



注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

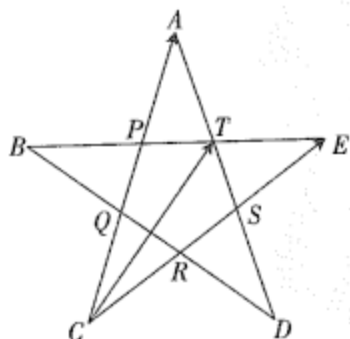
1. 设复数 z 满足 $z+i(1-i) \in \mathbf{R}$, 则 z 的虚部为
A. 1 B. -1 C. i D. -i
2. 已知 m, n 是平面 α 内的两条相交直线, 且直线 $l \perp n$, 则“ $l \perp m$ ”是“ $l \perp \alpha$ ”的
A. 充要条件 B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 根据某医疗研究所的调查, 某地区居民血型的分布为 O 型 49%, A 型 19%, B 型 25%, AB 型 7%。已知同种血型的人可以互相输血, O 型血的人可以给任何一种血型的人输血, AB 型血的人可以接受任何一种血型的血, 其他不同血型的人不能互相输血。现有一血型为 B 型的病人需要输血, 若在该地区任选一人, 则能为该病人输血的概率为
A. 25% B. 32% C. 74% D. 81%
4. 已知正数 a, b 是关于 x 的方程 $x^2 - (m^2 + 4)x + m = 0$ 的两根, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为
A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. $4\sqrt{2}$
5. 已知 $a = \log_3 15, b = \log_4 20, 2^c = 1.9$, 则
A. $a > c > b$ B. $c > a > b$ C. $b > a > c$ D. $a > b > c$
6. 当前, 新冠肺炎疫情进入常态化防控新阶段, 防止疫情输入的任务依然繁重, 疫情防控工作形势依然严峻、复杂。某地区安排 A, B, C, D, E 五名同志到三个地区开展防疫宣传活动, 每个地区至少安排一人, 且 A, B 两人安排在同一个地区, C, D 两人不安排在同一个地区, 则不同的分配方法总数为
A. 86 种 B. 64 种 C. 42 种 D. 30 种
7. 庄严美丽的国旗和国徽上的五角星是革命和光明的象征, 正五角星是一个非常优美的几何图形, 且与黄金分割有着密切的联系。在如图所示的正五角星中, 以 A, B, C, D, E 为顶点的多边形为正五边形, 且 $\frac{PT}{AT} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 则

A. $\overrightarrow{CT} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{CE}$

B. $\overrightarrow{CT} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{CE}$

C. $\overrightarrow{CT} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{3-\sqrt{5}}{4}\overrightarrow{CE}$

D. $\overrightarrow{CT} = \frac{3-\sqrt{5}}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{CE}$



$f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增. 4分

(2) 因为 $f(x) > \frac{1}{x} - e^{1-x} + a$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $ax - \ln x > \frac{1}{x} - e^{1-x} + a$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,

所以 $ax - \ln x - a > \frac{e^{x-1} - x}{xe^{x-1}}$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立. 5分

设 $h(x) = e^{x-1} - x (x > 1)$, 则 $h'(x) = e^{x-1} - 1 > 0$, 则 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的单调递增.

因为 $h(1) = 0$, 所以 $h(x) > 0$ 6分

设 $g(x) = ax - \ln x - a$, 则 $g'(x) = a - \frac{1}{x}$.

当 $a \leq 0$ 时, $g'(x) < 0$, 则 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

因为 $g(1) = 0$, 所以 $g(x) < 0$, 所以 $ax - \ln x - a < \frac{e^{x-1} - x}{xe^{x-1}}$, 故 $a \leq 0$ 不符合题意. 7分

当 $0 < a < 1$ 时, 由(1)可知 $g(x)$ 在 $(1, \frac{1}{a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增,

则 $g(\frac{1}{a}) < g(1) = 0$, 从而 $\exists x \in (1, +\infty)$, $ax - \ln x - a < \frac{e^{x-1} - x}{xe^{x-1}}$, 故 $0 < a < 1$ 不符合题意. 8分

当 $a \geq 1$ 时, 设 $\varphi(x) = ax - \ln x - a - \frac{1}{x} + e^{1-x} (x > 1)$, 则 $\varphi'(x) = a - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - e^{1-x} (x > 1)$.

因为 $h(x) > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $e^{x-1} > x$, 所以 $e^{1-x} < \frac{1}{x}$,

则 $\varphi'(x) = a - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - e^{1-x} > a - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{ax^2 - 2x + 1}{x^2}$ 9分

因为 $a \geq 1$, 所以 $ax^2 - 2x + 1 \geq x^2 - 2x + 1 > 0$, 所以 $\varphi'(x) > 0$,

则 $\varphi(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 从而 $\varphi(x) > \varphi(1) = 0$,

即 $ax - \ln x - a > \frac{e^{x-1} - x}{xe^{x-1}}$, 故 $a \geq 1$ 符合题意. 11分

综上, a 的取值范围为 $[1, +\infty)$

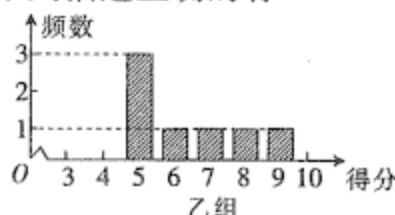
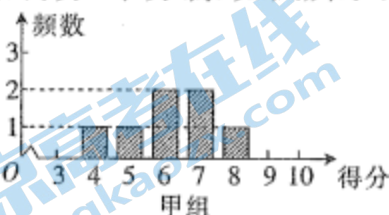
8. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = \sin \pi x$, 且满足当 $x > 1$ 时, $f(x) = 2f(x-2)$, 若对任意 $x \in [-m, m]$, $f(x) \leq 2\sqrt{3}$ 成立, 则 m 的最大值为
- A. $\frac{23}{6}$ B. $\frac{10}{3}$ C. $\frac{25}{6}$ D. $\frac{13}{3}$

二、选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知集合 $A = \{x | \log_2 x < 1\}$, $B = \{x | 4 - 3x > 0\}$, 则

- A. $A \cap B = \{x | 0 < x < \frac{4}{3}\}$ B. $A \cup B = \{x | x < 2\}$
 C. $A \cap B = \emptyset$ D. $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cup B = \{x | x < \frac{4}{3} \text{ 或 } x > 2\}$

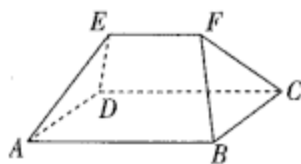
10. 为了普及环保知识, 增强环保意识, 某学校分别从两个班各抽取 7 位同学分成甲、乙两组参加环保知识测试, 得分(十分制)如图所示, 则下列描述正确的有



- A. 甲、乙两组成绩的平均分相等
 B. 甲、乙两组成绩的中位数相等
 C. 甲、乙两组成绩的极差相等
 D. 甲组成绩的方差小于乙组成绩的方差
11. 已知函数 $f(x) = e^x - e^{-x} - \sin 2x$, 若 $f(x_1) > f(x_2)$, 则
- A. $x_1^2 > x_2^2$ B. $e^{x_1 - x_2} > 1$ C. $\ln|x_1| > \ln|x_2|$ D. $x_1|x_1| > x_2|x_2|$
12. 已知 F_1, F_2 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, P 为椭圆上任意一点(不在 x 轴上), $\triangle PF_1F_2$ 外接圆的圆心为 H , $\triangle PF_1F_2$ 内切圆的圆心为 I , 直线 PI 交 x 轴于点 M , O 为坐标原点. 则
- A. $\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{PO}$ 的最小值为 $\frac{a^2}{2}$ B. $\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{PO}$ 的最小值为 $\frac{a^2}{4}$
 C. 椭圆 C 的离心率等于 $\frac{|PI|}{|IM|}$ D. 椭圆 C 的离心率等于 $\frac{|IM|}{|PI|}$

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 T_n , 若 $a_4 a_6 = 2a_5$, 则 $T_9 =$ $\blacktriangle$.
14. 已知 F_1, F_2 分别是双曲线 C 的左、右焦点, 若双曲线 C 上存在一点 M 满足 $|MF_1| : |MF_2| : |F_1F_2| = 12 : 13 : 5$, 则该双曲线的离心率为 $\blacktriangle$.
15. 我国古代数学名著《九章算术》中记载: “刍甍者, 下有袤有广, 而上有袤无广. 刍, 草也. 甍, 屋盖也.” 现有一个刍甍如图所示, 底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形, 上棱 $EF = 2\sqrt{2}$, 四边形 $ABFE, CDEF$ 为两个全等的等腰梯形, EF 到平面 $ABCD$ 的距离为 2, 则该刍甍外接球的表面积为 $\blacktriangle$.



16. 若函数 $y = f(x)$ 的定义域内存在 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$, 使 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = 1$ 成立, 则称该函数为“互补函数”. 若函数 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\omega x - \frac{\pi}{3}) - \frac{1}{2} \sin(\omega x + \frac{2\pi}{3}) (\omega > 0)$ 在 $[\pi, 2\pi]$ 上为“互补函数”, 则 ω 的取值范围为 $\blacktriangle$.

四、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在① $S_n = \frac{n^2+n}{2}$, ② $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$, $S_7 = 4a_7 = 28$, ③ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n}$, $S_3 = 6$ 这三个条件中任选一个补充在下面的问题中,并加以解答.

问题:设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , _____, 若 $b_n = \frac{a_n}{2^{a_n}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.

18. (12 分)

全球变暖已经是近在眼前的国际性问题,冰川融化、极端气候的出现、生物多样性减少等等都会给人类的生存环境带来巨大灾难.某大学以对于全球变暖及其后果的看法为内容制作一份知识问卷,并邀请 40 名同学(男女各占一半)参与问卷的答题比赛,将同学随机分成 20 组,每组男女同学各一名,每名同学均回答同样的五个问题,答对一题得一分,答错或不答得零分,总分 5 分为满分.最后 20 组同学得分如下表:

组别号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
男同学得分	4	5	5	4	5	5	4	4	5	5
女同学得分	3	4	5	5	5	4	5	5	5	3
组别号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
男同学得分	4	4	4	4	4	4	5	5	4	3
女同学得分	5	5	4	5	4	3	5	3	4	5

(1)完成下列 2×2 列联表,并判断是否有 90% 的把握认为“该场比赛是否得满分”与“性别”有关;

	男同学	女同学	总计
该场比赛得满分			
该场比赛未得满分			
总计			

(2)随机变量 X 表示每组男生分数与女生分数的差,求 X 的分布列与数学期望.

参考公式和数据: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $n = a+b+c+d$.

$P(K^2 \geq k)$	0.10	0.05	0.010
k	2.706	3.841	6.635

19. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $A = \frac{\pi}{4}$, $\cos B = \frac{1}{3}$, $a+b = 7\sqrt{2}$.

(1)求 a, b 的值;

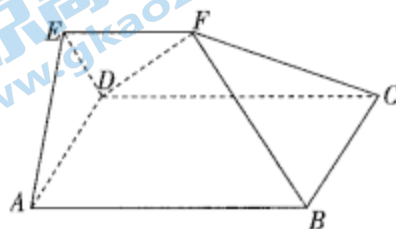
(2)已知 D, E 分别在边 BA, BC 上,且 $AD+CE = 4\sqrt{2}$, 求 $\triangle BDE$ 面积的最大值.

20. (12 分)

如图,在五面体 $ABCDEF$ 中,四边形 $ABCD$ 为矩形, $\triangle ADE$ 为等边三角形,且平面 $ADE \perp$ 平面 $ABCD$, BF 和平面 $ABCD$ 所成的角为 45° ,且点 F 在平面 $ABCD$ 上的射影落在四边形 $ABCD$ 的中心,且 $AD = \frac{\sqrt{2}}{2} AB$.

(1)证明: $EF \parallel$ 平面 $ABCD$.

(2)求平面 AED 与平面 BCF 所成角(锐角)的余弦值.



21. (12 分)

已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$, F 为其焦点, $P(1, y) (y > 0)$, A, B 三点都在抛物线 C 上,且 $|FP| = 2$, 设直线 AB, PA, PB 的斜率分别为 k, k_1, k_2 .

(1)求抛物线 C 的方程,并证明 $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{k} + 1$;

(2)已知 $M(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, 且 A, B, M 三点共线,若 $PA \perp PB, k_1 > k_2$, 求直线 PA 的方程.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = ax - \ln x (a \in \mathbf{R})$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)若 $f(x) > \frac{1}{x} - e^{1-x} + a$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,求 a 的取值范围.

2021 年普通高等学校招生全国统一考试模拟演练

数学参考答案

北京高考在线
www.gkzoo.com

1. B 【解析】本题考查复数的四则运算,考查运算求解能力.

$i(1-i)=1+i$, 又 $z+i(1-i) \in \mathbf{R}$, 所以 z 的虚部为 -1 .

2. A 【解析】本题考查线与面的位置关系,考查空间想象能力.

当 $l \perp m$ 时,因为 m, n 是平面 α 内的两条相交直线, $l \perp n$, 所以 $l \perp \alpha$;

当 $l \perp \alpha$ 时,因为 $m \subset \alpha$, 所以 $l \perp m$. 综上, “ $l \perp m$ ” 是 “ $l \perp \alpha$ ” 的充要条件.

3. C 【解析】本题考查概率的运算,考查运算求解能力.

由题意可知,能为 B 型血病人输血的有 O 型和 B 型,

因此,在该地区任选一人,能为病人输血的概率为 $49\% + 25\% = 74\%$.

4. C 【解析】本题考查基本不等式,考查运算求解能力.

$a+b=m^2+4, ab=m>0$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{m^2+4}{m} \geq 4$, 当且仅当 $m=2$ 时等号成立,经检验知当 $m=2$ 时,

方程 $x^2 - (m^2+4)x + m = 0$ 有两个正实数解.

5. D 【解析】本题考查指数、对数的比较大小,考查运算求解能力.

$a = \log_3 15 = 1 + \log_3 5, b = \log_4 20 = 1 + \log_4 5, c = \log_2 1.9 < 1$, 所以 $a > b > c$.

6. D 【解析】本题考查排列组合的应用,考查逻辑推理能力.

①当两个地区各分 2 人另一个地区分 1 人时,总数有 $C_2^2 \cdot A_3^3 = 12$ 种;

②当两个地区各分 1 人另一个地区分 3 人时,总数有 $C_3^3 \cdot A_3^3 = 18$ 种.

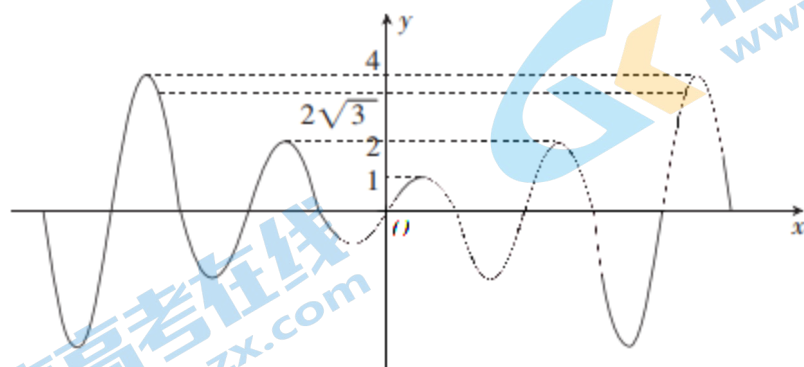
故满足条件的分法共有 $12 + 18 = 30$ 种.

7. A 【解析】本题考查平面向量的运算,考查逻辑推理能力.

$$\vec{CT} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} \vec{CP} + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \vec{CE} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+3} \vec{CA} + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \vec{CE} = \frac{2}{\sqrt{5}+3} \vec{CA} + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \vec{CE} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vec{CA} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vec{CE}.$$

8. B 【解析】本题考查函数的性质,考查数形结合的数学思想.

函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = \sin \pi x$, 则 $f(x) = \sin \pi x, x \in [-1, 1]$, 又当 $x > 1$ 时, $f(x) = 2f(x-2)$, 可画出函数图象如图所示.



由图知,当 $3 \leq x \leq 5$ 时, $f(x) = 4f(x-4) = 4\sin(\pi(x-4)) = 4\sin \pi x$, 则当 $-5 \leq x \leq -3$ 时, $f(x) = -f(-x) = 4\sin \pi x$. 当 $-5 \leq x \leq -3$ 时, 令 $4\sin \pi x = 2\sqrt{3}$, 解得 $x_1 = -\frac{10}{3}, x_2 = -\frac{11}{3}$ (舍去). 若对任意 $x \in [-m, m]$, $f(x) \leq 2\sqrt{3}$ 成立, 所以 m 的最大值为 $\frac{10}{3}$.

9. AB 【解析】本题考查集合的运算,考查运算求解能力.

$A = \{x | \log_2 x < 1\} = \{x | 0 < x < 2\}, B = \{x | 4 - 3x > 0\} = \{x | x < \frac{4}{3}\}$, 所以 $A \cap B = \{x | 0 < x < \frac{4}{3}\}, A \cup B = \{x | x < 2\}, (\complement_{\mathbf{R}} A) \cup B = \{x | x < \frac{4}{3} \text{ 或 } x \geq 2\}$, 故选 AB.

10. BCD 【解析】本题考查统计,考查数据分析能力.

因为 $\frac{4+5+6+6+7+7+8}{7} < \frac{5+5+5+6+7+8+9}{7}$, 所以甲组成绩的平均分小于乙组成绩的平均分, 甲、乙两组成绩的中位数都为 6, 甲、乙两组成绩的极差都为 4, 甲组的成绩比乙组更加稳定, 所以甲组成绩的方差小于乙组成绩的方差, 故选 BCD.

11. BD 【解析】本题考查导数与函数的单调性,考查化归与转化的数学思想和推理论证能力.

因为 $f(-x) = e^{-x} - e^x + \sin 2x = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 为奇函数.

又 $f'(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos 2x \geq 2 - 2\cos 2x \geq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

由 $f(x_1) > f(x_2)$ 可得 $x_1 > x_2$, 所以 $e^{x_1-2} > 1$, B 正确.

又因为函数 $y = x|x|$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 所以 $x_1|x_1| > x_2|x_2|$, D 正确.

12. AD 【解析】本题考查椭圆的定义以及几何性质,考查运算求解能力.

过点 H 做 $HG \perp PF_1$ (图略), 垂足为 G , 则 G 为 PF_1 的中点,

$$\text{所以 } \overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{PF_1} = \frac{|\overrightarrow{PF_1}|^2}{2}, \text{ 同理 } \overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{PF_2} = \frac{|\overrightarrow{PF_2}|^2}{2},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{PO} = \frac{\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{PF_2}}{2} = \frac{1}{4}(|\overrightarrow{PF_1}|^2 + |\overrightarrow{PF_2}|^2) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{|\overrightarrow{PF_1}| + |\overrightarrow{PF_2}|}{2} \right)^2 = \frac{a^2}{2},$$

当且仅当 $|\overrightarrow{PF_1}| = |\overrightarrow{PF_2}|$ 时取等号.

连接 IF_1, IF_2 , 则 IF_1, IF_2 分别为 $\angle PF_1F_2, \angle PF_2F_1$ 的角平分线, 由角平分线定理可知, $\frac{|IM|}{|PI|} = \frac{|F_1M|}{|PF_1|} =$

$$\frac{|F_2M|}{|PF_2|}, \text{ 则 } \frac{|IM|}{|PI|} = \frac{|F_1M| + |F_2M|}{|PF_1| + |PF_2|} = \frac{2c}{2a} = e, \text{ 故选 AD.}$$

13. 512 【解析】本题考查等比数列,考查运算求解能力.

因为 $a_4a_6 = 2a_5$, 所以 $a_5 = 2$, 则 $T_9 = 2^9 = 512$.

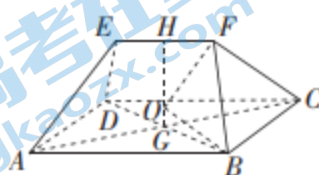
14. 5 【解析】本题考查双曲线的定义,考查推理论证能力和运算求解能力.

$$\text{双曲线的离心率 } e = \frac{|F_1F_2|}{|MF_2| - |MF_1|} = \frac{5}{13-12} = 5.$$

15. 33π 【解析】本题考查空间几何体的外接球,考查空间想象能力和运算求解能力.

连接 AC, BD 相交于点 G , 取 EF 的中点 H , 连接 GH , 易得 $HG \perp$ 平面 $ABCD$, 则该刍甍外接球的球心 O 在直线 HG 上, 设该刍甍外接球的半径为 R , $OH = x$, 则

$$\begin{cases} R^2 = 2 + x^2, \\ R^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2-x)^2, \end{cases} \text{ 解得 } x = \frac{5}{2}, R^2 = \frac{33}{4}, \text{ 所以该刍甍外接球的表面积为 } 4\pi R^2 = 33\pi.$$



16. $[\frac{9}{4}, \frac{5}{2}] \cup [\frac{13}{4}, +\infty)$ 【解析】本题考查三角函数的图象及其性质,考查运算求解能力.

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\omega x - \frac{\pi}{3}) + \frac{1}{2} \sin(\omega x - \frac{\pi}{3}) = \cos(\omega x - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) = \sin \omega x,$$

令 $t = \omega x$, 则函数 $y = \sin t$ 在区间 $[\omega\pi, 2\omega\pi]$ 上存在两个极大值点, 则 $\frac{2\pi}{\omega} \leq \pi$, 得 $\omega \geq 2$.

当 $2T = 2 \times \frac{2\pi}{\omega} \leq \pi$ 时, 即 $\omega \geq 4$, 显然符合题意;

当 $\omega\pi \leq \frac{5\pi}{2}$, 即 $\omega \leq \frac{5}{2}$ 时, $2\omega\pi \geq \frac{9\pi}{2}$, 即 $\omega \geq \frac{9}{4}$, 所以 $\frac{9}{4} \leq \omega \leq \frac{5}{2}$;

当 $4\pi > \omega\pi > \frac{5\pi}{2}$, 即 $\omega > \frac{5}{2}$ 时, $2\omega\pi \geq \frac{13\pi}{2}$, 即 $\omega \geq \frac{13}{4}$, 所以 $\frac{13}{4} \leq \omega < 4$.

综上, ω 的取值范围为 $[\frac{9}{4}, \frac{5}{2}] \cup [\frac{13}{4}, +\infty)$.

17. 解: 选①

当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 1$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = n$, 3 分

又 $n=1$ 满足 $a_n = n$, 所以 $a_n = n$ 5 分

$b_n = \frac{a_n}{2^{a_n}} = \frac{n}{2^n} = n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$, 6 分

则数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$,

$\frac{1}{2} T_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + (n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, 8 分

所以 $\frac{1}{2} T_n = \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n - n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$$= \frac{\frac{1}{2} [1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n]}{1 - \frac{1}{2}} - n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1 - (n+2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$

故 $T_n = 2 - (n+2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 10 分

选②

因为 $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 2 分

设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $S_7 = 7a_1 + 21d = 28$, $a_7 = a_1 + 6d = 7$, 4 分

解得 $a_1 = 1$, $d = 1$, 所以 $a_n = n$ 5 分

$b_n = \frac{a_n}{2^{a_n}} = \frac{n}{2^n} = n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$, 6 分

则数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$,

$\frac{1}{2} T_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + (n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, 8 分

所以 $\frac{1}{2} T_n = \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n - n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$$= \frac{\frac{1}{2} [1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n]}{1 - \frac{1}{2}} - n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1 - (n+2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$

故 $T_n = 2 - (n+2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 10 分

选③

由 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n}$, 则 $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n}$, 所以 $\frac{a_n}{n} = \frac{a_1}{1}$, 即 $a_n = na_1$ 2 分

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 6a_1 = 6$, 所以 $a_1 = 1$, 3 分

所以 $a_n = n$ 5 分

$b_n = \frac{a_n}{2^{a_n}} = \frac{n}{2^n} = n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$, 6 分

则数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$,

$\frac{1}{2} T_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + (n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, 8 分

所以 $\frac{1}{2} T_n = \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n - n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$$= \frac{\frac{1}{2} [1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n]}{1 - \frac{1}{2}} - n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1 - (n+2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$

故 $T_n = 2 - (n+2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 10 分

18. 解: (1) 2×2 列联表如下:

	男同学	女同学	总计
该次比赛得满分	8	11	19
该次比赛未得满分	12	9	21
总计	20	20	40

..... 3 分

所以, $K^2 = \frac{40 \times (8 \times 9 - 11 \times 12)^2}{19 \times 21 \times 20 \times 20} \approx 0.902 < 2.706$, 5 分

所以没有 90% 的把握认为“该次大赛是否得满分”与“性别”有关.

(2) X 的可能取值为 $-2, -1, 0, 1, 2$ 6 分

$P(X=-2) = \frac{1}{20}$, $P(X=-1) = \frac{3}{10}$, $P(X=0) = \frac{7}{20}$, $P(X=1) = \frac{1}{5}$, $P(X=2) = \frac{1}{10}$, 9 分

则 X 的分布列为

X	-2	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

..... 10 分

所以 $E(X) = (-2) \times \frac{1}{20} + (-1) \times \frac{3}{10} + 0 \times \frac{7}{20} + 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{1}{10} = 0$ 12 分

19. 解: (1) 因为 $\cos B = \frac{1}{3}$, 所以 $\sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 1 分

由正弦定理, $a+b=7\sqrt{2}$ 可化为 $2R(\sin A + \sin B) = 7\sqrt{2}$, 3 分

解得 $2R=6$ 4 分

$a=2R\sin A=6 \times \frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$, 5 分

$b=2R\sin B=6 \times \frac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$ 6 分

(2) $\sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{4+\sqrt{2}}{6}$ 7 分

$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$, 解得 $c=4+\sqrt{2}$ 9 分

因为 $AD+CE=4\sqrt{2}$, 所以 $BD+BE=4+\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}=4$, 10 分

$\triangle BDE$ 的面积 $S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} BD \cdot BE \cdot \sin B = \frac{\sqrt{2}}{3} BD \cdot BE \leq \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{BD+BE}{2}\right)^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, 当且仅当 $BD=BE=2$ 时, 取得最大值. 12 分

20. (1) 证明: 连接 BD , 取 AD, BD 的中点分别为 O, G , 连接 EO, OG, GF , 易得 G 为四边形 $ABCD$ 的中心, 所以 $FG \perp$ 平面 $ABCD$ 1 分

设 $AD=2$, 因为 BF 和平面 $ABCD$ 所成的角为 45° , 所以 $\angle FBG=45^\circ$, 因为 $BG=\frac{BD}{2}=\sqrt{3}$, 所以 $FG=\sqrt{3}$ 2 分

又因为平面 $ADE \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $ADE \cap$ 平面 $ABCD=AD$, $EO \perp AD$,

所以 $EO \perp$ 平面 $ABCD$, $EO = \sqrt{3}$, 则 $EO = FG$, $EO \parallel FG$, 4 分

所以四边形 $EOGF$ 是平行四边形, 所以 $EF \parallel OG$ 5 分

因为 $EF \not\subset$ 平面 $ABCD$, $OG \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $EF \parallel$ 平面 $ABCD$ 6 分

(2) 解: 在平面 $ABCD$ 中, 作 $Oy \perp AD$,

如图, 以 O 为坐标原点, OA, Oy, OE 所在直线分别为 x, y, z 轴建系,

则 $A(1, 0, 0), D(-1, 0, 0), B(1, 2\sqrt{2}, 0), E(0, 0, \sqrt{3}), F(0, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ 7 分

又因为平面 $ADE \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $m = (0, 1, 0)$ 是平面 ADE 的一个法向量. 8 分

设平面 BCF 的法向量为 $n = (x, y, z)$,

因为 $\overrightarrow{BF} = (-1, -\sqrt{2}, \sqrt{3}), \overrightarrow{BC} = (-2, 0, 0)$,

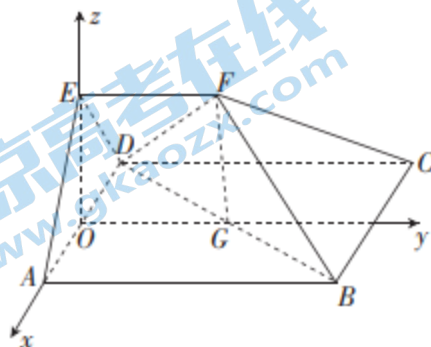
$$\text{所以 } \begin{cases} -2x = 0, \\ -x - \sqrt{2}y + \sqrt{3}z = 0, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = 0, \\ y = \sqrt{3}, \\ z = \sqrt{2}, \end{cases}$$

所以平面 BCF 的法向量为 $n = (0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ 10 分

记平面 AED 与平面 BCF 所成的角为 θ ,

$$\text{所以 } |\cos \theta| = \frac{|m \cdot n|}{|m||n|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5},$$

所以平面 AED 与平面 BCF 所成角(锐角)的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$ 12 分



21. 解: (1) $|FP| = 1 + \frac{p}{2} = 2$, 所以 $p = 2$, 所以抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$, 点 $P(1, 2)$ 2 分

设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $k_1 = \frac{y_1 - 2}{x_1 - 1} = \frac{y_1 - 2}{\frac{y_1^2}{4} - 1} = \frac{4}{y_1 + 2}$, 同理 $k_2 = \frac{4}{y_2 + 2}, k = \frac{4}{y_1 + y_2}$ 4 分

所以 $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{y_1 + y_2 + 4}{4}, \frac{1}{k} + 1 = \frac{y_1 + y_2 + 4}{4}$, 则 $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{k} + 1$ 6 分

(2) 设直线 AB 的方程为 $x + \frac{1}{2} = m(y + \frac{1}{2}) (m = \frac{1}{k})$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x + \frac{1}{2} = m(y + \frac{1}{2}), \\ y^2 = 4x, \end{cases} \text{ 消去 } x \text{ 得 } y^2 - 4my - 2m + 2 = 0.$$

则 $y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = 2 - 2m$,

依题意, 可得 $\Delta = (4m)^2 - 4(2 - 2m) > 0$, 解得 $m < -1$ 或 $m > \frac{1}{2}$ 8 分

因为 $PA \perp PB$, 所以 $k_1 k_2 = \frac{16}{(y_1 + 2)(y_2 + 2)} = -1$, 解得 $m = -\frac{11}{3}$ 10 分

又 $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{k} + 1$, 所以 $\frac{1}{k_1} - k_1 = -\frac{8}{3}$, 且 $k_1 > k_2$, 所以 $k_1 = 3$,

所以直线 PA 的方程为 $y - 2 = 3(x - 1)$, 即 $3x - y - 1 = 0$ 12 分

22. 解: (1) 由题意可得 $f'(x) = a - \frac{1}{x} (x > 0)$ 1 分

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$ 恒成立, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减. 2 分

当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$, 得 $x > \frac{1}{a}$; 由 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < \frac{1}{a}$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯