2024 届高三数学试题(理科)

考生注意:

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,共 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

第Ⅰ卷

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知 $a\in\mathbf{R}$,复数 $(a+2\mathrm{i})\mathrm{i}+a+3\mathrm{i}$ 为纯虚数,则 $a=$

   A. 3　　B. -3　　C. 2　　D. -2

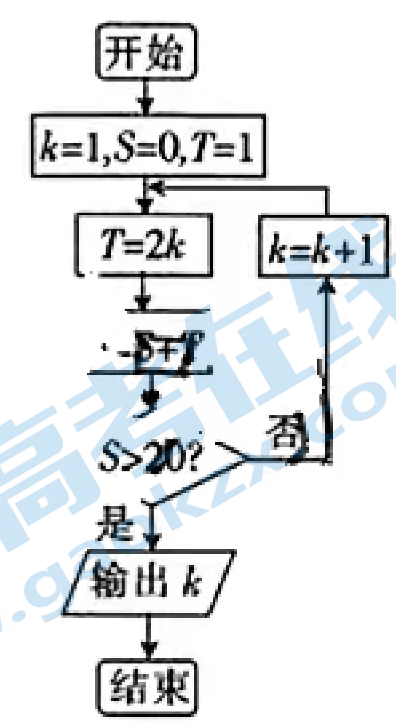
2. 设集合 $A=\{y|y=x^2-1\}$,$B=\{x|x(x+2)<0\}$,则 $A\cap B=$

   A. $[-1,0)$　　B. $(-2,0)$　　C. $(-\infty,1]$　　D. $\varnothing$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(x,1)$,$\boldsymbol{b}=(-1,2)$,若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,则 $|\boldsymbol{a}|=$

   A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$　　B. $2\sqrt{5}$

   C. $\sqrt{5}$



4. 执行如图所示的程序框图,输出的 $k=$

   A. 4

   B. 5

   C. 6

   D. 7

5. 在平面直角坐标系中,角 α 以坐标原点为顶点,x 轴的正半轴为始边. 若点 $(3,-4)$ 在角 α 的终边上,则 $\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})=$

   A. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$　　B. $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{10}$　　D. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$

6. 已知函数 $f(x)=x^3-x-1$ 和直线 $l:y=2x+a$,则"$a=-3$"是"直线 l 与曲线 $y=f(x)$ 相切"的

   A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

   C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 S_n,若 $S_{11}=2^{11}$,则 $a_4{a_7}^2=$

   A. 16　　B. 8　　C. 6　　D. 4

8. 已知 $a=2^{0.6}$，$b=3^{0.4}$，$c=\log_{0.5}0.6$，则

A. $a>b>c$　　　　B. $b>a>c$

C. $c>b>a$　　　　D. $a>c>b$

9. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})-1(\omega>0)$在$[0,\pi]$上恰有一个零点，则 ω 的取值范围为

A. $(\frac{1}{4},\frac{9}{4}]$　　　　B. $[\frac{3}{4},\frac{7}{4})$

C. $(\frac{3}{4},\frac{7}{4}]$　　　　D. $[\frac{1}{4},\frac{9}{4})$

10. 某学校举行乒乓球比赛，有 12 人报名参加，其中男生 6 人，女生 6 人，将这 12 人分成 3 个组（每组 2 个男生和 2 个女生），则不同的分组方法有

A. $(C_6^2C_4^2C_2^2)^2A_3^3$ 种　　　　B. $(C_6^2C_4^2C_2^2)^2$ 种

C. $\frac{(C_6^2C_4^2C_2^2)^2}{A_3^3}$种　　　　D. $(\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3})^2$ 种

11. 已知 O 为坐标原点，$|OA|=2$，$|OB|=5$，点 C 与点 B 关于 y 轴对称，则$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$的最小值为

A. [illegible]　　　　B. -6　　　　C. -2　　　　D. -1

12. 已知直线 l 与曲线 $y=\frac{[illegible]}{2[illegible]+1}$相交，交点依次为 A,B,C，若$|AB|=|BC|=\frac{\sqrt{10}}{3}$，则直线 l 的方程为

A. $x-3y+3=0$　　　　B. $x-3y-3=0$

C. $x-6y+6=0$　　　　D. $x-6y-6=0$

第Ⅱ卷

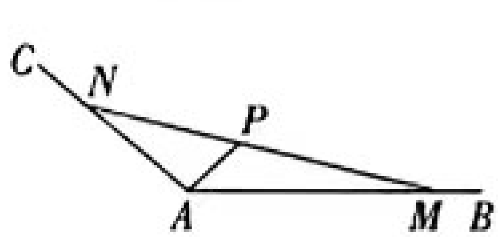
二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，当 $x\in[0,+\infty)$时，$f(x)=\lg(x+1)+m$，且 $f(9)+f(-9)=6$，则 $m=$___▲___.

14. 若 x,y 满足约束条件$\begin{cases}x-y-1\geqslant 0,\\2x+3y-4\leqslant 0,\\y\geqslant -2,\end{cases}$则目标函数 $z=2x+y$ 的最大值为___▲___.

15. 若 $\forall x_1,x_2\in[2,4]$，当 $x_1<x_2$ 时，$e^{x_1^2-x_2^2}>(\frac{x_2}{x_1})^a$，则实数 a 的取值范围是___▲___.

16. 某景区的平面图如图所示，其中 AB,AC 为两条公路，$\angle BAC=135°$，P 为景点，$AP=10$，$AP\perp AC$，现需要修建一条经过景点 P 的观光路线 MN，M,N 分别为 AB,AC 上的点，则$\triangle AMN$ 面积的最小值为___▲___.



三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(一)必考题：共 60 分.

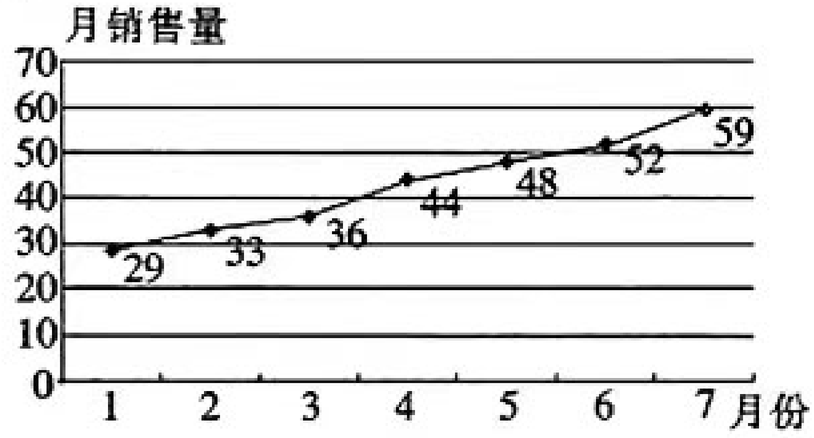
17.(12 分)

某商家 2023 年 1 月至 7 月 A 商品的月销售量的数据如下图所示，若月份 x 与 A 商品的月销售量 y 存在线性关系.

(1)求月份 x 与 A 商品的月销售量 y 的回归方程；

(2)若规定月销售量大于 35 的月份为合格月，在合格月中月销售量低于 50 的视为良好，记 5 分，月销售量不低于 50 的视为优秀，记 10 分，从合格月中任取 3 个月，用 X 表示赋分之和，求 X 的分布列和数学期望.

参考公式：回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，其中 $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$，$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$\sum\limits_{i=1}^{7}x_iy_i=1344$，$\overline{y}=43$.



18.(12 分)

已知数列$\{a_n\}$满足$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}=n^2+n$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

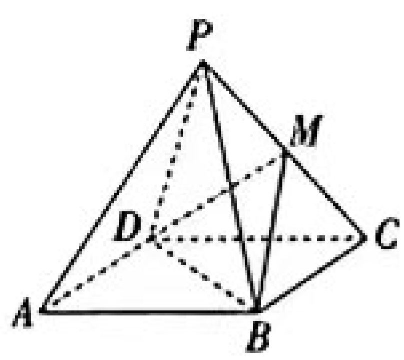
(2)设 $b_n=\dfrac{32n+16}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n.

19.(12 分)

已知四棱锥 $P-ABCD$ 的所有棱长均为 2，$AD\perp AB$.

(1)证明：平面 $PBD\perp$平面 $ABCD$.

(2)若 M 是线段 PC 上的点，且二面角 $M-BD-C$ 为 45°，求 BM 与平面 PCD 所成角的正弦值.



20.(12 分)

设 A,B 为抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 上两点，直线 AB 的斜率为 4，且 A 与 B 的纵坐标之和为 2.

(1)求抛物线 C 的方程；

(2)已知 O 为坐标原点，F 为抛物线 C 的焦点，直线 l 交抛物线 C 于 M,N 两点(异于点 O)，以 MN 为直径的圆经过点 O，求$\triangle FMN$ 面积的最小值.

21.(12 分)

已知 x_1,x_2 是函数 $f(x)=2(x-1)\ln x-m(x+1)$ 的两个零点，且 $x_1<x_2$.

(1)求 m 的取值范围；

(2)证明：$(m+1)x_1<x_2$.

(二)选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22.[选修 4—4：坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=3+2\cos\alpha, \\ 2\sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数)，以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1)求曲线 C 的极坐标方程；

(2)已知倾斜角为 β 的直线 l 经过原点 O，且 l 与曲线 C 相交于 A,B 两点，若 $\frac{1}{|OA|}+\frac{1}{|OB|}=\frac{3\sqrt{3}}{5}$，求 β 的值.

23.[选修 4—5：不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=|x+a^2|+|x-b^2|$.

(1)若 $a=1,b=\sqrt{2}$，解不等式 $f(x)\leqslant 5$；

(2)若 $f(x)$ 的最小值为 1，求 $a+2b$ 的最大值.

2024 届高三数学试题参考答案(理科)

1. C　$(a+2\mathrm{i})\mathrm{i}+a+3\mathrm{i}=a-2+(a+3)\mathrm{i}$,所以 $a-2=0$,解得 $a=2$.

2. A　依题得,$A=\{y|y=x^2-1\}=[-1,+\infty)$,$B=\{x|x(x+2)<0\}=(-2,0)$,则 $A\cap B=[-1,0)$.

3. D　因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,所以 $2x=-1$,解得 $x=-\frac{1}{2}$,则 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

4. B　执行该程序框图,$k=1,S=0,T=1$,则 $T=2,S=0+2=2$,不满足 $S>20$,则 $k=2,T=4$,$S=2+4=6$,不满足 $S>20$,则 $k=3,T=6,S=6+6=12$,不满足 $S>20$,则 $k=4,T=8,S=12+8=20$,不满足 $S>20$,则 $k=5,T=10,S=20+10=30$,满足 $S>20$,输出 $k=5$.

5. D　由点$(3,-4)$在角 α 的终边上,得 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$,$\cos\alpha=\frac{3}{5}$,

所以 $\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})=\cos\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\sin\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{10}$.

6. A　设函数 $f(x)=x^3-x-1$ 的图象和直线 l:$y=2x+a$ 的切点坐标为(x_0,y_0),则 $\begin{cases}f'(x_0)=3x_0^2-1=2,\\x_0^3-x_0-1=2x_0+a,\end{cases}$ 可得 $a=-3$ 或 $a=1$. 当 $a=-3$ 时,直线 l 与曲线 $y=f(x)$ 相切,但由直线 l 与曲线 $y=f(x)$ 相切不能推出 $a=-3$,故“$a=-3$”是“直线 l 与曲线 $y=f(x)$ 相切”的充分不必要条件.

7. B　设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,$S_{11}=a_1a_2\cdots a_{10}a_{11}=a_6^{11}=2^{11}$,则 $a_6=2$,所以 $a_4a_7^2=\frac{a_6}{q^2}(a_6q)^2=a_6^3=8$.

8. B　因为 $a^5=2^3=8$,$b^5=3^2=9$,$c=\log_{0.5}0.6<1$,所以 $b>a>c$.

9. D　当 $x\in[0,\pi]$时,$\omega x+\frac{\pi}{4}\in[\frac{\pi}{4},\omega\pi+\frac{\pi}{4}]$,所以 $\frac{\pi}{2}\leqslant\omega\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{5\pi}{2}$,解得 $\frac{1}{4}\leqslant\omega<\frac{9}{4}$.

10. C　不同的分组方法有 $\frac{(C_6^2C_4^2C_2^2)^2}{A_3^3}$ 种.

11. C　不妨设 $B(5\cos\alpha,5\sin\alpha)$,$C(-5\cos\alpha,5\sin\alpha)$,$\alpha\in[0,\frac{\pi}{2})$,$A(2\cos\beta,2\sin\beta)$,

则 $\overrightarrow{BA}=(2\cos\beta-5\cos\alpha,2\sin\beta-5\sin\alpha)$,$\overrightarrow{BC}=(-10\cos\alpha,0)$,

所以 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-20\cos\beta\cos\alpha+50\cos^2\alpha\geqslant-20\cos\alpha+50\cos^2\alpha=50(\cos\alpha-\frac{1}{5})^2-2\geqslant-2$,

当且仅当 $\cos\beta=1$,$\cos\alpha=\frac{1}{5}$ 时,等号成立,此时取得最小值 -2.

12. A　令 $f(x)=\frac{2^{x+1}}{2^x+1}$,则 $f(-x)+f(x)=\frac{2^{-x+1}}{2^{-x}+1}+\frac{2^{x+1}}{2^x+1}=\frac{2}{2^x+1}+\frac{2^{x+1}}{2^x+1}=\frac{2^{x+1}+2}{2^x+1}=2$,所以曲线 $y=\frac{2^{x+1}}{2^x+1}$ 关于点$(0,1)$对称,且 $f(x)=\frac{2^{x+1}}{2^x+1}=2-\frac{2}{2^x+1}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 因为

$|AB|=|BC|=\frac{\sqrt{10}}{3}$,所以直线 l 经过点(0,1),联立方程$\begin{cases} y=\frac{2^{x+1}}{2^x+1}, \\ x^2+(y-1)^2=\frac{10}{9}, \end{cases}$ 则 $x^2+(\frac{2^{x+1}}{2^x+1}-1)^2=\frac{10}{9}$,即 $x^2+(\frac{2^x-1}{2^x+1})^2=\frac{10}{9}$. 令 $g(x)=x^2+(\frac{2^x-1}{2^x+1})^2$,则 $g(-x)=(-x)^2+(\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1})^2=x^2+(\frac{2^x-1}{2^x+1})^2=g(x)$,故 $g(x)$为偶函数. 又 $y=x$ 和 $y=\frac{2^x-1}{2^x+1}$在$[0,+\infty)$上均恒大于等于 0 且单调递增,所以 $g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增. 因为 $g(1)=\frac{10}{9}$,所以 $x^2+(\frac{2^{x+1}}{2^x+1}-1)^2=\frac{10}{9}$的解为 $x=1$ 或 $x=-1$,所以直线 l 过点$(1,\frac{4}{3})$,所以直线 l 的方程为 $x-3y+3=0$.来源:高三答案公众号

13. 2　$f(9)+f(-9)=2f(9)=6$,所以 $f(9)=3$,即 $\lg 10+m=3$,解得 $m=2$.

14. 8　画出可行域(图略),当直线 $l:z=2x+y$ 平移到过点$(5,-2)$时,z 取得最大值,最大值为 8.

15. $(-\infty,-32]$　$e^{x_1^2-x_2^2}>(\frac{x_2}{x_1})^a$ 等价于 $\ln e^{x_1^2-x_2^2}>\ln(\frac{x_2}{x_1})^a$,

即等价于 $x_1^2-x_2^2>a\ln x_2-a\ln x_1$,即等价于 $x_1^2+a\ln x_1>x_2^2+a\ln x_2$.

令 $f(x)=x^2+a\ln x,x\in[2,4]$,

则本题可转化为 $\forall x_1,x_2\in[2,4]$,当 $x_1<x_2$ 时,$f(x_1)>f(x_2)$,

即函数 $f(x)$在$[2,4]$上单调递减,即 $\forall x\in[2,4]$,$f'(x)=2x+\frac{a}{x}\leqslant 0$,则 $a\leqslant -2x^2$.

又 $x\in[2,4]$,所以 $a\leqslant -32$,所以实数 a 的取值范围是$(-\infty,-32]$.

16. 200　设 $AM=a,AN=b$,由 $S_{\triangle APN}+S_{\triangle APM}=S_{\triangle AMN}$,可得$\frac{1}{2}AN\cdot AP+\frac{1}{2}AM\cdot AP\cdot\sin 45°=\frac{1}{2}AM\cdot AN\cdot\sin 135°$,即 $10a+10\sqrt{2}b=ab$. 由 $10a+10\sqrt{2}b=ab\geqslant 2\sqrt{10a\times 10\sqrt{2}b}$,解得 $ab\geqslant 400\sqrt{2}$,当且仅当 $a=20\sqrt{2},b=20$ 时,等号成立,此时取得最小值. 故$\triangle AMN$ 面积的最小值为$\frac{1}{2}ab\cdot\sin 135°=200$.

17. 解:(1)$\bar{x}=\frac{1}{7}(1+2+3+4+5+6+7)=4,\bar{y}=43$, ………………………………………… 1 分

$\sum_{i=1}^{7}x_i^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2=140$, ………………………………………… 2 分

所以 $\hat{b}=\frac{1344-7\times4\times43}{140-7\times4^2}=5$, ………………………………………… 3 分

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\cdot\bar{x}=43-5\times4=23$, ………………………………………… 5 分

所以 $\hat{y}=5x+23$. ………………………………………… 6 分

(2)由题可知,合格月有 5 个,其中记为 5 分的月份有 3 个,记为 10 分的月份有 2 个, ……………………………………………… 7 分

所以 $P(X=15)=\frac{1}{C_5^3}=\frac{1}{10}$，$P(X=20)=\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\frac{3}{5}$，$P(X=25)=\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$， ………… 9 分

所以 X 的分布列为

X	15	20	25
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

……… 10 分

数学期望 $E(X)=15\times\frac{1}{10}+20\times\frac{3}{5}+25\times\frac{3}{10}=21$. …………………………………… 12 分

18. 解：(1)由 $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}=n^2+n$，①

当 $n=1$ 时，$\sqrt{a_1}=2$，即 $a_1=4$， ……………………………………………………………… 2 分

当 $n\geqslant2$ 时，$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_{n-1}}=(n-1)^2+(n-1)$. ②……………………………… 3 分

①－②得 $\sqrt{a_n}=2n$，即 $a_n=4n^2$， …………………………………………………………… 5 分

$a_1=4$ 符合上式，故 $a_n=4n^2$. …………………………………………………………………… 6 分

(2)由(1)知 $b_n=\frac{32n+16}{4n^2\times4(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$， …………………………………………… 9 分

$S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=(\frac{1}{1}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{9})+\cdots+[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}]=1-\frac{1}{(n+1)^2}$. ……

…………………………………………………………………………………………………… 12 分

19. (1)证明：连接 AC，交 BD 于点 O，连接 PO.

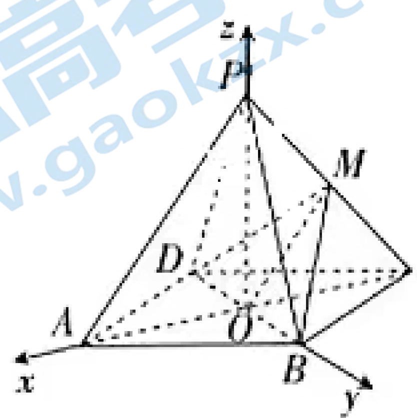
因为 $AB=BC=CD=AD$，且 $AD\perp AB$，所以 $AC\perp BD$，…………………………………………… 1 分

则 O 为 AC 和 BD 的中点，所以 $AO=\sqrt{2}$，$PO=\sqrt{2}$， ……………… 2 分

则 $AP^2=AO^2+PO^2$，所以 $OP\perp AC$. ……………………………………… 3 分

因为 $OP\cap BD=O$，所以 $AC\perp$平面 PBD. ……………………………… 4 分

又 $AC\subset$平面 $ABCD$，所以平面 $PBD\perp$平面 $ABCD$. ……………… 5 分



(2)解：连接 MO. 易知$\triangle PDC\cong\triangle PBC$，所以 $DM=MB$，则 $MO\perp BD$，

所以$\angle MOC$ 为二面角 $M-BD-C$ 的平面角，即$\angle MOC=45°$. ………………………… 6 分

由(1)可知$\triangle POC$ 为等腰直角三角形，所以 M 为 PC 的中点. ………………………… 7 分

以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OP}$的方向分别为 x，y，z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $B(0,\sqrt{2},0)$，$D(0,-\sqrt{2},0)$，$C(-\sqrt{2},0,0)$，$P(0,0,\sqrt{2})$，$M(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})$，

所以$\overrightarrow{MB}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$，$\overrightarrow{DC}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{PD}=(0,-\sqrt{2},-\sqrt{2})$. ………… 8 分

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，BM 与平面 PCD 所成的角为 θ，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=0,\\-\sqrt{2}y-\sqrt{2}z=0,\end{cases}$取 $y=1$，则 $x=1$，$z=-1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,1,-1)$， … 10 分

所以 $\sin\theta=|\cos\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{MB}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MB}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{MB}|}=\dfrac{\left|\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right|}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以 BM 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. ························ 12 分

20. 解：(1) 设 $A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，则 $y_A^2=2px_A$，$y_B^2=2px_B$，$y_A+y_B=2$. ············ 2 分

直线 AB 的斜率 $k=\dfrac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\dfrac{y_A-y_B}{\dfrac{y_A^2}{2p}-\dfrac{y_B^2}{2p}}=\dfrac{2p}{y_A+y_B}=4$， ············ 4 分

解得 $p=4$，所以抛物线 C 的方程为 $y^2=8x$. ············ 5 分

(2) 设直线 l 的方程为 $x=my+n$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}x=my+n,\\ y^2=8x,\end{cases}$ 消去 x 得 $y^2-8my-8n=0$，且 $\Delta=64m^2+32n>0$，

由韦达定理得 $y_1+y_2=8m$，$y_1y_2=-8n$. ············ 7 分

以 MN 为直径的圆经过点 O，即 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{y_1^2y_2^2}{64}+y_1y_2=0$，解得 $y_1y_2=-64$， ············ 9 分

即 $y_1y_2=-8n=-64$，则 $n=8$，直线 l 恒过定点 $(8,0)$. ············ 10 分

易知 $F(2,0)$，$S_{\triangle FMN}=\dfrac{1}{2}\cdot(8-2)\times|y_1-y_2|=3\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=24\sqrt{m^2+4}\geq 48$，

故 $\triangle FMN$ 面积的最小值为 48. ············ 12 分

21. (1) 解：令 $f(x)=0$，则 $m=\dfrac{2(x-1)\ln x}{x+1}$. ············ 1 分

令 $g(x)=\dfrac{2(x-1)\ln x}{x+1}$，则 $g'(x)=\dfrac{2\left(2\ln x+x-\dfrac{1}{x}\right)}{(x+1)^2}$. ············ 2 分

因为 $y=2\ln x+x-\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且当 $x=1$ 时，$y=0$，所以当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，则 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，则 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. ············ 4 分

因为函数 $f(x)$ 有两个零点，当 $x\to 0$ 时，$g(x)\to+\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，所以 $m>g(1)=0$，即 m 的取值范围为 $(0,+\infty)$. ············ 5 分

(2) 证明：$f'(x)=2\ln x-\dfrac{2}{x}+2-m$，所以 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增， ············ 6 分

而 $f'(e^{-\frac{m}{2}})=-\dfrac{2}{e^{-\frac{m}{2}}}+2-2m<0$ 且 $f'(e^{\frac{m}{2}})=-\dfrac{2}{e^{\frac{m}{2}}}+2>0$， ············ 7 分

因此 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一零点 x_0，即 $f'(x_0)=2\ln x_0-\dfrac{2}{x_0}+2-m=0$，

$f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $f(e^{-\frac{m}{2}})=-2me^{-\frac{m}{2}}<0$，$f(e^{\frac{m}{2}})=-2m<0$， ············ 8 分

由 $f(x)$ 的单调性得 $0<x_1<e^{-\frac{m}{2}}<e^{\frac{m}{2}}<x_2$，所以 $\frac{x_2}{x_1}>e^m$. ······························ 9 分

令 $h(x)=e^x-x-1$，则 $h'(x)=e^x-1$，所以当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$h'(x)<0$，则 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，则 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)\geqslant h(0)$，即 $e^x\geqslant x+1$，······························ 11 分

所以 $x_2>e^m x_1\geqslant(m+1)x_1$. ······························ 12 分

22. 解(1)由 $\begin{cases}x=3+2\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha,\end{cases}$ 得 $(x-3)^2+y^2=4$，即 $x^2+y^2-6x+5=0$. ······························ 2 分

将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入上式，得 $\rho^2-6\rho\cos\theta+5=0$，

所以曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-6\rho\cos\theta+5=0$. ······························ 4 分

(2)因为倾斜角为 β 的直线 l 经过原点 O，所以直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\beta$，

设 A，B 对应的参数分别为 ρ_1，ρ_2，

将 $\theta=\beta$ 代入 $\rho^2-6\rho\cos\theta+5=0$，得 $\rho^2-6\rho\cos\beta+5=0$，······························ 6 分

则 $\rho_1+\rho_2=6\cos\beta$，$\rho_1\rho_2=5$. ······························ 7 分

又 $\frac{1}{|OA|}+\frac{1}{|OB|}=\frac{|OA|+|OB|}{|OA||OB|}=\left|\frac{6\cos\beta}{5}\right|=\frac{3\sqrt{3}}{5}$，所以 $\cos\beta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. ······························ 9 分

又 $0\leqslant\beta<\pi$，所以 $\beta=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$. ······························ 10 分

23. 解：(1)由 $a=1$，$b=\sqrt{2}$，$f(x)\leqslant5$ 可得 $|x+1|+|x-2|\leqslant5$.

当 $x<-1$ 时，原不等式等价于 $-x-1+2-x\leqslant5$，解得 $x\geqslant-2$，此时 $-2\leqslant x<-1$；··· 1 分

当 $-1\leqslant x\leqslant2$ 时，原不等式等价于 $x+1+2-x\leqslant5$，不等式恒成立，此时 $-1\leqslant x\leqslant2$；······························ 2 分

当 $x>2$ 时，原不等式等价于 $x+1+x-2\leqslant5$，解得 $x\leqslant3$，此时 $2<x\leqslant3$. ··············· 3 分

故不等式 $f(x)\leqslant5$ 的解集为 $[-2,3]$. ······························ 5 分

(2) $f(x)=|x+a^2|+|x-b^2|\geqslant|(x+a^2)-(x-b^2)|=a^2+b^2$，所以 $a^2+b^2=1$. ······ 7 分

由柯西不等式可知 $(a^2+b^2)(1+4)\geqslant(a+2b)^2$，······························ 9 分

所以 $a+2b\leqslant\sqrt{5}$，当且仅当 $a=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$b=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 时，等号成立，此时取得最大值，最大值为 $\sqrt{5}$. ······························ 10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！