丰台区 2021～2022 学年度第一学期期末练习高 二 数学　　2022.01

一．选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．直线 $x-y+1=0$ 的倾斜角是

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{4}$　　C．$\frac{\pi}{3}$　　D．$\frac{3\pi}{4}$

2．已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,\ 1,\ 2)$，$\boldsymbol{b}=(x,\ 2,\ y)$，且 $\boldsymbol{a}\ /\!/\ \boldsymbol{b}$，则 $x+y=$

A．-2　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．2

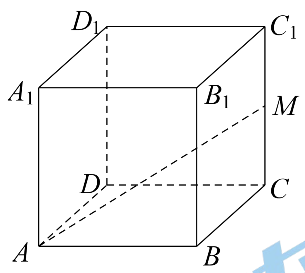
3．双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ 的渐近线方程是

A．$y=\pm\frac{3}{4}x$　　B．$y=\pm\frac{4}{3}x$　　C．$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$　　D．$y=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}x$

4．已知圆 C_1：$x^2+y^2=1$ 与圆 C_2：$(x-2)^2+(y+2)^2=1$，则圆 C_1 与圆 C_2 的位置关系是

A．内含　　B．相交　　C．外切　　D．外离

5．在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为棱 CC_1 的中点．若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，则 $\overrightarrow{AM}$ 等于



A．$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$　　B．$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$

C．$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$　　D．$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$

6．抛掷一枚质地均匀的硬币，设事件 $A=$“正面向上”，则下列说法正确的是

A．抛掷硬币 10 次，事件 A 必发生 5 次

B．抛掷硬币 100 次，事件 A 不可能发生 50 次

C．抛掷硬币 1000 次，事件 A 发生的频率一定等于 0.5

D．随着抛掷硬币次数的增多，事件 A 发生的频率在 0.5 附近波动的幅度较大的可能性小

7．对于随机事件 A，B，有下列说法：

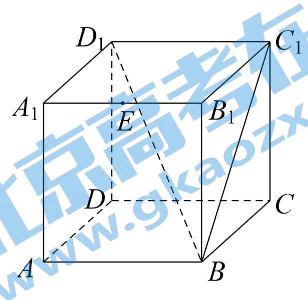
①如果 A，B 相互独立，那么 $P(AB)=P(A)P(B)$；②如果 A，B 对立，那么 $P(B)=1-P(A)$；

③如果 A，B 互斥，那么 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$．

其中正确的个数是

A．0 个　　B．1 个　　C．2 个　　D．3 个

8．在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 为棱 A_1B_1 的中点，则点 E 到平面 BC_1D_1 的距离为



A． $\sqrt{2}$　　B． $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C． $\dfrac{1}{2}$　　D． $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

9．已知 $A(-1，0)$，$B(0，1)$两点，点 C 到点$(1，0)$的距离为 1，则$\triangle ABC$ 面积的最大值为

A．1　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. $1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. 2

10．已知椭圆 M： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，双曲线 N： $\dfrac{x^2}{m^2}-\dfrac{y^2}{n^2}=1\ (m>0，n>0)$.设椭圆 M 的两个焦点分别为 F_1， F_2，椭圆 M 的离心率为 e_1，双曲线 N 的离心率为 e_2，记双曲线 N 的一条渐近线与椭圆 M 一个交点为 P， 若 $PF_1\perp PF_2$ 且 $|F_1F_2|=2|PF_1|$，则 $\dfrac{e_1}{e_2}$ 的值为

A. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$　　B. $\sqrt{3}-1$　　C. 2　　D. $\sqrt{3}+1$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二．填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 已知 $\boldsymbol{a}=(1，0，-1)$，$\boldsymbol{b}=(2，1，1)$，则 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=$________.

12. 某社区为了解居民的受教育程度，随机抽取了 1000 名居民进行调查，其结果如下：

受教育程度	研究生	本科及以下
人数	100	900

现从该社区中随机抽取一人，根据表中数据，估计此人具有研究生学历的概率为________.

13. 已知直线 l 与直线 $2x-y+1=0$ 平行，且在 y 轴上的截距为 -2，则直线 l 的方程为______.

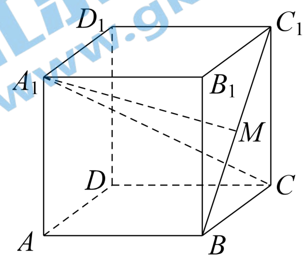
14. 已知点$P(2，a)$在抛物线 C： $y^2=4x$ 上，则点 P 到抛物线 C 的焦点的距离为______.

15. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 C： $y^2=2px$，过 $M(m，0)\ (m\neq 0)$ 的直线 l 与抛物线 C 交于 A，B 两点.若 $OA\perp OB$，则 $\dfrac{m}{p}=$______.

三．解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16.（本小题 14 分）

如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M 为线段 BC_1 的中点.



（Ⅰ）求证：$A_1C \perp BC_1$；

（Ⅱ）求线段 A_1M 的长.

17.（本小题 13 分）

某学校有 4 名北京冬奥志愿者，其中 2 名志愿者（记为 A_1，A_2）只参加语言服务，2 名志愿者（记为 B_1，B_2）只参加医疗服务．现采用不放回简单随机抽样的方法，从这 4 名志愿者中抽取 2 人.

（Ⅰ）写出这个试验的样本空间；

（Ⅱ）求抽取的 2 人中恰有一人参加语言服务的概率.

18. （本小题 14 分）

已知圆心坐标为$(2，1)$ 的圆 C 与 y 轴相切.

（Ⅰ）求圆 C 的方程；

（Ⅱ）设直线 l： $x-y+m=0$ 与圆 C 交于 A， B 两点，从条件①、条件②中选择一个作为已知，求 m 的值.

条件①：$|AB|=2\sqrt{3}$；条件②：$\angle ACB=120°$.

注：如果选择多个条件分别作答，按第一个解答计分.

19. （本小题 14 分）

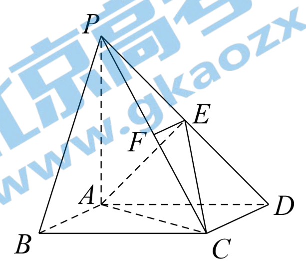
已知椭圆 E： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 (2，0)，离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）设直线 $y=kx-\sqrt{2}$ 被椭圆 C 截得的弦长为 $\dfrac{8}{3}$，求 k 的值.

20. （本小题 15 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，侧棱 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，点 E 为棱 PD 的中点，$AB=1$，$AD=AP=2$.



（Ⅰ）求证：PB // 平面 ACE；

（Ⅱ）求平面 ACE 与平面 PAB 夹角的余弦值；

(III)若 F 为棱 PC 的中点，则棱 PA 上是否存在一点 G，使得 $PC\perp$ 平面 EFG．若存在，求线段 AG 的长；若不存在，请说明理由.

21. （本小题 15 分）

已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的短半轴长为 1，焦距为 $2\sqrt{3}$.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）设椭圆 E 的右顶点为 A，过点 $P(4，0)$且斜率为 $k(k\neq 0)$ 的直线交椭圆 E 于不同的两点 B，C，直线 AB，AC 分别与直线 $x=4$ 交于点 M，N. 求 $|PM|+|PN|$ 的取值范围.

丰台区 2021～2022 学年度第一学期期末练习

高二数学参考答案

2022. 01

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

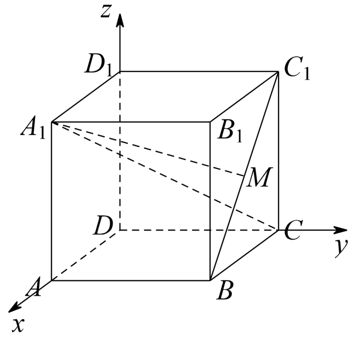
题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	D	C	D	A	D	D	B	C	A

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11．(0，－1，－3)　　12．$\frac{1}{10}$　　13．$y=2x-2$　　14．3　　15．2

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16．（本小题 14 分）



解：（Ⅰ）以 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则 A_1 (1，0，1)，C (0，1，0)，

B (1，1，0)，C_1 (0，1，1)，

所以 $\overrightarrow{A_1C}=(-1，1，-1)$，$\overrightarrow{BC_1}=(-1，0，1)$.

因为 $\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BC_1}=(-1)\times(-1)+1\times0+(-1)\times1=0$，

所以 $A_1C\perp BC_1$．　　………………………………7 分

（Ⅱ）因为点 M 是 BC_1 的中点，由（Ⅰ）可知 $M(\frac{1}{2}，1，\frac{1}{2})$，所以 $\overrightarrow{A_1M}=(-\frac{1}{2}，1，-\frac{1}{2})$，

从而 $\left|\overrightarrow{A_1M}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.　　………………………………14 分

17．（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）这个试验的样本空间为

$\Omega=\{(A_1,\ A_2),(A_1,\ B_1),(A_1,\ B_2),(A_2,\ B_1),(A_2,\ B_2),(B_1,\ B_2)\}$.………………5 分

（Ⅱ）设事件 M = “抽取的 2 人中恰有一人参加语言服务”，

则 $M=\{(A_1,\ B_1),(A_1,\ B_2),(A_2,\ B_1),(A_2,\ B_2)\}$.

所以 $P(M)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.　　………………………………13 分

18．（本小题 14 分）

解:（Ⅰ）因为圆 C 与 y 轴相切，所以 r =2，

又因为圆 C 的圆心坐标为点(2，1)，

所以圆 C 的方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$.　　………………………………6 分

（Ⅱ）选择条件①：$|AB|=2\sqrt{3}$ 作为条件，由题意 $|CA|=|CB|=2$，

所以圆心 C 到直线 l 的距离为 $\sqrt{|CA|^2-(\frac{|AB|}{2})^2}=1$，

所以 $\frac{|2-1+m|}{\sqrt{1+1}}=1$，　解得 $m=\sqrt{2}-1$ 或 $-\sqrt{2}-1$．　………………………………14 分

选择条件②：$\angle ACB=120°$ 作为条件，$|CA|=|CB|=2$，

可知圆心 C 到直线 l 的距离为 $\sqrt{|CA|^2-(\frac{|AB|}{2})^2}=1$，

所以 $\frac{|2-1+m|}{\sqrt{1+1}}=1$，解得 $m=\sqrt{2}-1$ 或 $-\sqrt{2}-1$．

19.（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）依题意得 $\begin{cases} a=2, \\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ a^2=b^2+c^2. \end{cases}$

解得 $a=4,b=\sqrt{2},c=\sqrt{2}$．

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.　　……………………………6 分

（Ⅱ）设直线与椭圆 E 的交点为 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$.

由 $\begin{cases} y=kx-\sqrt{2}, \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ 得，$(1+2k^2)x^2-4\sqrt{2}kx=0$，

所以 $x_1=0,x_2=\frac{4\sqrt{2}k}{1+2k^2}$，

依题意知 $AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=|x_1-x_2|\sqrt{1+k^2}=\frac{8}{3}$，

所以 $\left|\frac{4\sqrt{2}k}{1+2k^2}\right|\cdot\sqrt{1+k^2}=\frac{8}{3}$，

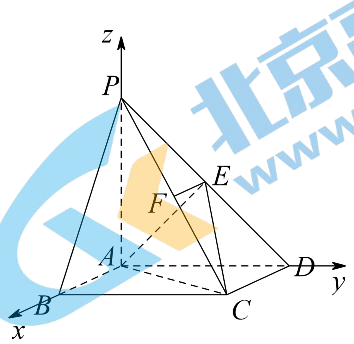
所以 $(\frac{k}{1+2k^2})^2(1+k^2)=\frac{2}{9}$，所以 $k^4+k^2-2=0$，

所以 $k^2=1$，所以 $k=\pm1$．　　……………………………14 分

20.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）因为底面 $ABCD$ 是矩形，所以 $AB\perp AD$．

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AB$，$PA\perp AD$．以 A 为原点，AB，AD，AP 所在直线分别为 x 轴、y 轴，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(1,2,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,2)$，$E(0,1,1)$，



所以 $\overrightarrow{AC}=(1,2,0)$，$\overrightarrow{AE}=(0,1,1)$，

$\overrightarrow{PB}=(1,0,-2)$.

设平面 ACE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$，则 $\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0. \end{cases}$

所以 $\begin{cases} x+2y=0, \\ y+z=0. \end{cases}$ 取 $y=1$，则 $x=-2$，$z=-1$．

所以 $\boldsymbol{n}=(-2,1,-1)$是平面 ACE 的一个法向量.

因为 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，且 $PB\not\subset$ 平面 ACE，

所以 PB //平面 ACE．　　……………………………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $AB\perp AD$，$PA\perp AD$，

又因为 $PA\cap AB=A$，所以 $AD\perp$ 平面 PAB．

所以 $\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$是平面 PAB 的一个法向量.

设平面 ACE 与平面 PAB 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=\left|\cos<\overrightarrow{AD},\boldsymbol{n}>\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\left|\boldsymbol{n}\right|}=\dfrac{2}{2\times\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

所以平面 ACE 与平面 PAB 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. ……………………………11 分

（III）因为 F 为 PC 的中点，所以 $F\,(\dfrac{1}{2}，1，1)$，所以 $\overrightarrow{EF}=(\dfrac{1}{2}，0，0)$.

又因为 $\overrightarrow{PC}=(1，2，-2)$，所以 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{PC}=\dfrac{1}{2}\neq0$，

所以 EF 与 PC 不垂直.

而 $EF\subset$ 平面 EFG，

所以棱 PA 上不存在点 G，使得 $PC\perp$ 平面 EFG. ……………………………15 分

21.（本小题 15 分）

解：（I）依题意知 $\begin{cases}b=1,\\2c=2\sqrt{3},\\a^2=b^2+c^2.\end{cases}$ 解得 $a=2,b=1,c=\sqrt{3}$

所以椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ ……………………………5 分

（II）由（I）知 $A\,(2，0)$，

设直线 BC 的方程为 $y=k(x-4)(k\neq0)$，

由 $\begin{cases}y=k(x-4),\\\dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(1+4k^2)x^2-32k^2x+64k^2-4=0$，

$\Delta=(32k^2)^2-4(1+4k^2)(64k^2-4)=16(1-12k^2)$，

由 $\Delta>0$ 得 $k^2<\dfrac{1}{12}$，且 $k^2\neq0$.

设 $B\,(x_1，y_1)$，$C\,(x_2，y_2)$，$x_1<2,x_2<2$，

则 $x_1+x_2=\dfrac{32k^2}{1+4k^2},x_1x_2=\dfrac{64k^2-4}{1+4k^2}$，

设 $M\,(4，m)$，$N\,(4，n)$ 依题意有 $\dfrac{m}{2}=\dfrac{y_1}{x_1-2}$，$\dfrac{n}{2}=\dfrac{y_2}{x_2-2}$

因为 $y_1y_2=k^2(x_1-4)(x_2-4)>0$，所以 $mn>0$.

所以 $|PM|+|PN|=|m|+|n|=|m+n|=|\dfrac{2y_1}{x_1-2}+\dfrac{2y_2}{x_2-2}|$

$=|\dfrac{2k(x_1-4)}{x_1-2}+\dfrac{2k(x_2-4)}{x_2-2}|$

$=|4k[1-\dfrac{x_1+x_2-4}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}]|$

$$=|4k[1-\frac{\frac{32k^2}{1+4k^2}-4}{\frac{64k^2-4}{1+4k^2}-2\times\frac{32k^2}{1+4k^2}+4}]|=\frac{1}{|k|}$$

因为 $k^2<\frac{1}{12}$，且 $k^2\neq 0$，所以 $\frac{1}{|k|}>2\sqrt{3}$， ……………………………………15 分

所以 $|PM|+|PN|$ 的取值范围是 $(2\sqrt{3}，+\infty)$.