人大附中 2020-2021 学年度第一学期高二年级数学期中练习

2020 年 11 月 4 日

制卷人：杨良庆　　　审卷人：梁丽平

成绩：

说明：本试卷分Ⅰ卷和Ⅱ卷，Ⅰ卷 17 道题，共 100 分，作为学分认定成绩；Ⅱ卷 7 道题，共 50 分；Ⅰ卷、Ⅱ卷共 24 题，合计 150 分，作为期中成绩；考试时间 120 分钟；请在答题卡上填写个人信息，并将条形码贴在答题卡的相应位置上.

Ⅰ卷(共 17 题，满分 100 分)

一、选择题(本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置.)

1.若复数$(1-i)(a+i)$在复平面内对应的点在第二象限，其中i为虚数单位，则实数a的取值范围是(　　)

A.$(-\infty,1)$　　B.$(-\infty,-1)$　　C.$(1,+\infty)$　　D.$(-1,+\infty)$

2.在空间直角坐标系中，已知点$A(1,0,1),B(3,2,1)$，则线段AB的中点的坐标是(　　)

A.(1，1，1)　　B.(2，1，1)　　C.(1，1，2)　　D.(1，2，3)

3.设m是一条直线，α、β是两个不同的平面，则下列命题一定正确的是(　　)

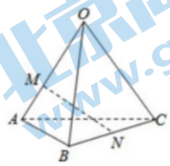
A.若$\alpha\perp\beta$，$m\perp\alpha$，则$m\parallel\beta$　　B.若$\alpha\perp\beta$，$m\parallel\alpha$，则$m\perp\beta$

C.若$\alpha\parallel\beta$，$m\perp\alpha$，则$m\perp\beta$　　D.若$\alpha\parallel\beta$，$m\parallel\alpha$，则$m\parallel\beta$

4.若直线$ax+2y-1=0$与直线$2x-3y-6=0$垂直，则a的值为(　　)

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

5.在空间四边形$OABC$中，若$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，点$M$在线段$OA$上，且$\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{MA}$，点$N$为线段$BC$的中点，则$\overrightarrow{MN}=$(　　)



A.$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$　　B.$-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$

C.$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$　　D.$\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$

6.已知二面角$\alpha-AB-\beta$的平面角是锐角θ，二面角的一个半平面α内一点C到β的距离为 3，点C与棱AB的距离为 4，那么$\tan\theta$的值小强数学等于(　　)

A.$\frac{3}{4}$　　B.$\frac{3}{5}$　　C.$\frac{3\sqrt{7}}{7}$　　D.$\frac{\sqrt{7}}{3}$

7.如果向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,3),\boldsymbol{b}=(-1,4,-2),\boldsymbol{c}=(7,-7,\ m)$ 共面，则实数 m 的值是(　　)

A.11　　B.8　　C.7　　D.1

8.在边长为 2 的等边三角形 ABC 中，点 D，E 分别是边 AC，AB 上的点，满足 $DE\parallel BC$ 且 $\dfrac{AD}{AC}=\lambda(\lambda\in(0,1))$，将 $\triangle ADE$ 沿直线 DE 折到 $\triangle A'DE$ 的位置，在翻折过程中，下列结论成立的是(　　)

A.在边 $A'E$ 上存在点 P，使得在翻折过程中，满足 $BP\parallel$ 平面 $A'CD$；

B.存在 $\lambda\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，使得在翻折过程中的某个位置，满足平面 $A'BC\perp$ 平面 $BCDE$；

C.若 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，当二面角 $A'-DE-B$ 为直二面角时，$|A'B|=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$；

D.设 O 为线段 ED 的中点，F 为线段 BC 的中点，对于每个给定的 λ，记翻折过程中 $\triangle AOF$ 面积的最大值为 $f(\lambda)$，则当 λ 变化时，$f(\lambda)$ 的最大值为 $\dfrac{3}{8}$.

二、填空题(本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分请把结果填在答题纸上的相应位置.)

9.复数 $\dfrac{1}{-2+i}+\dfrac{1}{1-2i}$ 的虚部是__________.(其中 i 为虚数单位)

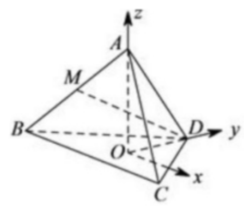
10.若三点 $A(0,8),B(-4,0),C(m,-4)$ 共线，则实数 m 的值为__________.

11.直线 l：$2x+2y-1=0$ 的倾斜角为______，经过点(1，1)且与直线 l 平行的直线方程为__________.

12.请从正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的 8 个项点中，找出 4 个点构成一个三棱锥，使得这个三棱锥的 4 个面都是直角三角形，则这 4 个点可以是__________.(只需写出一组)

13.在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，O_1 是上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心，M 是棱 BB_1 的中点，则四面体 O_1-ADM 的体积等于__________.

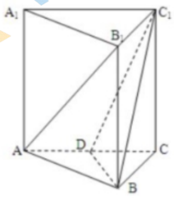
14.已知棱长为 2 的正四面体 $ABCD$，如图建立直角坐标系，点 O 为点 A 在底面 BCD 上的射影，M 为线段 AB 的中点，则 M 点坐标是__________，直线 DM 与平面 ABC 所成角的正弦值是__________.



三、解答题(本大题共 3 小题，每题 10 分，共 30 分，解答应写出文字说明过程或演算步骤，请将答案写在答题纸上的相应位置.)

15.(本题满分 10 分)

已知如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 为棱 AC 的中点，$AB=AA_1=2$.



(Ⅰ)求证：直线 AB_1 // 平面 BC_1D；

(Ⅱ)求点 B_1 到平面 BDC_1 的距离.

16.已知三角形的顶点为 $A(2,3),B(0,-1),C(-2,1)$.

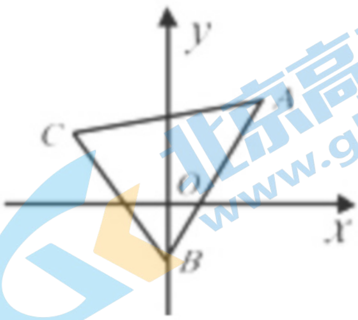
(Ⅰ)求直线 AC 的方程；

(Ⅱ)从①、②这两个问题中选择一个作答.

求点 B 关于直线 AC 的对称点 D 的坐标.

若直线 l 过点 B 且与直线 AC 交于点 E，$|BE|=3$，求直线 l 是的方程.

注：如果①和②都作答，则按书写的第一个答案计分.



17.(本题满分 10 分)

已知在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，$\triangle PAD$ 是正三角形，$CD\perp$ 平面 PAD，E、F、G、O 分别是 PC、PD、BC、AD 的中点.

(Ⅰ)求证：$PO\perp$ 平面 $ABCD$；

(Ⅱ)求二面角 $B-EG-F$ 的余弦值；

(Ⅲ)线段 PB 上是否存在点 M，使得直线 GM 与平面 EFG 所成角为 $\frac{\pi}{3}$，若存在，求线段 PM 的长度；若不存在，说明理由.

Ⅱ卷(共 7 道题，满分 50 分)

四、选择题(本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置)

18.下面三条直线 $l_1:3x+y=4, l_2:x-y=0, l_3:2x-3my=4$ 不能构成三角形，则 m 的取值范围是(　　)

A. $\left\{-\frac{2}{3}\right\}$　　B. $\left\{\frac{2}{3},-\frac{2}{9}\right\}$　　C. $\left\{-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{9}\right\}$　　D. $\left\{-\frac{2}{3},\frac{2}{3},0,-\frac{2}{9}\right\}$

19.直线 $x\sin\alpha+\sqrt{3}y+1=0(\alpha\in\mathrm{R})$ 的倾斜角的取值范围是(　　)

A. $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$　　B. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$　　C. $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$　　D. $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right)$

20.与正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的三条棱 AB、CC_1、A_1D_1 所在直线的距离相等的点(　　)

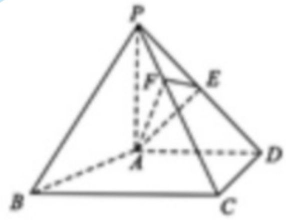
A.有且只有 1 个　　B.有且只有 2 个

C.有且只有 3 个　　D.有无数个

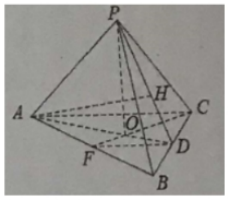
五、填空题(本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分请把结果填在答题纸上的相应位置.)

21.设复数 z_1,z_2 满足 $|z_1|=|z_2|=2$，且 $z_1+z_2=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$，其中 i 为虚数单位，则 $|z_1-z_2|=$________.

22. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面$ABCD$，$AD\perp CD$，$AD\parallel BC$，$PA=AD=CD=2$，$BC=3$. E 为PD的中点，点F 在线段PC上，且$\frac{PF}{PC}=\frac{1}{3}$.若点$Q$是四棱锥 $P-ABCD$ 表面上的一点(不含点D)，$DQ\parallel$ 平面AEF，则线段DQ长度的取值范围是________.



23. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的底面 ABC 为正三角形，点 A 在侧面 PBC 上的射影 H 是$\triangle PBC$的垂心(三角形的垂心是三角形三条高线的交点)，延长 PH 交 BC 于 D .过 P 作$PO\perp AD$ 于 O，延长 CO 交 AB 于 F，二面角 $H-AB-C$ 为 $\frac{\pi}{6}$，且 $PA=2$，对下列结论成立的有________.



①$BC\perp AD$；

②二面角 $P-AB-C$ 的平面角为 $\angle PBC$；

⑧直线 PA 与平面 ABC 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$；

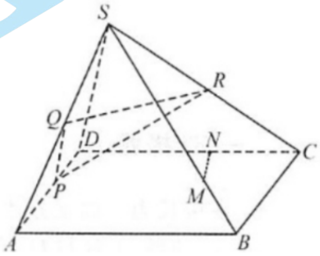
④直线 FD 与直线 PC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$；

⑤三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $\frac{3}{4}$.

(此题错选得 0 分，少选得部分分，完全正确得满分)

六、解答题(本大题共 1 小题，满分 14 分.解答应写出文字说明过程或演算步骤，请将答案写在答题纸上的相应位置.)

24.已知四棱锥$T-ABCD$的底面是平行四边形，平面α与直线AD,TA,TC分别交于点P,Q,R且$\frac{AP}{AD}=\frac{TQ}{TA}=\frac{CR}{CT}=x$，点$M$在直线$TB$上，$N$为$CD$的中点，且直线$MN$∥平面$\alpha$.



(Ⅰ)设$\overrightarrow{TA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{TB}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{TC}=\boldsymbol{c}$，试用基底$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$表示向量$\overrightarrow{TD}$；

(Ⅱ)证明，四面体$TABC$中至少存在一个顶点，从其出发的三条棱能够组成一个三角形；

(Ⅲ)证明，对所有满足条件的平面α，点M都落在某一条长为$\frac{\sqrt{5}}{2}TB$的线段上.

人大附中2020~2021学年度第一学期高二年级数学期中练习

答案

2020年11月4日

一、选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分.）

1. B 2. B 3. C 4. D 5. B 6. C 7. A 8. D

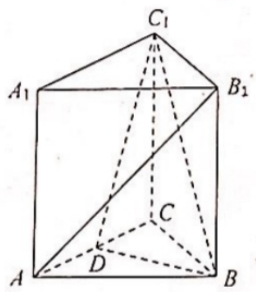
二、填空题（本大题共6小题，每小题5分，共30分.）

9. $\frac{1}{5}$ 10. -6 11. $\frac{3\pi}{4}$，$x+y-2=0$（前三后二） 12. A_1、A、B、C（此题答案不唯一） 13. $\frac{1}{8}$ 14. $\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，$\frac{2\sqrt{2}}{3}$（前三后二）

三、解答题

15.（本题满分10分）

已知如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 为棱 AC 的中点，$AB=AA_1=2$.



（Ⅰ）求证：直线 AB_1 // 平面 BC_1D；

（Ⅱ）求点 B_1 到平面 BDC_1 的距离.

法一：证明：（Ⅰ）连接 B_1C，设 $B_1C\cap BC_1=E$.

因为 $ABC-A_1B_1C_1$ 是正三棱柱，

所以四边形 BCC_1B_1 是矩形，

所以 E 是 B_1C 的中点. ……………1分

在△AB_1C 中，因为 D，E 分别为 AC，B_1C 的中点，

所以 DE // AB_1. ……………2分

因为 $DE\subset$ 平面 BC_1D，$AB_1\not\subset$ 平面 BC_1D，

所以直线 AB_1 // 平面 BC_1D. ……………4分

（Ⅱ）设 B_1 到平面 BDC_1 的距离为 d，

因为直线 AB_1 // 平面 BC_1D，

所以 A 到平面 BDC_1 的距离为 d，————————————5 分

因为 $V_{A-BDC_1}=V_{C_1-ABD}$，

所以 $\frac{1}{3}S_{\Delta BDC_1}d=\frac{1}{3}S_{\Delta ABD}AA_1$

因为 $S_{\Delta ABD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

因为 $S_{\Delta BDC_1}=\frac{\sqrt{15}}{2}$

所以 $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{15}}{2}d=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2$ ————————————7 分

所以 $d=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ————————————————————8 分

书写分（2 分）——————————————————10 分

法二：在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，取 A_1C_1 中点 M

因为 D 为棱 AC 的中点，

所以 $DM//AA_1$

因为 $AA_1\perp$ 平面 ABC

所以 $DM\perp$ 平面 ABC

因为 $AC、DB\subset$ 平面 ABC

所以 $DM\perp AC、DM\perp DB$

因为 $BA=BC$，D 为棱 AC 的中点，

所以 $BD\perp AC$ ————————————————————————1 分

以 D 为原点，以 DA 为 x 轴，以 DB 为 y 轴，以 DM 为 z 轴建立空间直角坐标系，

如图，————————————————————————————2 分

则 $A(1,0,0)、B(0,\sqrt{3},0)、B_1(0,\sqrt{3},2)、C_1(-1,0,2)$

设平面 DBC_1 的一个法向量为 $m=(x,y,z)$

因为$\begin{cases}\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{m}=0\\ \overrightarrow{DC_1}\cdot\overrightarrow{m}=0\end{cases}$

所以$\begin{cases}y=0\\ -x+2z=0\end{cases}$

令$z=1$则$x=2$

所以$m=(2,0,1)$——————————————————————————4 分

因为$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{m}=-1\times2+0+2\times1=0$——————————————————5 分

因为$AB_1\not\subset$平面DBC_1——————————————————————————6 分

所以直线AB_1 // 平面BC_1D；

（Ⅱ）因为$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,2)$

点B_1到平面BDC_1的距离$d=\dfrac{|BB_1\cdot m|}{|m|}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$——————————————8 分

书写分（2 分）————————————————————————10 分

16. 已知三角形的顶点为$A(2,3)$，$B(0,-1)$，$C(-2,1)$.

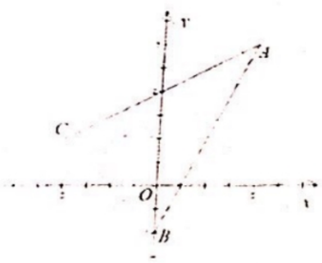
（Ⅰ）求直线AC的方程；

（Ⅱ）从①、②这两个问题中选择一个作答.

① 求点B关于直线AC的对称点D的坐标.

②若直线l过点B且与直线AC交于点E，$|BE|=3$，求直线l的方程.

注：如果①和②都作答，则按书写的第一个答案计分.



解：（Ⅰ）因为直线AC的斜率为$k_{AC}=\dfrac{1}{2}$——————————2 分

所以直线AC的方程为：$y-3=\dfrac{1}{2}(x-2)$

即直线AC的方程为：$x-2y+4=0$；——————————4 分

（Ⅱ）问题①：

设 D 的坐标为 (m,n)，则

$$\begin{cases}\dfrac{n+1}{m}\cdot\dfrac{1}{2}=-1\\ \dfrac{m}{2}-2\cdot\dfrac{n-1}{2}+4=0\end{cases}$$ ——————————————6 分

解得 $\begin{cases}m=-\dfrac{12}{5}\\ n=\dfrac{19}{5}\end{cases}$

点 D 的坐标是 $(-\dfrac{12}{5},\dfrac{19}{5})$. ——————————————8 分

书写分（2 分）——————————————10 分

问题②：

设 E 的坐标为 $\left(t,\dfrac{1}{2}t+2\right)$ ——————————————5 分

因为 $|BE|=3$

所以 $\sqrt{t^2+\left(\dfrac{1}{2}t+2+1\right)^2}=3$ ——————————————6 分

解得 $t=0$ 或 $t=-\dfrac{12}{5}$

所以设 E 的坐标为 $(0,2)$ 或 $\left(-\dfrac{12}{5},\dfrac{4}{5}\right)$

直线 l 的方程为 $x=0$ 或 $3x+4y+4=0$. ——————8 分

书写分（2 分）——————————————10 分

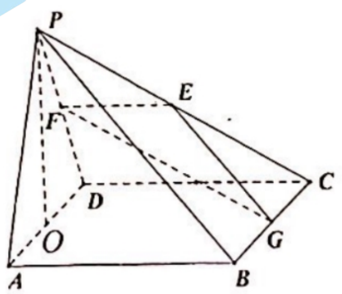
17.（本题满分 10 分）

已知在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，$\triangle PAD$ 是正三角形，$CD\perp$ 平面 PAD，E、F、G、O 分别是 PC、PD、BC、AD 的中点.

（Ⅰ）求证：$PO\perp$ 平面 $ABCD$；

（Ⅱ）求二面角 $B-EG-F$ 的余弦值；

（Ⅲ）线段 PB 上是否存在点 M，使得直线 GM 与平面 EFG 所成角为 $\dfrac{\pi}{3}$，若存在，求线段 PM 的长度；若不存在，说明理由.



（Ⅰ）证明：因为ΔBAD是正三角形，O是AD的中点，

所以$PO\perp AD$————————————————————1 分

因为$CD\perp$平面PAD

$PO\subset$平面PAD

所以$CD\perp PO$————————————————————2 分

又因为$AD\cap CD=D$，$AD,CD\subset$平面$ABCD$

所以$PO\perp$平面$ABCD$--3 分

（2）因为$PO\perp$平面$ABCD$，$OG\subset$平面$ABCD$

所以$PO\perp OG$

又因为$AD\perp DC$，$OG//DC$

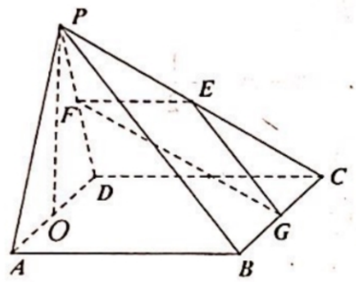
所以$AD\perp OG$

以O为原点，以OA为x轴，以OG为y轴，以OP为z轴———————4 分

则$B(2,4,0)$，$G(0,4,0)$，$E\left(-1,2,\sqrt{3}\right)$，$P\left(0,0,2\sqrt{3}\right)$，$F\left(-1,0,\sqrt{3}\right)$

设平面BEG的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$

$\overline{BG}=(-2,0,0)$，$\overline{BE}=\left(-3,-2,\sqrt{3}\right)$



因为$\begin{cases}\overline{BG}\cdot\boldsymbol{m}=0\\ \overline{BE}\cdot\boldsymbol{m}=0\end{cases}$

所以$\begin{cases}x=0\\ -2y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$

令$z=2$，则$y=\sqrt{3}$

$\boldsymbol{m}=\left(0,\sqrt{3},2\right)$

设平面EFG的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$

$\overline{GE}=\left(-1,-2,\sqrt{3}\right)$，$\overline{FE}=(0,2,0)$

因为$\begin{cases}\overline{GE}\cdot\boldsymbol{n}=0\\ \overline{FE}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$

所以$\begin{cases}y=0\\ -x+\sqrt{3}z=0\end{cases}$

令$z=1$，则$x=\sqrt{3}$

$\boldsymbol{n}=\left(\sqrt{3},0,1\right)$————————————————————5 分

$\cos\langle m,n\rangle=\dfrac{2}{\sqrt{7}\times2}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

设二面角 $B-EG-F$ 大小为 θ

由题知 θ 为锐角

$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

所以二面角 $B-EG-F$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.——————————————6 分

（3）设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PB}\ (0\le\lambda\le1)$

$\overrightarrow{GM}=(1-\lambda)\overrightarrow{GP}+\lambda\overrightarrow{GB}=\left(2\lambda,4\lambda-4,2\sqrt{3}(1-\lambda)\right)$

$\left|\cos\langle\overrightarrow{GM},n\rangle\right|=\left|\dfrac{2\sqrt{3}\lambda+2\sqrt{3}(1-\lambda)}{2\sqrt{4\lambda^2+16(1-\lambda)^2+12(\lambda-1)^2}}\right|=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ————7 分

化简得 $4\lambda^2-7\lambda+3=0$

解方程得 $\lambda=\dfrac{3}{4}$ 或 $\lambda=1$

线段 PB 上存在点 M，使得直线 GM 与平面 EFG 所成角为 $\dfrac{\pi}{3}$，

此时 $PM=3\sqrt{2}$ 或 $PM=4\sqrt{2}$.——————————————————9 分

书写分————————————————————————————————10 分

Ⅱ卷 （共 7 道题，满分 50 分）

四、选择题（本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.）

18. C　19. D　20. D

五、填空题（本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.）

21. $2\sqrt{3}$　22. $\left(0,2\sqrt{2}\right]$

23. 答案：1、3、5，

（此题错选得 0 分，少选得部分分，每对一个得 2 分，完全正确得满分）

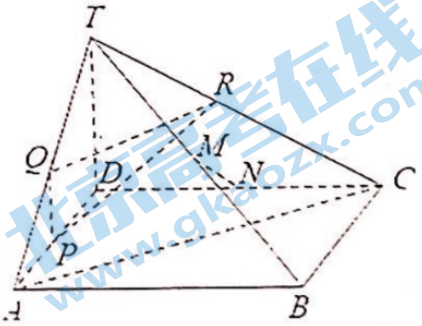
六、解答题（本大题共 1 小题，满分 14 分.）

24．已知四棱锥 $T-ABCD$ 的底面是平行四边形，平面 α 与直线 AD,TA,TC 分别交于点 P,Q,R 且 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AD},\overrightarrow{TQ}=x\overrightarrow{TA},\overrightarrow{CR}=x\overrightarrow{CT}$，点 M 在直线 TB 上，N 为 CD 的中点，且直线 MN // 平面 α．

（Ⅰ）设 $\overrightarrow{TA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{TB}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{TC}=\boldsymbol{c}$，试用基底 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 表示向量 $\overrightarrow{TD}$；

（Ⅱ）证明：四面体 $TABC$ 中至少存在一个顶点，从其出发的三条棱能够组成一个三角形；

（Ⅲ）证明：对所有满足条件的平面 α，点 M 都落在某一条长为 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}TB$ 的线段上.



解：（Ⅰ）因为 $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TC}=\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TD}$，

所以 $\overrightarrow{TD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$．——————————————————————3 分

（Ⅱ）不妨设 AB 是四面体最长的棱.

则在 ΔABT、ΔABC 中， $AT+TB>AB, AC+CB>AB$

所以 $AT+TB+AC+CB>2AB$

$\therefore (AT+AC)+(TB+BC)>2AB$，

所以 $AT+AC, TB+BC$ 至少有一个大于 AB，
不妨设 $AT+AC>AB$，

所以 AT,AC,AB 构成三角形.——————————————————8 分

（Ⅲ）设 $\overrightarrow{TA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{TB}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{TC}=\boldsymbol{c}$，由（Ⅰ）知 $\overrightarrow{TD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$．

因为 $\dfrac{AP}{AD}=\dfrac{TQ}{TA}=\dfrac{CR}{CT}=x$

所以 $\overrightarrow{TQ}=x\boldsymbol{a},\overrightarrow{TR}=(1-x)\boldsymbol{c}$

因为 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AD}$，所以 $\overrightarrow{TP}=(1-x)\boldsymbol{a}+x(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{c}-x\boldsymbol{b}$

$\overrightarrow{QP}=a+xc-xb-xa=(1-x)a+xc-xb$

$\overrightarrow{QR}=(1-x)c-xa=-xa+(1-x)c$

设 $\overrightarrow{TM}=\lambda\overrightarrow{TB}=\lambda b$.

因为 $\overrightarrow{TN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{TC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{TD}=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+c$

$\overrightarrow{NM}=\lambda b-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-c=-\frac{1}{2}a+\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)b-c$

因为 $\overrightarrow{NM}$ // 平面 PQR

所以存在实数 y,z 使得：$\overrightarrow{NM}=y\overrightarrow{QP}+z\overrightarrow{QR}$

所以

$$-\frac{1}{2}a+\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)b-c=y(1-x)a-yxb+yxc-zxa+z(1-x)c$$

$$=(y-xy-zx)a-yxb+(yx+z-xz)c$$

所以

$$\begin{cases} y-xy-zx=-\frac{1}{2} \\ -yx=\lambda+\frac{1}{2} \\ yx+z-xz=-1 \end{cases}$$

消元得：$(4\lambda+1)x^2-(4\lambda+3)x+2\lambda+1=0$

当 $\lambda=-\frac{1}{4}$ 时，$-2x+\frac{1}{2}=0$，即 $x=\frac{1}{4}$

当 $\lambda\neq-\frac{1}{4}$ 时，因为 $x\in R$

所以 $\Delta=(4\lambda+3)^2-4(4\lambda+1)(2\lambda+1)\geq 0$

解得 $-\frac{\sqrt{5}}{4}\leq\lambda\leq\frac{\sqrt{5}}{4}$

综上 $-\frac{\sqrt{5}}{4}\leq\lambda\leq\frac{\sqrt{5}}{4}$

所以对所有满足条件的平面 α，点 M 都落在某一条长为 $\frac{\sqrt{5}}{2}TB$ 的线段上. ——————14 分