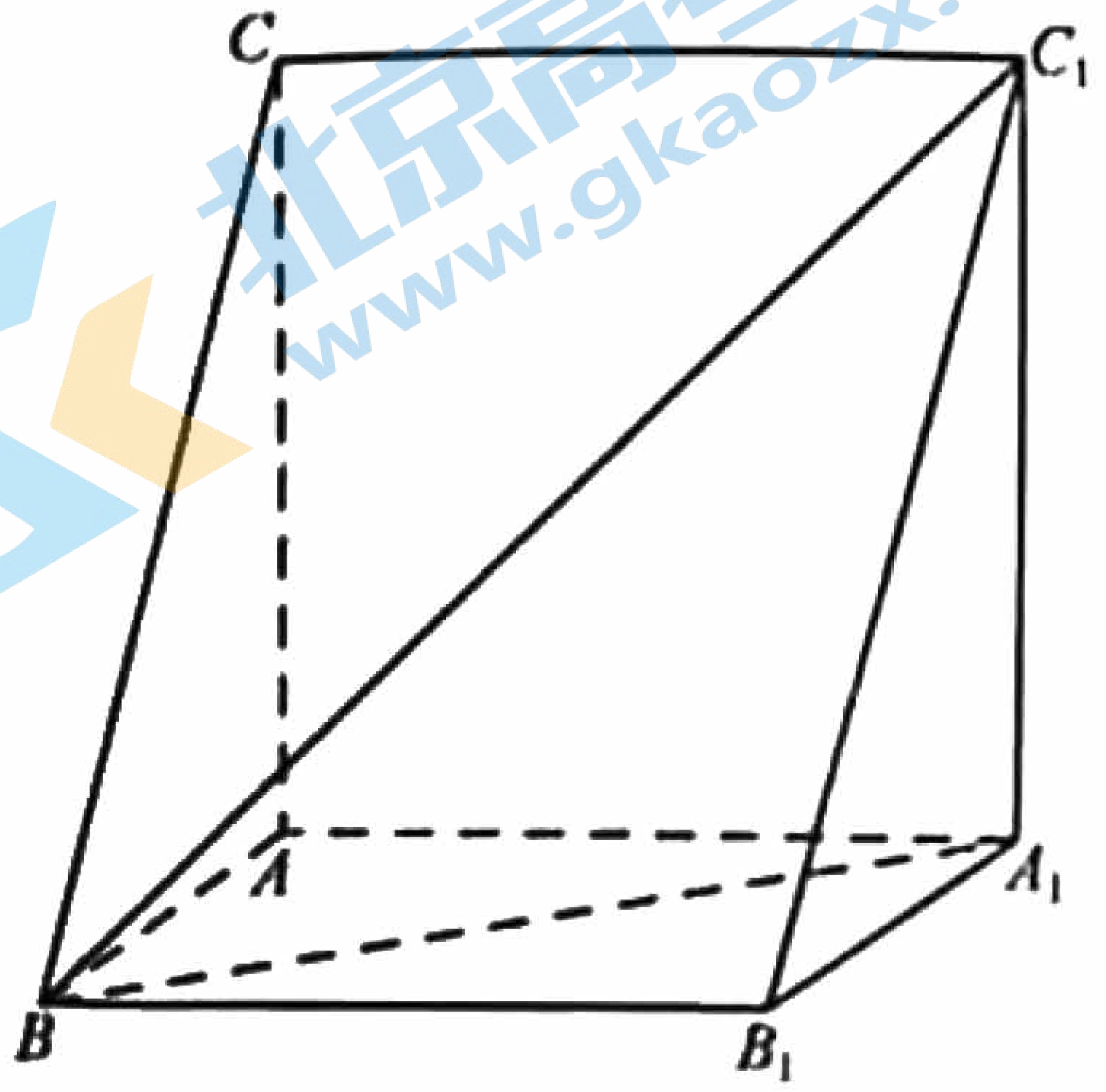
(Ⅰ)求证:$AB\perp$ 平面 AA_1C_1C;

(Ⅱ)求直线 BC 与平面 A_1BC_1 所成角的正弦值.

条件①:$BC=5$;

条件②:$AB\perp AA_1$;

条件③:平面 $ABC\perp$ 平面 AA_1C_1C.



(19)(本小题 15 分)

已知函数 $f(x)=(x-1)e^x-\frac{1}{2}ax^2+1(a\in\mathbf{R})$.

(Ⅰ)当 $a=0$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

(Ⅱ)判断函数 $f(x)$ 的极值点的个数,并说明理由;

(Ⅲ)若对任意 $x\in\mathbf{R}$,$f(x)\geq0$ 恒成立,求 a 的取值范围.

(20)(本小题15分)

已知 F 为椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左焦点，直线 $l:y=k(x-2)$ 与椭圆 C 交于不同的两点 M,N.

(Ⅰ)当 $k=-\frac{1}{2}$ 时，求 $\triangle FMN$ 的面积；

(Ⅱ)设直线 FM,FN 分别与直线 $x=1$ 交于两点 P,Q，线段 MN,PQ 的中点分别为 G,H，点 $A(\frac{1}{5},0)$. 当 k 变化时，证明 A,G,H 三点共线.

(21)(本小题15分)

已知各项均为整数的数列 $A_N:a_1,a_2,\cdots,a_N(N\geqslant 3,N\in\mathbf{N}^*)$ 满足 $a_1a_N<0$，且对任意 $i=2,3,\cdots,N$，都有 $|a_i-a_{i-1}|\leqslant 1$. 记 $S(A_N)=a_1+a_2+\cdots+a_N$.

(Ⅰ)若 $a_1=3$，写出一个符合要求的 A_6；

(Ⅱ)证明：数列 A_N 中存在 a_k 使得 $a_k=0$；

(Ⅲ)若 $S(A_N)$ 是 N 的整数倍，证明：数列 A_N 中存在 a_r 使得 $S(A_N)=N\cdot a_r$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。