

2023 北京顺义一中高一 3 月月考

数 学

一、单选题（本大题共 10 小题，共 40.0 分）

1. 化简 $\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{MN}$ 所得的结果是 ()

- A. $2\overrightarrow{MN}$ B. $2\overrightarrow{NM}$ C. $\vec{0}$ D. $\overrightarrow{PM}$

2. 已知 $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{5}{4}$, 则 $\sin 2\alpha =$ ()

- A. $-\frac{9}{16}$ B. $-\frac{7}{16}$ C. $\frac{7}{16}$ D. $\frac{9}{16}$

3. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = \sqrt{6}$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} = 1$, 则向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 夹角的大小等于 ()

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 120°

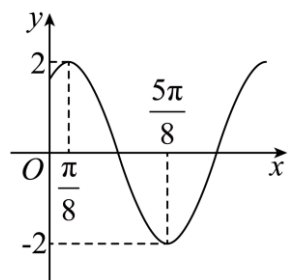
4. 为了得到函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{4})$ 的图象, 可以将函数 $y = \sin 2x$ 的图象

- A. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度 B. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度
C. 向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度 D. 向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度

5. 设 $\alpha \in [0, 2\pi)$, 则使 $\sin \alpha > \frac{1}{2}$ 成立的 α 的取值范围是 ()

- A. $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ B. $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ C. $(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ D. $(\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$

6. 函数 $y = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 在一个周期内的图象如图所示, 则此函数的解析式是 ()



- A. $y = 2\sin(2x - \frac{\pi}{4})$ B. $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{4})$
C. $y = 2\sin(x + \frac{3\pi}{8})$ D. $y = 2\sin(\frac{x}{2} + \frac{7\pi}{16})$

7. 若平面向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, 且 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, 则 $|2\vec{a} + \vec{b}|$ 等于 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 2 D. 8

8. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AD=1$, $AB=\frac{1}{2}$, $\angle BAD=60^\circ$, E 为 CD 的中点, 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BE} =$ ()

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

9. 若向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 均为非零向量, 则 “ $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ ” 是 “ $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线” 的 ()

- A. 充要条件 B. 必要非充分条件
C. 既非充分也非必要条件 D. 充分不必要条件

10. P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 满足 $|\overrightarrow{CB}| - |\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} - 2\overrightarrow{PA}| = 0$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 ()

- A. 等边三角形 B. 锐角三角形 C. 直角三角形 D. 钝角三角形

二、填空题 (本大题共 5 小题, 共 25.0 分)

11. 化简 $\cos 72^\circ \cos 12^\circ + \sin 72^\circ \sin 12^\circ$ 的值是_____.

12. 已知单位向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角为 45° , $k\vec{a} - \vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 垂直, 则 $k =$ _____.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, M 是 BC 的中点, $AM=1$, 点 P 在 AM 上, 且满足

$\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 等于_____.

14. 在边长为 2 的正三角形 ABC 中, M 是 BC 的中点, D 是线段 AM 的中点.

①若 $\overrightarrow{BD} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC}$, 则 $x + y =$ _____;

② $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BM} =$ _____.

15. 已知函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($\varphi < \frac{\pi}{2}$), 那么函数 $f(x)$ 的最小正周期是_____; 若函数 $f(x)$ 在

$[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]$ 上具有单调性, 且 $f(\frac{\pi}{2}) = -f(\frac{5\pi}{6})$, 则 $\varphi =$ _____.

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 85.0 分)

16. 已知角 α 的终边经过单位圆上的点 $P(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$.

(1) 求 $\sin \alpha$ 的值;

(2) 求 $\frac{\cos(2\pi - \alpha)}{\sin(\pi + \alpha)} \cdot \frac{\tan(\pi + \alpha)}{\cos(3\pi - \alpha)}$ 的值.

17. 已知 $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为 120° ,

求: (1) $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$;

(2) $|2\vec{a} - \vec{b}|$;

(3) $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角.

18. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 不共线, 且 $\overrightarrow{OA} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$.

(1) 将 $\overrightarrow{AB}$ 用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示;

(2) 若 $\overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{OC}$, 求 λ 的值;

(3) 若 $\lambda = -3$, 求证: A, B, C 三点共线.

19. 已知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 且 $\tan \alpha = \frac{3}{4}$.

(1) 求 $\tan 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$;

(2) 若 β 为锐角, 且 $\cos(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}$, 求 $\sin \beta$.

20. 已知函数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 2\cos^2 x - 1$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调增区间;

(2) 求 $f(x)$ 的对称轴方程;

(3) 将函数 $y = f(x)$ 在区间 $[0, m]$ 上的值域为 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 求实数 m 的取值范围.

21. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) + b (\omega > 0)$, 且函数图象的对称中心到对称轴的最小距离为 $\frac{\pi}{4}$, 当

$x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, $f(x)$ 的最大值为 2.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式.

(2) 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象, 若任意 $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, 都有

$g(x) - 2 \leq m \leq g(x) + 2$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

参考答案

一、单选题（本大题共 10 小题，共 40.0 分）

1. 【答案】C

【解析】

【分析】根据向量加减法运算可直接得到结果.

【详解】 $\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MN} = \vec{0}$.

故选：C.

2. 【答案】A

【解析】

【分析】在等式 $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{5}{4}$ 两边平方，化简后可求得 $\sin 2\alpha$ 的值.

【详解】 $\because (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 - \sin 2\alpha = \frac{25}{16}$ ，因此， $\sin 2\alpha = -\frac{9}{16}$.

故选：A.

3. 【答案】A

【解析】

【分析】先由 $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} = 1$ 得到 $\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b}^2 = 1$ ，再根据数量积公式得到 $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，进而结合向量夹角的

范围进行求解.

【详解】设向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 的夹角为 θ ，

由 $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} = 1$ ，得 $\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b}^2 = 1$ ，

即 $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta - |\vec{b}|^2 = 1$ ，

因为 $|\vec{a}| = \sqrt{6}$ ， $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ ，

所以 $2\sqrt{3} \cos \theta - 2 = 1$ ，解得 $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

又因为 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ，所以 $\theta = 30^\circ$ ，

即向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 的夹角的大小为 30° .

故选：A.

4. 【答案】D

【解析】

【详解】 $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$, 据此可知, 为了得到函数 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象, 可以将函数

$y = \sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度.

本题选择 D 选项.

5. 【答案】B

【解析】

【分析】由正弦函数性质得 $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < \alpha < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 结合已知范围可求.

【详解】 $\because \sin \alpha > \frac{1}{2}, \therefore \frac{\pi}{6} + 2k\pi < \alpha < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$

$\because \alpha \in [0, 2\pi), \therefore \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{5\pi}{6}$

故选: B

【点睛】本题考查三角函数性质. 解三角函数不等式可以根据相应的正弦曲线或余弦曲线求.

6. 【答案】B

【解析】

【分析】根据图象得出函数 $y = 2\sin(\omega x + \varphi)$ 的最小正周期, 可求得 ω 的值, 再由函数图象过点 $\left(\frac{\pi}{8}, 2\right)$

结合 φ 的取值范围可求得 φ 的值, 由此可求得原函数的解析式.

【详解】由图象可知, 函数 $y = 2\sin(\omega x + \varphi)$ 的最小正周期为 $T = 2 \times \left(\frac{5\pi}{8} - \frac{\pi}{8}\right) = \pi$, 则 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$,

所以, $y = 2\sin(2x + \varphi)$,

又因为 $y \Big|_{x=\frac{\pi}{8}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = 2$, 可得 $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = 1$, 则 $\frac{\pi}{4} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$,

所以, $\varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$,

因为 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 则 $\varphi = \frac{\pi}{4}$, 因此, $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

故选: B.

7. 【答案】B

【解析】

【分析】由 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ，可得 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，再结合 $|2\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(2\vec{a} + \vec{b})^2}$ ，展开可求出答案。

【详解】由 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ ，可知 $(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2$ ，展开可得 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，

所以 $|2\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(2\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2}$ ，

又 $|\vec{a}| = 1$ ， $|\vec{b}| = 2$ ，所以 $|2\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{4\vec{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$ 。

故选：B。

【点睛】本题考查向量数量积的应用，考查学生的计算求解能力，注意向量的平方等于模的平方，属于基础题。

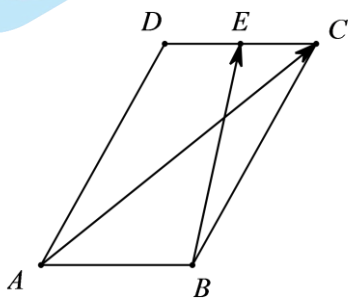
8. 【答案】C

【解析】

【分析】

作出图形，利用 $\vec{AB}$ 、 $\vec{AD}$ 表示向量 $\vec{AC}$ 、 $\vec{BE}$ ，然后利用平面向量数量积的运算律可求得 $\vec{AC} \cdot \vec{BE}$ 的值。

【详解】如下图所示：



由题意可得 $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ ， $\vec{BE} = \vec{BC} + \vec{CE} = \vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{AB}$ ，

$\because AD=1$ ， $AB=\frac{1}{2}$ ， $\angle BAD=60^\circ$ ，

$\therefore \vec{AB} \cdot \vec{AD} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}| \cos \angle BAD = \frac{1}{4}$ ，

因此， $\vec{AC} \cdot \vec{BE} = (\vec{AD} + \vec{AB}) \cdot \left(\vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{AB}\right) = \vec{AD}^2 + \frac{1}{2}\vec{AB} \cdot \vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{AB}^2 = 1^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$ 。

故选：C。

【点睛】关键点睛：本题考查平面向量数量积的计算，解答的关键就是利用合适的基底表示向量，考查计算能力，属于中等题。

9. 【答案】D

【解析】

【分析】由 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ 可求得 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的夹角，再利用充分条件和必要条件的定义判断可得出合适的选项.

【详解】设 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的夹角为 θ ，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ ，所以， $\cos \theta = 1$ ，

$\therefore 0 \leq \theta \leq \pi$ ， $\therefore \theta = 0$ ，而“ $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线” $\Leftrightarrow \theta = 0$ 或 π ，

因此，“ $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ ”是“ $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线”的充分不必要条件.

故选：D.

10. 【答案】C

【解析】

【分析】由已知条件可得出 $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ ，等式两边平方可得出 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ ，即可得出结论.

【详解】因为 $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} - 2\overrightarrow{PA} = (\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}) + (\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ，

由 $|\overrightarrow{CB}| - |\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} - 2\overrightarrow{PA}| = 0$ 可得 $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ ，

可得 $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2$ ，整理可得 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ ， $\therefore \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ ，

所以， $\triangle ABC$ 为直角三角形.

故选：C.

二、填空题（本大题共 5 小题，共 25.0 分）

11. 【答案】 $\frac{1}{2}$ ## 0.5

【解析】

【分析】由两角差的余弦公式化简可求得 $\cos 72^\circ \cos 12^\circ + \sin 72^\circ \sin 12^\circ$ 的值.

【详解】 $\cos 72^\circ \cos 12^\circ + \sin 72^\circ \sin 12^\circ = \cos(72^\circ - 12^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

故答案为： $\frac{1}{2}$.

12. 【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】首先求得向量的数量积，然后结合向量垂直的充分必要条件即可求得实数 k 的值.

【详解】由题意可得： $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 1 \times \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

由向量垂直的充分必要条件可得： $\left(k\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=0$ ，

即： $k\times\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}=k-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$ ，解得： $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

故答案为： $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

【点睛】本题主要考查平面向量的数量积定义与运算法则，向量垂直的充分必要条件等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力。

13. 【答案】 $-\frac{4}{9}$

【解析】

【分析】由题意得 $\vec{PA}\cdot(\vec{PB}+\vec{PC})=-\vec{PA}^2$ ，再求出线段 PA 长度即可。

【详解】解：因为 M 是 BC 的中点， $\vec{AP}=2\vec{PM}$ ， $|\vec{AM}|=1$ ，

所以 $\vec{PA}\cdot(\vec{PB}+\vec{PC})=\vec{PA}\cdot 2\vec{PM}=\vec{PA}\cdot\vec{AP}=-(\vec{PA})^2$ ，

$=-\left(\frac{2}{3}\vec{MA}\right)^2=-\frac{4}{9}$ 。

故答案为： $-\frac{4}{9}$ 。

14. 【答案】 ①. $\frac{3}{4}$ ②. 1

【解析】

【分析】

①用 $\vec{BA}, \vec{BC}$ 表示出 $\vec{BD}$ ，得出 x, y 的值即可求出 $x+y$ ；

②结合正三角形的性质，根据平面向量数量积的定义计算。

【详解】① $\because M$ 是 BC 的中点， $\therefore \vec{BM}=\frac{1}{2}\vec{BC}$ ，

$\because D$ 是 AM 的中点， $\therefore \vec{BD}=\frac{1}{2}\vec{BA}+\frac{1}{2}\vec{BM}=\frac{1}{2}\vec{BA}+\frac{1}{4}\vec{BC}$ ，

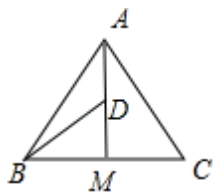
$\therefore x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{4}$ ，故 $x+y=\frac{3}{4}$ 。

② $\because \triangle ABC$ 是边长为2的正三角形， M 是 BC 的中点，

$\therefore AM \perp BC$ ，且 $BM=1$ ，

$\therefore \vec{BD}\cdot\vec{BM}=|\vec{BD}|\cdot|\vec{BM}|\cdot\cos\angle DBM=|\vec{BM}|^2=1$ 。

故答案为: $\frac{3}{4}$, 1.



【点睛】本题主要考查向量的运算及平面向量数量积公式，平面向量数量积公式有两种形式，一是

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta, \text{ 二是 } \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

15. 【答案】 ①. π ②. $-\frac{\pi}{3}$

【解析】

【分析】

(1) 利用周期公式求解即可.

(2) 对 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ 代入化简可求出 φ 的正切值, 写出表达式, 根据范围确定 φ 的值.

【详解】(1) $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

(2) 由 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ 可得 $\sin(\pi + \varphi) = -\sin\left(\frac{5\pi}{3} + \varphi\right)$, 利用诱导公式化简可得

$$-\sin \varphi = -\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right), \text{ 展开得 } \sin \varphi = \frac{1}{2} \sin \varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi, \therefore \tan \varphi = -\sqrt{3}$$

$$\therefore \varphi = -\frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z}), \text{ 又 } \because \varphi < \frac{\pi}{2}, \therefore \varphi = -\frac{\pi}{3}$$

【点睛】求三角函数的解析式时, 由 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 即可求出 ω ; 确定 φ 时, 若能求出离原点最近的右侧图象上

升(或下降)的“零点”横坐标 x_0 , 则令 $\omega x_0 + \varphi = 0$ 或 $\omega x_0 + \varphi = \pi$, 即可求出 φ , 否则需要代入点的坐标,

利用一些已知点的坐标代入解析式, 再结合函数的性质解出 ω 和 φ , 若对 A, ω 的符号或对 φ 的范围有要求, 则可用诱导公式变换使其符合要求.

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 85.0 分)

16. 【答案】 (1) $-\frac{3}{5}$ (2) $\frac{5}{4}$

【解析】

【分析】(1) 由角 α 的终边经过单位圆上的点 $P\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ ，直接利用任意角的三角函数的定义可求得 $\sin \alpha$ 的值；(2) 利用诱导公式与同角三角函数的关系化简原式，结合 (1) 可求得要求式子的值.

【详解】(1) $\because$ 点 $P\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ 在单位圆上，

$\therefore$ 由正弦的定义得 $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$.

$$(2) \frac{\cos(2\pi - \alpha)}{\sin(\pi + \alpha)} \cdot \frac{\tan(\pi + \alpha)}{\cos(3\pi - \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} \cdot \frac{\tan \alpha}{-\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha},$$

由余弦的定义得 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ，故原式 $= \frac{5}{4}$.

【点睛】本题主要考查诱导公式以及同角三角函数之间的关系的应用，属于中档题. 同角三角函数之间的关系包含平方关系与商的关系，平方关系是正弦与余弦值之间的转换，商的关系是正余弦与正切之间的转换.

17. 【答案】(1) 12; (2) $|2\vec{a} - \vec{b}| = 2\sqrt{21}$; (3) $\frac{\pi}{6}$.

【解析】

【分析】

(1) 先计算 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，再把 $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ 展开，代入已知计算可得答案；

(2) 先对 $2\vec{a} - \vec{b}$ 进行平方运算，再开方可得答案；

(3) 先对 $\vec{a} + \vec{b}$ 进行平方运算，再开方求其模长，再计算 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ ，最后代入夹角公式可得答案.

【详解】(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \times 2 \times \cos 120^\circ = -4$

所以 $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b}^2 = 16 + 4 - 8 = 12$;

(2) 因为 $(2\vec{a} - \vec{b})^2 = 4\vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 64 + 16 + 4 = 84$,

所以 $|2\vec{a} - \vec{b}| = 2\sqrt{21}$;

(3) 因为 $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 16 - 8 + 4 = 12$,

所以 $|\vec{a} + \vec{b}| = 2\sqrt{3}$ ，又 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 16 - 4 = 12$,

所以 $\cos \langle \vec{a}, \vec{a} + \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{a} + \vec{b}|} = \frac{12}{4 \times 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$.

【点睛】本题考查了向量的数量积、模长的计算，考查了向量的夹角公式，属于基础题.

18. 【答案】(1) $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + 2\vec{b}$;

(2) $-\frac{1}{2}$;

(3) 详见解析.

【解析】

【分析】(1) 根据向量的减法运算即得;

(2) 根据向量共线定理可得 $\overrightarrow{OA} = t\overrightarrow{OC}$, 进而可得 $\begin{cases} 2 = t \\ -1 = t\lambda \end{cases}$, 即得;

(3) 由题可得 $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}$, 然后根据向量共线定理结合条件即得.

【小问1详解】

因为 $\overrightarrow{OA} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{a} + \vec{b}$,

所以 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 3\vec{a} + \vec{b} - (2\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} + 2\vec{b}$;

【小问2详解】

因为 $\overrightarrow{OA} // \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$,

所以 $\overrightarrow{OA} = t\overrightarrow{OC}$, 即 $2\vec{a} - \vec{b} = t(\vec{a} + \lambda\vec{b})$, 又向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 不共线,

所以 $\begin{cases} 2 = t \\ -1 = t\lambda \end{cases}$, 解得 $t = 2, \lambda = -\frac{1}{2}$,

即 λ 的值为 $-\frac{1}{2}$;

【小问3详解】

当 $\lambda = -3$ 时, $\overrightarrow{OA} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{a} - 3\vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + 2\vec{b}$,

所以 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \vec{a} - 3\vec{b} - (2\vec{a} - \vec{b}) = -\vec{a} - 2\vec{b} = -\overrightarrow{AB}$,

所以 $\overrightarrow{AC} // \overrightarrow{AB}$, 又 $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ 有公共点 A,

所以 A, B, C 三点共线.

19. 【答案】(1) $\tan 2\alpha = \frac{24}{7}$, $\sin 2\alpha = \frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$.

$$(2) \sin \beta = \frac{33}{65}$$

【解析】

【分析】(1) 二倍角公式直接求 $\tan 2\alpha$ ，由 $\tan 2\alpha$ 的正负判断角的范围，结合 $(\sin 2\alpha)^2 + (\cos 2\alpha)^2 = 1$ 解出 $\sin 2\alpha$ 和 $\cos 2\alpha$ 的值.

(2) 由 $\tan \alpha$ 的值和 α 的范围求出 $\sin \alpha$ 、 $\cos \alpha$ 的值，利用 $\beta = \alpha + \beta - \alpha$ ，结合两角差的正弦公式即可求出 $\sin \beta$ 的值.

【小问 1 详解】

$$\text{解：因为 } \tan \alpha = \frac{3}{4}, \text{ 所以 } \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{24}{7};$$

又 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $2\alpha \in (0, \pi)$, $\tan 2\alpha = \frac{24}{7} > 0$, 所以 $2\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\sin 2\alpha > 0$, $\cos 2\alpha > 0$, 又

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{24}{7}, \text{ 且 } (\sin 2\alpha)^2 + (\cos 2\alpha)^2 = 1, \text{ 解得: } \sin 2\alpha = \frac{24}{25}, \cos 2\alpha = \frac{7}{25}.$$

【小问 2 详解】

因为 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 且 $\tan \alpha = \frac{3}{4}$, 所以 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$,

因为 β 为锐角, $\cos(\alpha + \beta) = \frac{5}{13} > 0$, 所以 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{12}{13}$,

则 $\sin \beta = \sin(\alpha + \beta - \alpha) = \sin(\alpha + \beta)\cos \alpha - \cos(\alpha + \beta)\sin \alpha$

$$= \frac{12}{13} \times \frac{4}{5} - \frac{5}{13} \times \frac{3}{5} = \frac{33}{65}.$$

$$20. \text{【答案】(1) } \left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right] (k \in \mathbb{Z})$$

$$(2) x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$$

$$(3) \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$$

【解析】

【分析】(1) 利用三角恒等变换函数解析式为 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 解不等式

$2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 可求得函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 解方程 $2x + \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 可得出函数 $f(x)$ 的对称轴方程;

(3) 由 $x \in [0, m]$ 可得出 $2x + \frac{\pi}{6}$ 的取值范围, 结合正弦型函数的值域可得出关于实数 m 的不等式, 解之即可.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned} \text{解: } f(x) &= \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 2\cos^2 x - 1 = \left(\sin 2x \cos \frac{\pi}{6} - \cos 2x \sin \frac{\pi}{6}\right) + \cos 2x \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right), \end{aligned}$$

由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 可得 $k\pi - \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$,

所以, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right] (k \in \mathbf{Z})$.

【小问 2 详解】

解: 由 $2x + \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 可得 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$,

所以, 函数 $f(x)$ 的对称轴方程为 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$.

【小问 3 详解】

解: 当 $x \in [0, m]$ 时, $\frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2m + \frac{\pi}{6}$,

因为函数 $y = f(x)$ 在区间 $[0, m]$ 上的值域为 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$,

所以, $\frac{\pi}{2} \leq 2m + \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6}$, 解得 $\frac{\pi}{6} \leq m \leq \frac{\pi}{3}$.

因此, 实数 m 的取值范围是 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$.

21. 【答案】(1) $f(x) = \sqrt{3} \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$; (2) $[0, 1]$.

【解析】

【分析】(1) 利用正弦函数的周期性求得 ω , 再根据函数的最值求得 b 的值, 可得函数 $f(x)$ 的解析式.

(2) 根据 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换规律, 求得 $g(x)$ 的解析式, 再根据 $g(x) - 2 \leq m \leq g(x) + 2$ 在

$x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ 上恒成立, 求得 m 的范围.

【详解】(1) 因为函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) + b$ ($\omega > 0$), 且函数图象的对称中心到对称轴的最小

距离为 $\frac{\pi}{4}$, 所以 $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{4}$, 可得 $T = \pi$,

由 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 可得 $\omega = 2$,

所以 $f(x) = \sqrt{3} \sin(2x - \frac{\pi}{6}) + b$,

因为当 $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ 时, $2x - \frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$,

由 $y = \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 上单调递增, 可得当 $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, 即 $x = \frac{\pi}{4}$ 时,

函数 $f(x)$ 取得最大值 $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3} + b$,

所以 $\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3} + b = 2$,

解得 $b = \frac{1}{2}$,

所以 $f(x) = \sqrt{3} \sin(2x - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}$.

(2) 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到函数解析式为:

$$g(x) = \sqrt{3} \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{12}\right) - \frac{\pi}{6}\right] + \frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{3} \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2},$$

因为当 $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$ 时, $2x - \frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$,

$$g(x) = \sqrt{3} \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \in [-1, 2],$$

所以 $g(x) - 2 \in [-3, 0]$, $g(x) + 2 \in [1, 4]$,

因为 $g(x) - 2 \leq m \leq g(x) + 2$ 在 $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$ 上恒成立,

$$\therefore (g(x)-2)_{\max} \leq m \leq (g(x)+2)_{\min}$$

所以 $m \in [0,1]$.-



关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯