

北大附中 2020 届高三阶段性检测

一、选择题共 9 小题，共 40 分。第 1~5 题每题 4 分，第 6~9 题每题 5 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A = \{x | x < 1\}$, $B = \{x | 3^x < 1\}$, 则 【 】

A. $A \cap B = \{x | x < 0\}$

B. $A \cup B = R$

C. $A \cup B = \{x | x > 1\}$

D. $A \cap B = \emptyset$

2. 已知复数 $z = \frac{1-bi}{i}$ ($b \in R$) 的实部和虚部相等, 则 $b =$ 【 】

A. -1

B. 1

C. 2

D. -2

3. 已知 $a > b > 0$, 则下列不等式成立的是 【 】

A. $a^2 < b^2$

B. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

C. $|a| < |b|$

D. $2^a > 2^b$

4. 已知直线 l 的斜率为 k , 倾斜角为 θ , 则“ $0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$ ”是“ $k \leq 1$ ”的 【 】

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. 已知正方形 $ABCD$ 的中心为 O , 且边长为 1, 则 $(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) =$ 【 】

A. -1

B. $-\sqrt{2}$

C. 1

D. $\sqrt{2}$

6. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线与直线 $2x + y - 1 = 0$ 垂直, 则双曲线的离心率为 【 】

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

B. $\sqrt{5}$

C. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

D. $\sqrt{3}+1$

7. 中国古代数学著作《算法统宗》中有这样一个问题：“三百七十八里关，初行健步不为难，次日脚痛减一半，六朝才得至其关，要见次日行里数，请公仔细算相还。”其意思是有一人走 378 里路，第一天健步行走，从第二天起脚痛，每天走的路程为前一天的一半，走了 6 天后到达目的地，请问第二天走了【 】

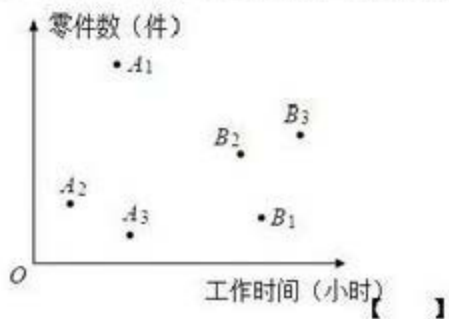
- A. 96 里
B. 48 里
C. 192 里
D. 24 里

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq a \\ x^2, & x > a \end{cases}$ ，则下列结论错误的是【 】

- A. $f(0) = 0$
B. $a = 0$ 时， $f(x)$ 的值域为 \mathbb{R}
C. $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递增时， $a \geq 0$
D. 方程 $f(x) = 2$ 有解时， $a < \sqrt{2}$

9. 三名工人加工同一种零件，他们在一天中的工作情况如图所示，其中点 A_i 的横、纵坐标分别为第 i 名工人上午的工作时间和加工的零件数，点 B_i 的横、纵坐标分别为第 i 名工人下午的工作时间和加工的零件数， $i = 1, 2, 3$.

记 Q_i 为第 i 名工人这一天中加工的零件总数，
记 P_i 为第 i 名工人这一天中平均加工的零件数，
则 Q_1, Q_2, Q_3 中的最大值与 P_1, P_2, P_3 中的最大值分别是



- A. Q_1, P_1
B. Q_1, P_2
C. Q_2, P_1
D. Q_2, P_2

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

10. 抛物线 $x^2 = 16y$ 的准线方程为_____。

11. 已知四个函数：① $y = -x$ ，② $y = -\frac{1}{x}$ ，③ $y = x^3$ ，④ $y = x^{\frac{1}{2}}$ ，从中任选 2 个，若所选 2 个函数的图像有且仅有一个公共点，则这两个函数可以是_____。（写出一对序号即可）

12. 在正项等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1, \frac{1}{2}a_3, 2a_2$ 成等差数列，则 $\frac{a_4}{a_3} =$ _____。

13. 方程 $\sin x = \cos 2x$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的解集为_____.

14. 设 $a > 0, b > 0$, 若关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + by = 1 \end{cases}$ 无解, 则 $a + b$ 的取值范围为_____.

15. 对任意两个非零的平面向量 α 和 β , 定义 α 和 β 之间的新运算 \otimes : $\alpha \otimes \beta = \frac{\alpha \cdot \beta}{\beta \cdot \beta}$. 若非零的平面向量

a, b 满足: $a \otimes b$ 和 $b \otimes a$ 都在集合 $\left\{ x \mid x = \frac{\sqrt{3}n}{3}, n \in \mathbb{Z} \right\}$ 中, 且 $|a| \geq |b|$. 设 a 与 b 的夹角 $\theta \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right)$,

则 $(a \otimes b) \sin \theta =$ _____.

三、解答题共 6 小题, 共 80 分。解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程。

16. (本小题 13 分) 已知函数 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos x + a$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递减区间;

(2) 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

17. (本小题 13 分) 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A + \sqrt{3} \cos A = 0$, $BC = 2\sqrt{7}$, $AC = 2$.

(1) 求 AB 的长;

(2) 设 D 为 BC 边上一点, 且 $AD \perp AC$, 求 $\triangle ABD$ 的面积.

18. (本小题 13 分) 已知 $\odot M$ 过 $A(-1, 7), B(2, 6), C(-1, -3)$ 三点.

- (1) 求 $\odot M$ 的标准方程;
- (2) 直线 $l: x - y + 2 = 0$ 与 $\odot M$ 相交于 D, E 两点, 求 $\triangle MDE$ 的面积 (M 为圆心).

19. (本小题 13 分) 已知函数 $f(x) = e^x - x^2 + 2ax$.

- (1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;
- (2) 若 $x > 0$, 证明“ $a > 0$ ”是“ $f(x) > 1$ ”的充分不必要条件.

20. (本小题 14 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与 y 轴交于 B_1, B_2 两点, F_1 为椭圆 C 的左焦点,

且 $\triangle F_1 B_1 B_2$ 是边长为 2 的等边三角形.

- (1) 且椭圆 C 的方程;
- (2) 设过点 $(-1, 0)$ 的直线与椭圆 C 交于不同的两点 P, Q , 点 P 关于 x 轴的对称点为 P_1 (P_1 与 P, Q 都不重合), 判断直线 $P_1 Q$ 与 x 轴是否交于一个定点? 若是, 请写出定点坐标, 并证明你的结论; 若不是, 请说明理由.

21.(本小题 14 分)已知数列 $A: a_1, a_2, a_3, \dots, a_n (n \geq 4)$ 为 $1, 2, 3, \dots, n$ 的一个排列, 若 $|a_i - i| (i = 1, 2, 3, \dots, n)$

互不相同, 则称数列 A 具有性质 P .

(1) 若 $n=4$, 且 $a_1 = 4$, 写出具有性质 P 的所有数列 A ;

(2) 若数列 A 具有性质 P , 证明: $a_1 \neq 1$;

(3) 当 $n=7, 8$ 时, 分别判断是否存在具有性质 P 的数列 A ? 请说明理由.