

# 第39届全国中学生物理竞赛复赛试题

(2022年9月17日上午9:00-12:00)

## 考生必读

- 1、考生考试前请务必认真阅读本须知。
- 2、本试题共7道题，4页，总分为320分。
- 3、如遇试题印刷不清楚情况，请务必向监考老师提出。
- 4、需要阅卷老师评阅的内容一定要写在答题纸上；写在试题纸和草稿纸上的解答一律不能得分。

一、(40分) 迈克尔逊干涉仪是光学干涉仪中最常见的一种，发明者是美国物理学家阿尔伯特·亚伯拉罕·迈克尔逊。最初设计迈克尔逊干涉仪的目的是为测量“以太”（假想的传播光的媒质）的漂移速度，目前它广泛应用于精密测量。迈克尔逊干涉仪的光路图如图1a所示：

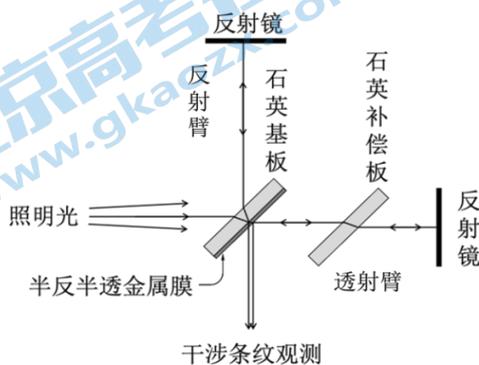


图 1a

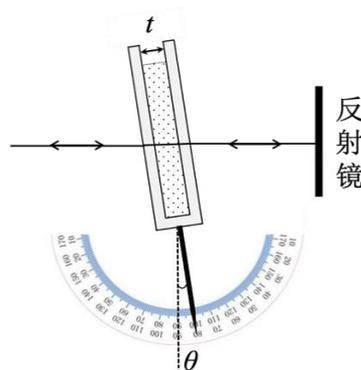


图 1b

照明光为单色激光，入射光经过半反半透的镜子分为沿干涉仪的两个臂（反射臂和透射臂）传播的两束光。半反半透镜与入射光轴方向之间的夹角为 $45^\circ$ ，反射臂和透射臂相互垂直。在两个臂端上各放置与相应的臂垂直的反射镜，反射镜可以沿臂的方向移动。反射和透射光线经反射镜反射，再次经过半反半透镜透射和反射，两束光在空间重叠，发生干涉。如果照明光为发散光源，我们观察到的干涉条纹为同心圆环。半反半透镜是在一个平整的石英基板上蒸镀一层薄金属膜制成，迈克尔逊干涉仪中参与叠加的两束光都经过半反半透镜的反射，一束光是在石英和金属界面上的反射，另一束光是在空气和金属界面上的反射。因为反射界面不同，所以两束光反射时相位突变不同，两者的差异为 $\Delta\varphi$ ，下面我们通过实验测量 $\Delta\varphi$ 。开始时，观察到干涉场中心是亮斑，干涉场最外侧是亮圆环，一共20个亮条纹（计及中心亮斑）。现在缓慢调节一个臂的反射镜，让反射镜沿臂的方向平移，观察到干涉条纹发生明暗变化，并发现同心圆环条纹越来越稀疏。干涉场中心明暗变化了23个周期，干涉场最外侧的明暗变化了20个周期。（本题中，条纹数目均视为精确计数值，干涉仪两臂的长度在cm量级。）

- (1) 求相位突变差异 $\Delta\varphi$ 。
- (2) 反射镜移动后，可以观察到多少个干涉亮条纹（计及中心亮斑）？
- (3) 使用此干涉仪测量某一透明液体的折射率，将扁平的石英空槽插入迈克尔逊干涉仪的一个臂，使得石英槽的表面与臂的方向垂直。然后调节石英槽与臂之间的夹角，使之改变 $\theta=5.00^\circ$ ；在角度改变过程中，干涉场中心明暗变化了10个周期。现将待测液体注入石英槽，如图1b所示。再次调节石英槽的倾斜角度，使其恢复到与臂垂直，在此过程中，干涉场中心明暗变化了17个周期。已知照明光波长为 $633\text{ nm}$ ，石英槽内壁间距为 $t=2.00\text{ mm}$ ，空气的折射率为1.00。求待测液体的折射率。

二、(40 分) 某长直弹簧由涂了绝缘漆的磷铜细丝绕制  $N$  匝而成, 可视为横截面半径为  $r$  的长直螺线管。弹簧原长为  $l_0$  ( $l_0 \gg r$ ), 劲度系数为  $k$ 。假设在弹簧形变过程中, 螺线管始终可视为均匀密绕的, 其横截面半径的变化可忽略。不计边缘效应、漏磁和重力。真空磁导率为  $\mu_0$ 。

(1) 用恒流源通过柔软导线对螺线管通以不变的电流  $I_0$ , 通电期间用外力使弹簧处处无形变。缓慢撤除外力后, 弹簧达到新的平衡位置 (但仍可压缩或拉伸), 此时的长度记为  $l_p$ 。

(i) 试导出可求解  $l_p$  的代数方程 (但不必求解), 并求通电弹簧在其平衡位置附近发生小幅度形变时的等效弹性系数  $k_{\text{eff}}$  (表达式中可以含有参量  $l_p$ );

(ii) 求能实现上述平衡状态的  $I_0$  的取值范围 (表达式中不得含有参量  $l_p$ )。

(2) 改变 (1) 问中的通电条件, 如果弹簧螺线管两端先用电阻为零的柔软理想导线连接形成回路, 并假设弹簧螺线管电阻也为零, 且在初始时回路已加载电流  $I'_0$ , 并用外力使弹簧处处无形变。缓慢撤除外力后, 弹簧达到新的平衡位置 (但仍可压缩或拉伸), 此时的长度记为  $l'_p$ 。试求  $l'_p$ 、以及通电弹簧在其平衡位置附近发生小幅度形变时的等效弹性系数  $k'_{\text{eff}}$ 。

三、(40 分) 如图 3a, 将质量为  $m$ 、半径为  $R$  的匀质实心球从倾角为  $\theta$  的无限长固定斜面上发射, 已知球心初速度垂直于斜面, 大小为  $V$ , 球初始的自转角速度为零。为方便描述实心球此后的运动, 在斜面参考系中建立如图 3a 所示的平面直角坐标系, 其中  $x$  轴沿斜面向下,  $y$  轴垂直于斜面向上。假设球与斜面的碰撞是弹性的, 碰撞时间极短, 且碰撞前、后的瞬间球垂直于斜面的速度大小不变。进一步假设斜面足够粗糙, 以至于在球与斜面的碰撞过程中, 其间摩擦力足够大、

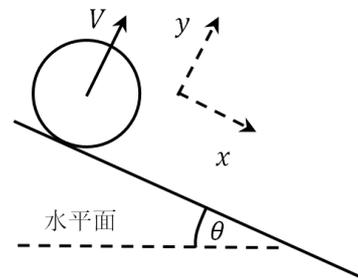


图 3a

接触点无相对滑动。已知球绕其直径的转动惯量为  $I = \frac{2}{5}mR^2$ , 求

- (1) 第 1 次碰撞前的球心速度和球的自转角速度;
- (2) 第 1 次碰撞后的球心速度和球的自转角速度;
- (3) 第  $n$  次碰撞后球心沿着  $x$  轴方向的速度以及球的自转角速度;
- (4) 前  $n$  次碰撞过程中斜面对球施加的总冲量。

四、(60 分) 如图 4a, 一根长度为  $2a$ 、质量为  $m$  的匀质刚性细杆, 其一端有一小孔, 嵌套在半径为  $R$  的水平圆环的 P 点处 (P 是圆环上的固定点); P 点 (连同杆) 随圆环一起绕圆环中心轴以恒定角速度  $\omega$  转动; 同时, 杆可绕 P 点无摩擦地转动, 且杆和圆环矢径 OP 始终在同一竖直平面内; 杆与竖直方向之间夹角为  $\theta$ 。重力加速度大小为  $g$ 。

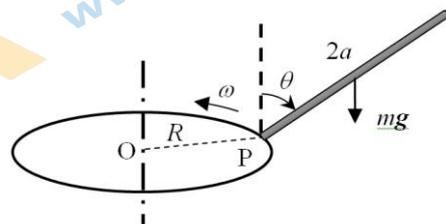


图 4a

(1) 将所有类型的保守力做功都与势能变化相联系, 试分别在实验室系 L 和在随矢径 OP 转动的转动参考系 S 中, 写出杆的机械能表达式 (表达式中可以含有  $\dot{\theta}$ );

(2) 在 S 参考系中导出杆处于平衡位形时,  $\theta$  所需满足的条件;

(3) 在 S 参考系中, 对于第 (2) 问中得到的结果, 利用图解法分析  $\theta$  取值在 I ( $0 \leq \theta < \pi/2$ )、II ( $\pi/2 \leq \theta < \pi$ )、III ( $\pi \leq \theta < 3\pi/2$ ) 和 IV ( $3\pi/2 \leq \theta < 2\pi$ ) 象限中, 分别可能出现的杆的平衡位形的数目, 以及相应的  $a$ 、 $R$ 、 $\omega$  各参量之间需要满足的条件;

(4) 在  $S$  参考系中，分象限画出对杆所受到的相对于  $P$  点的力矩有贡献的受力示意图（对于分布性的力，仅需示意性地画出其对  $P$  点力矩有贡献的等效合力），查看是否可能出现平衡位形，以检验 (3) 中分析的结果；

(5) 试讨论 (3) 中所确定的杆的各个平衡位形的稳定性。

五、(40 分) 两根相同的理想轻弹簧，劲度系数均为  $k$ 、自然长度均为  $0$ 。两弹簧之间以一质量为  $m$  的小球相连。将弹簧 1 空着的一端悬挂于天花板上，整个系统自然下垂，初始时静止。已知两弹簧中任意一个一旦被拉伸至临界长度（该临界长度大于  $\frac{mg}{k}$ ，这里  $g$  表示重力加速度的大小）便会被拉断。

实验发现，如果缓慢地拉动下面的弹簧 2 的下端，上面的弹簧 1 将被拉断。如果快速地拉动，则很有可能拉断下面的弹簧 2。

(1) 设加载于弹簧 2 下端的作用力随时间变化的关系为  $F(t)$ ，写出弹簧 1 的长度  $x_1(t)$  及小球加速度  $\ddot{x}_1(t)$  所满足的运动方程。

(2) 在一个简单模型中，假设  $F(t)$  与时间  $t$  的关系为

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \alpha t & t \geq 0 \end{cases}$$

其中  $\alpha$  为大于零的常量，它的大小对应力加载的快慢。求在该力的作用下弹簧 1、2 在  $t$  ( $t > 0$ ) 时刻的长度  $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 。

(3) 记某一弹簧先被拉断的时刻为  $t_0$ ，根据 (2) 中的结果，

(i) 求使弹簧 1 必然先被拉断所对应的  $\alpha$  取值范围；

(ii) 对于并非必然使弹簧 1 先被拉断的  $\alpha$  取值，分析使弹簧 1 先被拉断的时刻  $t_0$  需满足的条件（表达式中可含有  $\alpha$ ）；

(iii) 求弹簧 2 先被拉断的可能性与  $\alpha$  取值大小的关系，并用此关系说明题述实验现象。

(4) 给定临界长度为  $L$ ，要确保弹簧 2 先被拉断，试确定  $\alpha$  需满足的关系式。有无可能两弹簧同时被拉断？若有，试求出能让两弹簧同时达到临界长度  $L$  所对应的  $\alpha$  满足的关系式。

六、(60 分) 金属内部有温度梯度时可以在其两端产生电动势，该效应被应用于热电偶温度计等。为了分析此现象，现建立一个简单的经典玩具模型，如图 6a 所示：一厚度为  $2L$ 、沿着  $y$ 、 $z$  方向无限延展的金属平板，位于  $-L < x < L$  区域；而  $|x| > L$  区域为真空，电场为零。将金属内的导电电子视为在空间均匀的正电荷背景上运动的经典理想气体。没有温度梯度时，呈电中性的金属内部的电子是完全均匀分布的，其数密度为  $n_0$ ；有温度梯度时，金属内的温度是  $x$  的函数， $T(x) = T_0 + \delta T(x)$ ，且  $|\delta T(x)| \ll T_0$ 。在（局域）热平衡状态下，金属内电子数密度  $n(x) = n_0 + \delta n(x)$  会略微偏离  $n_0$ ， $|\delta n(x)| \ll n_0$ 。金属内部也会有很小的沿  $x$  方向的电场  $E_x(x)$ 。金属表面  $x = \pm L$  内侧也分别有很小的面电荷密度  $\sigma_+$  和  $\sigma_-$ 。已知电子质量为  $m$ ，所带电荷为  $-e$  ( $e > 0$ )。忽略重力，玻尔兹曼常量为  $k_B$ 。

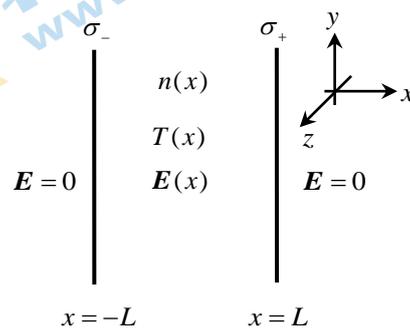


图 6a

(1) 粒子数密度  $n(x)$  的不均匀性会引起粒子的扩散。若在时间间隔  $dt$  内通过  $yz$  平面上面积为  $dA$  的粒子数为  $j_x dAdt$ ，则  $j_x$  被称为粒子流密度。粒子扩散流密度  $j_x(x)$  满足斐克 (Fick) 定律

$$j_x(x) = -D \frac{d}{dx} n(x)$$

式中  $D$  是扩散系数

$$D = c \frac{\sqrt{T(x)}}{n(x)}$$

这里,  $c$  是已知常量。在平衡状态下, 金属内部应该没有净的电流, 因此前述的电子扩散流会被内部电场产生的漂移电流抵消。为简化起见, 设金属的电阻率  $\rho$  是与  $n(x)$ 、 $T(x)$  等无关的已知常量。求金属板内部电场  $E_x(x)$  的表达式 (用  $n(x)$ 、 $T(x)$ 、 $\frac{d}{dx} n(x)$  和其他常量表出)。

(2) 试由静电场高斯定理导出  $E_x(x)$  满足的微分方程; 并利用 (1) 的结果消去电场  $E_x(x)$ , 导出  $n(x)$  满足的微分方程和边界条件。真空介电常量为  $\epsilon_0$ 。(提示: 净的电荷密度包含正电荷背景)

(3) 将 (2) 中方程线性化, 即只保留  $\delta n$ 、 $\delta T$  等小量的线性项, 解出  $\delta n(x)$  (解中可包含  $\sigma_+$  和  $\sigma_-$ )。

(4) 假设金属内存在温度梯度, 即  $\delta T(x)$  不为零, 但在任意  $x$  处电子气 (可视为理想气体) 处于局域热平衡; 电子气中的电子受到电场  $E_x(x)$  的作用, 但厚度为  $dx$  的薄层内的电子气仍处于宏观的力学平衡状态。试导出  $\delta T(x)$  满足的微分方程, 并将其线性化。再利用 (3) 的结果, 求出  $\delta T(x)$ 。

(5) 根据 (3) 和 (4) 的结果, 求出金属两端 ( $x = -L$  和  $x = +L$ ) 的电势差和温度差的比值 (即金属的 Seebeck 系数  $S$ )

$$S = \frac{U(L) - U(-L)}{T(L) - T(-L)}$$

附注: 对金属温差电现象的正确分析必须考虑电子的量子效应, 本题目中的简化经典模型并不适用于真实情况。

七、(40分) 欧洲核子研究中心的大型强子对撞机上进行了高能铅核-铅核碰撞的实验, 碰撞后的初始产物可视为温度很高的“火球”, 其内的物质主要由静止质量很小、速度极其接近于光速的夸克组成。本题忽略该物质中除夸克外的其他组分, 将其视为“夸克物质”, 并将夸克都近似视为质点, 夸克之间除相互碰撞的瞬间外无相互作用, 碰撞过程中粒子数目守恒, 其速度分布是各向同性的。已知温度为  $T$  时, 在任一动量大小区间  $[p, p+dp]$  内, 夸克物质中能量为  $E$  的夸克粒子的分布比率 (概率分布密度) 正比于  $e^{-\frac{E}{k_B T}} 4\pi p^2 dp$ , 其中玻尔兹曼常量  $k_B$  或理想气体普适常量  $R$  视为已知量。

(1) 试在本题模型近似下, 导出夸克物质的状态方程 (用压强  $P$  与能量密度平均值  $u$  之间的关系表出)。

(2) 试在本题模型近似下, 导出夸克物质以压强  $P$ 、粒子数密度  $n$  和温度  $T$  之间的关系表述的状态方程。

(3) 试在本题模型近似下, 求夸克物质的定体摩尔热容  $C_V$  和热容比  $\gamma$  (定压摩尔热容与定体摩尔热容的比值)。

(4) 假设铅核-铅核碰撞的早期产物形成的“火球”近似为球形, 半径约为  $3.0 \times 10^{-15} \text{ m}$ , 其中的夸克物质温度约为  $400 \text{ MeV}/k_B$ 。此后, “火球”迅速膨胀降温, 至温度约为  $150 \text{ MeV}/k_B$  时, 夸克物质中的夸克开始被束缚在一起形成质子和中子。假设“火球”的膨胀降温过程可近似为准静态的绝热过程, 求出质子和中子刚刚形成时“火球”的半径。

# 第 39 届全国中学生物理竞赛复赛试题参考解答

(2022 年 9 月 17 日 9:00-12:00)

一、

(1) 迈克尔逊干涉等效于薄膜干涉，照明光为发散光束，反射镜与臂垂直，所以等效于等倾干涉。设开始时两个臂的光学长度差为  $d$ ，中心为亮条纹：

$$\frac{2\pi}{\lambda} 2d + \Delta\varphi = 2k\pi \quad \text{①}$$

其中  $k$  为整数。一共 20 个亮条纹，故对于干涉场最外侧的亮条纹：

$$\frac{2\pi}{\lambda} 2d \cos\gamma_M + \Delta\varphi = 2(k-19)\pi \quad \text{②}$$

其中  $\gamma_M$  为薄膜干涉的最大倾角，由①②式得：

$$\frac{2\pi}{\lambda} 2d(1 - \cos\gamma_M) = 19 \times 2\pi \quad \text{③}$$

移动反射镜，条纹变稀疏，说明两臂间光学长度差变小，设反射镜移动了  $\Delta d$ 。中心的变化：

$$\frac{2\pi}{\lambda} 2\Delta d = 23 \times 2\pi \quad \text{④}$$

最外侧的变化：

$$\frac{2\pi}{\lambda} 2\Delta d \cos\gamma_M = 20 \times 2\pi \quad \text{⑤}$$

于是得：

$$\cos\gamma_M = \frac{20}{23} \text{ 和 } \Delta d = \frac{23}{2}\lambda \quad \text{⑥}$$

代入③式得：

$$\frac{2\pi}{\lambda} 2d \left(1 - \frac{20}{23}\right) = 19 \times 2\pi \quad \text{⑦}$$

由此得：

$$2d = \frac{23 \times 19}{3}\lambda = 145\frac{2}{3}\lambda \quad \text{⑧}$$

代入①式：

$$\frac{2\pi}{\lambda} \left(145\frac{2}{3}\lambda\right) + \Delta\varphi = 2k\pi \quad \text{⑨}$$

即：

$$145 \times 2\pi + \frac{2}{3} \times 2\pi + \Delta\varphi = 2k\pi \quad \text{⑩}$$

所以  $\Delta\varphi$  应该为：

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{3} \quad \text{⑪}$$

【注：因为光波函数以  $2\pi$  为周期，所以  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi$  ( $k'$  为一整数) 都算对】

(2) 反射镜移动后，中心为亮斑、干涉场最外侧为亮条纹，设一共有  $m$  条亮条纹，于是：

$$\frac{2\pi}{\lambda} 2(d - \Delta d)(1 - \cos \gamma_M) = (m - 1)2\pi \quad (12)$$

由此得:

$$m = 17 \quad (13)$$

(3) 设液体的折射率为  $n$ , 如解题图 1a 所示。图中,  $\theta$ 、 $i$  分别是光线的入射角、折射角。由折射定律有

$$\sin \theta = n \sin i$$

当石英槽相对于与透射臂垂直方向改变  $\theta$  时, 光线往返通过石英槽的光程在槽内有、无液体两种情形下的值之差为:

$$\begin{aligned} \Delta L(\theta) &= 2(n \overline{OA} + \overline{AC} - \overline{OB}) \\ &= 2 \left[ \frac{nt}{\cos i} + t \left( \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \frac{\sin i}{\cos i} \right) \sin \theta - \frac{t}{\cos \theta} \right] \\ &= 2t \left[ \left( \frac{n}{\cos i} - \frac{n \sin^2 i}{\cos i} \right) - \left( \frac{1}{\cos \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \right) \right] \\ &= 2nt \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{n^2}} - 2t \cos \theta \end{aligned} \quad (14)$$

于是, 上述光程差与  $\theta = 0$  时的值相比较, 有

$$\Delta L(0) - \Delta L(\theta) = 2nt \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{n^2}} \right) - 2t(1 - \cos \theta) = -\lambda \Delta N \quad (15)$$

因为角度  $\theta$  比较小,  $\frac{\sin^2 \theta}{n^2} \ll 1$ , 将上式对  $\theta$  作小量展开并保留至一阶小量:

$$t \frac{\sin^2 \theta}{n} - 2t(1 - \cos \theta) = -\lambda \Delta N \quad (16)$$

得

$$n = \frac{t \sin^2 \theta}{2t(1 - \cos \theta) - \lambda \Delta N} \quad (17)$$

将题给数据  $t = 2.00 \text{ mm}$ ,  $\theta = 5.00^\circ$ ,  $\Delta N = N_2 - N_1 = 7$ , 代入(17)式得:

$$n = 1.41 \quad (18)$$

评分标准:

第(1)问 23分: ①②式各3分, ③式2分, ④⑤式各3分, ⑥式4分, ⑧式2分, ⑪式3分;

第(2)问 5分: ⑬式5分;

第(3)问 12分: ⑭⑮⑯式各4分。

二、

(1) (i) 不计边缘效应和漏磁。记螺线管长度为  $l$ 、通电电流为  $I$ , 则管内磁感应强度为

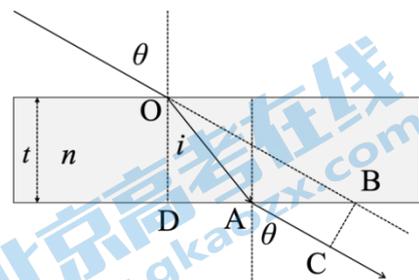
$$B = \mu_0 n I = \frac{\mu_0 N I}{l} \quad (1)$$

螺旋管的磁通匝链数为

$$\Psi = N B \pi r^2 = \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2 I}{l} \quad (2)$$

螺线管的电感为

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2}{l} \quad (3)$$



解题图 1a

弹簧的弹性势能为

$$W_k = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 \quad (4)$$

当  $I = I_0$  时，电感存储的磁场能量为

$$W_B = \frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2 I_0^2}{2l} \quad (5)$$

考虑一缓慢、微小形变过程，记  $\Delta l$  为过程中的弹簧的微小伸长量（可正可负，视为无穷小量）。加载于弹簧两端以维持弹簧平衡的外力设为  $F$ （以拉伸方向为力的正方向），则依功能原理有

$$F\Delta l + \Delta A_S = \Delta W_k + \Delta W_B \quad (6)$$

其中  $\Delta A_S$  是恒流源克服自感电动势所做的功。按照法拉第电磁感应定律，维持电流  $I = I_0$  不变，螺线管所在电流回路的自感电动势为（沿电流的反方向）

$$U = \frac{\Delta\Psi}{\Delta t} = \frac{\Delta(LI_0)}{\Delta t}$$

恒流源克服自感电动势做的功  $\Delta A_S$  为

$$\Delta A_S = UI_0\Delta t = \frac{\Delta(LI_0)}{\Delta t} I_0\Delta t = I_0^2\Delta L = -\Delta W_S \quad (7)$$

式中

$$W_S = -LI_0^2$$

将④⑤⑦式代入⑥式，并与下式

$$F\Delta l = \Delta W \quad (8)$$

比较得

$$W = W_k + W_B + W_S = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 - \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2 I_0^2}{2l} \quad (9)$$

由⑧⑨式得

$$F = \frac{\Delta W}{\Delta l} = k(l-l_0) + \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \pi N^2 r^2}{l^2} I_0^2 \quad (10)$$

缓慢撤除外力后，弹簧达到新的平衡位置时的长度  $l_p$ ；换言之，当  $l = l_p$  时  $F = 0$ 。由⑩式得

$$k(l_p - l_0) + \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \pi N^2 r^2}{l_p^2} I_0^2 = 0 \quad (11)$$

此即为所求的  $l_p$  需满足的代数方程。

若  $l = l_p + \delta l$ ，对⑩式做小量  $\delta l$  展开得

$$F = \left( k - \frac{\mu_0 \pi N^2 r^2}{l_p^3} I_0^2 \right) \delta l + \dots = k_{\text{eff}} \delta l + \dots \quad (12)$$

式中， $\dots$  是比  $\delta l$  更高阶的小量， $k_{\text{eff}}$  是通电弹簧在平衡长度  $l_p$  附近发生小幅度形变时的等效弹性系数。由⑪⑫式得

$$k_{\text{eff}} = k - \frac{\mu_0 \pi N^2 r^2}{l_p^3} I_0^2 = \frac{\mu_0 \pi N^2 r^2 (3l_p - 2l_0)}{2l_p^3 (l_0 - l_p)} I_0^2 \quad (13)$$

(ii) 由⑪式得

$$I_0^2 = \frac{k}{\mu_0 \pi N^2 r^2} (2l_0 - 2l_p) l_p \quad (14)$$

由平均值不等式

$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$ , 当  $a > 0, b > 0, c > 0$ ; 当且仅当  $a = b = c$  时取等号

知

$$I_0^2 \leq \frac{k}{\mu_0 \pi N^2 r^2} \left( \frac{2l_0}{3} \right)^3 = \frac{8}{27} \frac{k l_0^3}{\mu_0 \pi N^2 r^2} \quad (15)$$

等号仅对应于  $l_p = \frac{2}{3} l_0$  的情况。于是

$$I_0 \leq \sqrt{\frac{8}{27} \frac{k l_0^3}{\mu_0 \pi N^2 r^2}} \quad (16)$$

(2) 忽略边缘效应和漏磁。由于整个通电回路电阻为零，弹簧拉伸或者压缩时，回路自感电动势为零，此即自感磁通不变，故

$$LI = L_0 I_0' = \frac{\mu_0 \pi N^2 r^2}{l_0} I_0' \quad (17)$$

其中长度为  $l$  的弹簧螺线管自感系数  $L$  由③式给出，其对应的电流为  $I$ ；而

$$L_0 = \frac{\mu_0 \pi N^2 r^2}{l_0}$$

故电感磁能为

$$W_B = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{(L_0 I_0')^2}{2L} = \frac{(L_0 I_0')^2}{2\mu_0 N^2 \pi r^2} l = \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2 I_0'^2}{2l_0^2} l \quad (18)$$

由④⑱式得系统总能量为

$$W = W_k + W_B = \frac{1}{2} k(l - l_0)^2 + \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2 I_0'^2}{2l_0^2} l \quad (19)$$

考虑缓慢、微小形变过程，记  $\Delta l$  为过程中的弹簧的微小伸长量（可正可负，视为无穷小量）。加载于弹簧两端以维持平衡的外力设为  $F$ （以拉伸方向为正向），则过程中按功能原理有

$$F \Delta l = \Delta W$$

其中  $W$  由⑱式给出。由上式得

$$F = \frac{\Delta W}{\Delta l} = k(l - l_0) + \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \pi N^2 r^2}{l_0^2} I_0'^2 \quad (20)$$

缓慢撤除外力后，弹簧达到新的平衡位置时的长度  $l'_p$ 。此即当  $l = l'_p$  时  $F = 0$ ，由⑳式得

$$k(l'_p - l_0) + \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \pi N^2 r^2}{l_0^2} I_0'^2 = 0 \quad (21)$$

解得

$$l'_p = l_0 - \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \pi N^2 r^2}{k l_0^2} I_0'^2 \quad (22)$$

若  $l = l'_p + \delta l$ ，由⑱式得

$$F = k \delta l = k'_{\text{eff}} \delta l$$

故通电弹簧在平衡位置附近发生小幅度形变时的等效弹性系数为

$$k'_{\text{eff}} = k \quad (23)$$

**评分标准：** 本题 40 分。

第 (1) 问 26 分，其中

第 (i) 小问 21 分，①②③④式各 1 分，⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫式各 2 分，⑬式 1 分；

第 (ii) 小问 5 分，⑭⑮式各 2 分，⑯式 1 分。

第 (2) 问 14 分，⑰式 3 分，⑱⑲⑳㉑㉒各 2 分，㉓式 1 分。

三、

(1) 设重力加速度大小为  $g$ 。由质心运动定理得到

$$a_x = g \sin \theta, \quad a_y = -g \cos \theta \quad (1)$$

球从出射到落下期间做抛体运动, 球心在时刻  $t$  的速度为 (以球抛出瞬间为时间零点)

$$v_x = gt \sin \theta, \quad v_y = V - gt \cos \theta \quad (2)$$

相对于其初始位置的位移为

$$x = \frac{1}{2}gt^2 \sin \theta, \quad y = Vt - \frac{1}{2}gt^2 \cos \theta$$

设球从出射到再次落到斜面所需时间为  $T$ , 有

$$y(T) = 0$$

由此得

$$T = \frac{2V}{g \cos \theta} \quad (3)$$

再次落到斜面时 ( $t = T$ ) 球心的速度则为

$$v_x = Tg \sin \theta = 2V \tan \theta, \quad v_y = -V \quad (4)$$

即垂直于斜面的速度大小不变、方向相反, 而沿着斜面的速度的增加为

$$w = 2V \tan \theta$$

球在空中运动时, 只受重力作用, 由于相对于球心的力矩为零, 因而由质心系中以质心为参考点的角动量定理知, 球在空中运动时角速度不变, 仍为零。 (5)

(2) 设球的角速度和球心在  $x$  方向的速度在某次碰撞前分别为  $\omega_i$  和  $v_i$ , 碰撞后则分别变为了  $\omega_f$  和  $v_f$ , 这里角速度均以顺时针转动为正。设碰撞过程中摩擦力沿着负  $x$  轴方向投影的时间平均值为  $\bar{F}$ 。由动量定理

$$-\bar{F}\Delta t = mv_f - mv_i \quad (6)$$

以及质心角动量定理

$$R\bar{F}\Delta t = I(\omega_f - \omega_i) \quad (7)$$

可得

$$v_f - v_i = -\frac{2}{5}R(\omega_f - \omega_i) \quad (8)$$

由弹性碰撞过程中动能前后不变

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2 = \frac{1}{2}mv_i^2 + \frac{1}{2}I\omega_i^2 \quad (9)$$

可得

$$v_f^2 - v_i^2 = -\frac{2}{5}R^2(\omega_f^2 - \omega_i^2) \quad (10)$$

联立⑧⑩得

$$v_f = \frac{3}{7}v_i + \frac{4}{7}R\omega_i, \quad R\omega_f = \frac{10}{7}v_i - \frac{3}{7}R\omega_i \quad (11)$$

(因为碰撞过程中有静摩擦, 故去掉了增根  $v_f = v_i, \omega_f = \omega_i$ )。根据 (1) 问结果, 第 1 次碰撞前有

$$v_{i1} = 2V \tan \theta, \quad \omega_{i1} = 0$$

将其代入⑪式得, 第 1 次碰撞后有

$$v_{f1} = \frac{6V \tan \theta}{7}, \quad \omega_{f1} = \frac{20V \tan \theta}{7R} \quad (12)$$

即第 1 次碰撞后, 球心速度为

$$v_{1f}\hat{x} + V\hat{y} = V\left(\frac{6}{7}\tan\theta\hat{x} + \hat{y}\right)$$

这里  $\hat{x}$  和  $\hat{y}$  分别表示沿  $x$  轴正向和  $y$  轴正向的单位矢量。

(3) 设第  $n$  次碰后的角速度和球心在  $x$  方向的速度分别为  $\omega_n$  和  $v_n$  (略去下标  $f$ , 下同), 从第  $n-1$  次碰撞后到第  $n$  次碰撞前, 小球绕球心的角速度不变, 为  $\omega_{n-1}$ , 沿着  $x$  方向的速度由  $v_{n-1}$  增加为  $v_{n-1} + w$ 。将⑪式应用于第  $n$  次碰撞得

$$v_n = \frac{3}{7}(v_{n-1} + w) + \frac{4}{7}R\omega_{n-1} \quad (13)$$

$$R\omega_n = \frac{10}{7}(v_{n-1} + w) - \frac{3}{7}R\omega_{n-1} \quad (14)$$

【解法一】

将⑭式乘某个常数  $\alpha$  再与⑬式相加得

$$v_n + \alpha R\omega_n = \frac{3+10\alpha}{7}\left(v_{n-1} + \frac{4-3\alpha}{3+10\alpha}R\omega_{n-1} + w\right) \quad (15)$$

选取  $\alpha$  满足

$$\frac{4-3\alpha}{3+10\alpha} = \alpha \quad (16)$$

符合条件的  $\alpha$  有两个, 分别为

$$\alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = \frac{2}{5} \quad (17)$$

分别将其代入⑮式, 给出

$$v_n - R\omega_n = -(v_{n-1} - R\omega_{n-1}) - w \quad (18)$$

$$v_n + \frac{2}{5}R\omega_n = \left(v_{n-1} + \frac{2}{5}R\omega_{n-1}\right) + w \quad (19)$$

由此解得

$$v_n - R\omega_n + \frac{1}{2}w = (-1)^{n-1}\left(v_1 - R\omega_1 + \frac{1}{2}w\right) \quad (20)$$

$$v_n + \frac{2}{5}R\omega_n = \left(v_1 + \frac{2}{5}R\omega_1\right) + (n-1)w \quad (21)$$

将⑳式代入㉑式, 给出

$$v_n - R\omega_n = \frac{(-1)^n - 1}{2}w, \quad v_n + \frac{2}{5}R\omega_n = nw \quad (22)$$

由此得

$$v_n = \frac{5}{7}\left[n - \frac{1-(-1)^n}{5}\right]w, \quad \omega_n = \frac{5}{7}\left[n + \frac{1-(-1)^n}{2}\right]\frac{w}{R} \quad (23)$$

因此当  $n$  为偶数时,

$$v_n = \frac{10}{7}nV\tan\theta, \quad \omega_n = \frac{10}{7}\frac{nV\tan\theta}{R} \quad (24)$$

当  $n$  为奇数时,

$$v_n = \frac{2}{7}(5n-2)V\tan\theta, \quad \omega_n = \frac{10}{7}(n+1)\frac{V\tan\theta}{R} \quad (25)$$

【解法二】

将⑫式代入⑬⑭两式得

$$v_2 = \frac{10}{7}w = \frac{20}{7}V \tan \theta = R\omega_2 \quad (15)'$$

此外, 若

$$v_n = R\omega_n \quad (16)'$$

则由⑬⑭两式得

$$v_{n+1} = v_n + \frac{3}{7}w, \quad R\omega_{n+1} = v_n + \frac{10}{7}w \quad (17)'$$

$$v_{n+2} = v_n + \frac{10}{7}w = R\omega_{n+2} \quad (18)'$$

考虑到  $v_0 = R\omega_0 = 0$ , 由⑮'⑰'得, 当  $n$  为偶数时,

$$v_n = \frac{10}{7}nV \tan \theta, \quad \omega_n = \frac{10}{7} \frac{nV \tan \theta}{R} \quad (19)'$$

由⑰'⑲'得, 当  $n$  为奇数时,

$$v_n = \frac{2}{7}(5n-2)V \tan \theta, \quad \omega_n = \frac{10}{7}(n+1) \frac{V \tan \theta}{R} \quad (20)'$$

【解法三】

将⑬⑭式写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} v_n \\ R\omega_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_{n-1} + w \\ R\omega_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_{n-1} \\ R\omega_{n-1} \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix} \quad (15)''$$

其中

$$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 10 & -3 \end{pmatrix} \quad (16)''$$

由于第 1 次碰后

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ R\omega_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17)''$$

由此不难递推给出

$$\begin{pmatrix} v_n \\ R\omega_n \end{pmatrix} = (A^n + A^{n-1} + \dots + A^2 + A) \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix} \quad (18)''$$

而由于  $A^2 = J$  ( $J$  为单位矩阵), 因而当  $n$  为偶数时,

$$\begin{pmatrix} v_n \\ R\omega_n \end{pmatrix} = \frac{n}{2}(A+J) \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{5nw}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (19)''$$

即有

$$v_n = R\omega_n = \frac{5}{7}nw = \frac{10}{7}nV \tan \theta \quad (20)''$$

当  $n$  为奇数时,

$$\begin{pmatrix} v_n \\ R\omega_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}[(n+1)A + (n-1)J] \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{w}{7} \begin{pmatrix} 5n-2 \\ 5(n+1) \end{pmatrix} \quad (21)''$$

即有

$$v_n = \frac{2}{7}(5n-2)V \tan \theta, \quad \omega_n = \frac{10}{7}(n+1) \frac{V \tan \theta}{R} \quad (22)''$$

(4) 第  $k$  次碰撞前后, 球心在  $x$  方向的速度分别为  $v_{k-1} + w$  和  $v_k$ , 因而前  $n$  次碰撞过程中斜面对球提供的  $x$  方向的

总冲量为

$$J_x = \sum_{k=1}^n m[v_k - (v_{k-1} + w)] = mv_n - nmw \quad (26)$$

求和利用了初始条件

$$v_0 = 0$$

此外每次碰撞过程中斜面给球的  $y$  方向的冲量相同, 均为  $2mV$ , 故

$$J_y = \sum_{k=1}^n 2mV = 2nmV \quad (27)$$

因此总冲量为

$$\mathbf{J} = m(v_n - nw)\hat{x} + 2nmV\hat{y} \quad (28)$$

将⑳式和  $w = 2V \tan \theta$  代入㉘式得

$$\mathbf{J} = \frac{2}{7}mV \left\{ -[2n+1-(-1)^n] \tan \theta \hat{x} + 7n\hat{y} \right\} \quad (29)$$

当  $n$  为偶数时,

$$\mathbf{J} = \frac{2}{7}nmV(-2 \tan \theta \hat{x} + 7\hat{y}) \quad (30)$$

当  $n$  为奇数时,

$$\mathbf{J} = \frac{2}{7}nmV \left[ -2 \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \tan \theta \hat{x} + 7\hat{y} \right] \quad (31)$$

**评分标准:** 本题 40 分。

第 (1) 问 5 分, ①②③④⑤式各 1 分。

第 (2) 问 13 分, ⑥⑦⑧⑨式各 3 分, ⑩⑪⑫式各 1 分。

第 (3) 问 15 分, ⑬⑭式各 2 分,

【解法一】⑮⑯⑰⑱⑲⑳㉑㉒㉓㉔㉕式各 1 分。

【解法二】⑮'⑯'⑰'式各 2 分, ⑱'式 3 分, ⑲'⑳'式各 1 分。

【解法三】⑮''⑯''⑰''式各 2 分, ⑱''⑲''⑳''㉑''式各 1 分。

第 (4) 问 7 分, ⑳式 2 分, ㉑㉒㉓㉔㉕式各 1 分。

四、

(1) (i) 在  $L$  系中:

杆的运动可以分解为质心的运动和杆绕质心的转动。质心的运动是随  $P$  点绕  $O$  轴作角速度为  $\omega$  的匀速圆周运动和随杆绕  $P$  点作圆周运动的合运动。因此杆质心的平动动能为

$$E_{\text{Lck}} = \frac{1}{2}m[\omega^2(R+a \sin \theta)^2 + a^2\dot{\theta}^2] \quad (1) \quad 2 \text{ 分}$$

杆绕质心的转动可以看成两个正交的定轴转动的合成: 一个是杆以倾角  $\theta$  绕过其质心的竖直轴的转动, 角速度为  $\omega$ ; 另一个是杆绕过其质心、且与杆垂直的水平轴以角速度  $\dot{\theta}$  转动。对于前者, 可以将  $\omega$  正交分解成沿杆方向和垂直于杆的方向, 沿杆方向对动能没有贡献, 因此只需计及垂直于杆的方向的分量; 或者不对  $\omega$  进行分解, 而是计算其转动惯量时将杆对  $C_1$  轴 (过杆质心的竖直轴) 的质量分布投影到与轴垂直的方向上。杆绕质心的转动动能可表示为

$$E'_{Lk} = \frac{1}{2} I_C (\omega^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) \quad \text{②} \quad 3 \text{分}$$

或

$$E'_{Lk} = \frac{1}{2} (I_{C1} \omega^2 + I_C \dot{\theta}^2) \quad \text{②}' \quad 2 \text{分}$$

其中  $I_{C1}$  为杆对  $C1$  轴的转动惯量

$$I_{C1} = \frac{1}{12} m (2a \sin \theta)^2 = \frac{1}{3} ma^2 \sin^2 \theta \quad \text{③}' \quad 1 \text{分}$$

②式和②'式中  $I_C$  为杆对过质心且与杆垂直的轴的转动惯量

$$I_C = \frac{1}{12} m (2a)^2 = \frac{1}{3} ma^2 \quad \text{③} \quad 1 \text{分}$$

杆的动能为其质心的平动动能和杆绕质心的转动动能之和

$$\begin{aligned} E_{Lk} &= E_{Lk} + E'_{Lk} \\ &= \frac{1}{2} m [\omega^2 (R + a \sin \theta)^2 + a^2 \dot{\theta}^2] + \frac{1}{6} ma^2 (\omega^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) \quad \text{④} \quad 1 \text{分} \\ &= \frac{1}{2} m [(R + a \sin \theta)^2 + \frac{1}{3} a^2 \sin^2 \theta] \omega^2 + \frac{2}{3} ma^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

以圆环平面为重力势能零点，杆的势能为

$$E_{Lp} = m g a \cos \theta \quad \text{⑤} \quad 1 \text{分}$$

杆的机械能为

$$\begin{aligned} E_L &= E_{Lk} + E_{Lp} \\ &= m g a \cos \theta + \frac{2}{3} ma^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m [(R + a \sin \theta)^2 + \frac{1}{3} a^2 \sin^2 \theta] \omega^2 \quad \text{⑥} \quad 1 \text{分} \\ &= m g a \cos \theta + \frac{2}{3} ma^2 \dot{\theta}^2 + m [(\frac{2}{3} a \sin \theta + R) a \sin \theta + \frac{1}{2} R^2] \omega^2 \end{aligned}$$

(ii) 在随  $OP$  矢径转动的转动参考系  $S$  中：

杆只做过  $P$  点的矢径所在的竖直平面内绕  $P$  点的转动。杆的动能为

$$E_{sk} = \frac{1}{2} I_p \dot{\theta}^2 \quad \text{⑦} \quad 1 \text{分}$$

式中， $I_p$  是杆绕过其端点、且与杆垂直的轴的转动惯量。按照平行轴定理有

$$I_p = I_C + ma^2 = \frac{4}{3} ma^2 \quad \text{⑧} \quad 1 \text{分}$$

由⑦⑧式得

$$E_{sk} = \frac{1}{2} I_p \dot{\theta}^2 = \frac{2}{3} ma^2 \dot{\theta}^2 \quad \text{⑨} \quad 1 \text{分}$$

在转动参考系中除重力势能外，还要考虑离心势能。以圆环中心为势能零点，可以写出杆的势能

$$E_{sp} = m g a \cos \theta - \frac{1}{2} I_o \omega^2 \quad \text{⑩} \quad 2 \text{分}$$

式中， $I_o$  是杆对过  $O$  点的竖直轴的转动惯量

$$I_O = \frac{1}{3}m(a \sin \theta)^2 + m(R + a \sin \theta)^2 \quad (11) \quad 2 \text{分}$$

这里已利用了平行轴定理。杆的机械能为

$$\begin{aligned} E_s &= E_{Sk} + E_{Sp} \\ &= \frac{2}{3}ma^2\dot{\theta}^2 + mga \cos \theta - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}m(a \sin \theta)^2 + m(R + a \sin \theta)^2\right]\omega^2 \quad (12) \quad 2 \text{分} \\ &= mga \cos \theta + \frac{2}{3}ma^2\dot{\theta}^2 - m\left[\frac{2}{3}a \sin \theta + R\right]a \sin \theta + \frac{1}{2}R^2\omega^2 \end{aligned}$$

(2) 在随 OP 矢径转动的转动参考系 S 中。杆处于平衡位形的条件是其所受合力矩  $L_{\hat{e}}$  (指向圆环在 P 的切向) 为零:

$$\begin{aligned} L_{\hat{e}} &= mga \sin \theta + \int_0^{2a} \omega^2 (R + l \sin \theta) l \cos \theta \frac{m}{2a} dl \quad (13) \quad 2 \text{分} \\ &= mga \sin \theta + ma\omega^2 \left(R + \frac{4}{3}a \sin \theta\right) \cos \theta = 0 \end{aligned}$$

或等价地, 其势能取极值, 即

$$\frac{dE_{Sp}}{d\theta} = -mga \sin \theta - ma\omega^2 \left(R + \frac{4}{3}a \sin \theta\right) \cos \theta = 0 \quad (13)' \quad 2 \text{分}$$

可得杆处于平衡位形的条件是,  $\theta$  必须满足

$$\tan \theta + \frac{4a\omega^2}{3g} \sin \theta + \frac{R\omega^2}{g} = 0 \quad (14) \quad 1 \text{分}$$

或

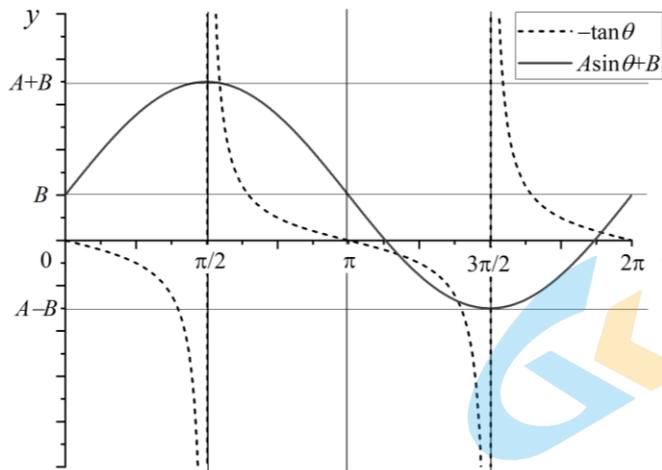
$$\cot \theta + \frac{4a}{3R} \cos \theta + \frac{g}{R\omega^2} = 0 \quad (14)' \quad 1 \text{分}$$

(3) (14)式可化成关于  $\sin \theta$  的四次方程, 难于给出解析解。采用图解法比较容易求解。为此将(14)式写为

$$-\tan \theta = A \sin \theta + B \quad (15) \quad 1 \text{分}$$

其中  $A = \frac{4a\omega^2}{3g}$ ,  $B = \frac{R\omega^2}{g}$ , 均为正值。

在坐标图上画出(15)式左右两边随  $\theta$  变化的曲线, 两曲线的交点即为所求的平衡位形, 即满足(15)式的  $\theta$  值。(15)式左边可直接画出  $y = -\tan \theta$  的曲线。右边  $y = A \sin \theta + B$  则按照系数来考虑。基本的曲线是正弦形,  $A$  决定了它的幅度, 而  $B$  为其基线, 决定了其上移的程度。



解题图 4a. 方程⑮的图示

⑮4分

按题意, 有  $R > 0$ , 即  $B > 0$ , 正弦曲线的基线处于横轴上方。

从题解图 4a 看出, 不论各已知量取值如何, 两条线在第 I 象限不可能有交点, 即平衡位形不可能出现在第 I 象限。⑰ 1分

在第 II、IV 象限两条线有且仅有 1 个交点, 即在这两个象限各有 1 个平衡位形。⑱ 2分

第 III 象限的情况较为复杂, 与各参数取值相关, 可能出现 0~2 个交点。如果  $A$  较小而  $B$  较大, 两曲线可能不相交; 反之则可能有两个交点;  $A$ 、 $B$  满足一定关系则两线相切, 只有一个交点。两曲线相切意味着在切点有共同的切线, 即⑮式两边对  $\theta$  的导数相等。有

$$-\frac{1}{\cos^2 \theta_0} = A \cos \theta_0 \quad \text{⑲}$$

即

$$\cos^3 \theta_0 = -\frac{1}{A} = -\frac{3g}{4\omega^2 a} \quad \text{⑳ 1分}$$

这里,  $\theta_0$  是切点所对应的角度。将其代入平衡位形下  $\theta$  满足的关系式⑭或⑮, 可知在第 III 象限存在单一平衡位形所需要的条件是

$$B = \tan^3 \theta_0 = -A \sin^3 \theta_0 \quad \text{㉑}$$

由⑳㉑式得

$$A^{\frac{2}{3}} = B^{\frac{2}{3}} + 1 \quad \text{㉒}$$

此即

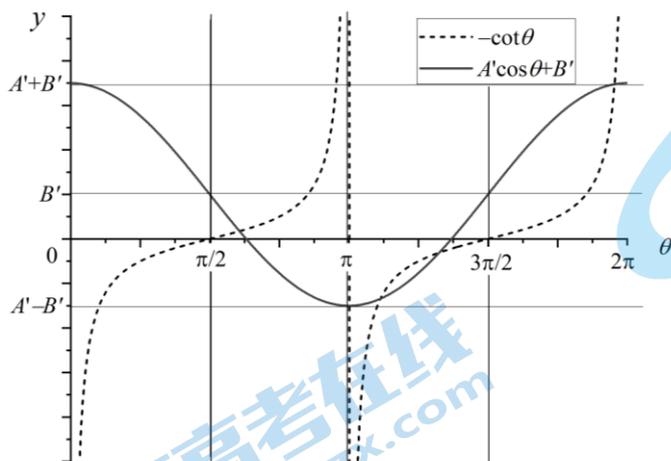
$$\left(\frac{4}{3}a\right)^{\frac{2}{3}} - R^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{g}{\omega^2}\right)^{\frac{2}{3}} \quad \text{㉓ 1分}$$

【若有同学在 (2) 问的解中得到⑭'式, 则将其改写成

$$-\cot \theta = A' \cos \theta + B' \quad \text{⑮' 1分}$$

其中  $A' = \frac{4a}{3R}$ ,  $B' = \frac{g}{R\omega^2}$ , 均为正值。

在坐标图上画出(15)'式左右两边随  $\theta$  变化的曲线, 两曲线的交点即为所求的平衡位形, 即满足(15)'式的  $\theta$  值。(15)'式左边可直接画出  $y = -\cot\theta$  的曲线。右边  $y = A'\cos\theta + B'$  则按照系数来考虑。基本的曲线是余弦形,  $A'$  决定了它的幅度, 而  $B'$  为其基线, 决定了其上移的程度。



解题图 4a'. 方程(15)'的图示

(16)' 4 分

按题意, 有  $R > 0$ , 即  $B' > 0$ , 余弦曲线的基线处于横轴上方。

从题解图 4a' 看出, 不论各已知量取值如何, 两条线在第 I 象限不可能有交点, 即平衡位形不可能出现在第 I 象限。(17)' 1 分

在第 II、IV 象限两条线有且仅有一个交点, 即在这两个象限各有一个平衡位形。(18)' 2 分

第 III 象限的情况较为复杂, 与各参数取值相关, 可能出现 0~2 个交点。如果  $A'$  较小而  $B'$  较大, 两曲线可能不相交; 反之则可能有两个交点;  $A'$ 、 $B'$  满足一定关系时则两线相切, 只有一个交点。两曲线相切意味着在切点有共同的切线, 即(15)'式两边对  $\theta$  的导数相等。有

$$\frac{1}{\sin^2 \theta_0} = -A' \sin \theta_0 \quad (19)'$$

即

$$\sin^3 \theta_0 = -\frac{1}{A'} = -\frac{3R}{4a} \quad (20)' \quad 1 \text{ 分}$$

这里,  $\theta_0$  是切点所对应的角度。将其代入平衡位形下  $\theta$  满足的关系式(14)'或(15)', 可知在第 III 象限存在单一平衡位形所需要的条件是

$$B' = -\cot \theta_0 + \frac{\cos \theta_0}{\sin^3 \theta_0} = -\cot \theta_0 \left( \frac{1 - \sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta_0} \right) = -\cot^3 \theta_0 \quad (21)'$$

联立(20)'(21)'式得

$$A'^{\frac{2}{3}} = B'^{\frac{2}{3}} + 1 \quad (22)'$$

【同样可得到(23)' 1 分】

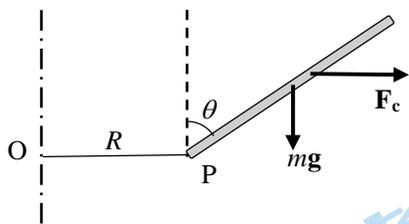
(23)'式是在第 III 象限出现一个平衡位形应满足的条件。由题解图 4a (或题解图 4a') 和式(23)'可知, 对任意给定的  $\omega$ , 若杆较短, 环半径较大, 使得

$$\left(\frac{4}{3}a\right)^{\frac{2}{3}} - R^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{g}{\omega^2}\right)^{\frac{2}{3}}, \text{ 杆在第 III 象限没有平衡位形; } \textcircled{24} \quad 1 \text{ 分}$$

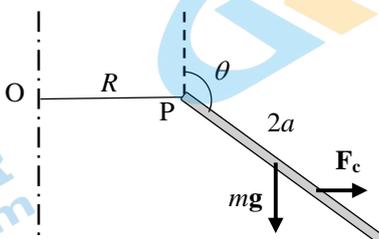
反之, 对任意给定的  $\omega$ , 若杆较长, 环半径较小, 使得

$$\left(\frac{4}{3}a\right)^{\frac{2}{3}} - R^{\frac{2}{3}} > \left(\frac{g}{\omega^2}\right)^{\frac{2}{3}}, \text{ 杆在第 III 象限会有两个平衡位形. } \textcircled{25} \quad 1 \text{ 分}$$

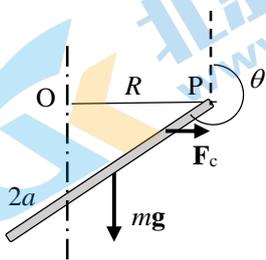
(4) 各象限杆位形的受力示意图如解题图 4b 所示: 由于惯性离心力是分布力, 这里仅示意性画出其对 P 点有力矩的等效力。(前两图每图 2 分, 后三图每图 3 分)



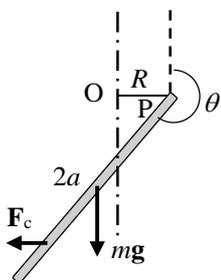
第 I 象限不可能有平衡位形  $\textcircled{26}$



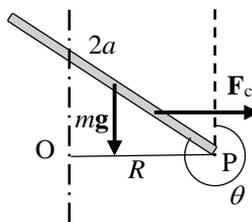
第 II 象限可以有平衡位形  $\textcircled{27}$



第 III 象限  $\left(\frac{4}{3}a\right)^{\frac{2}{3}} - R^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{g}{\omega^2}\right)^{\frac{2}{3}}$  时, 没有平衡位形  $\textcircled{28}$



第 III 象限  $\left(\frac{4}{3}a\right)^{\frac{2}{3}} - R^{\frac{2}{3}} \geq \left(\frac{g}{\omega^2}\right)^{\frac{2}{3}}$  时, 可以有平衡位形  $\textcircled{29}$



第 IV 象限可以有平衡位形  $\textcircled{30}$

解题图 4b. 杆在各象限受力分析

(5) 各平衡位形稳定性分析

将平衡位形的  $\theta$  值记为  $\theta_E$ 。

解法 (一): 微扰法。

在平衡位形附近  $\theta = \theta_E + \Delta\theta$  ( $|\Delta\theta| \ll 1$ ), 对 S 系中  $\textcircled{13}$  式给出的合力矩  $L_{\text{合}}(\theta_E + \Delta\theta)$  做小量  $\Delta\theta$  展开, 有

$$\begin{aligned} L_{\text{合}}(\theta_E + \Delta\theta) &= mga \sin(\theta_E + \Delta\theta) + ma\omega^2 \left[ R \cos(\theta_E + \Delta\theta) + \frac{2}{3}a \sin(2\theta_E + 2\Delta\theta) \right] \\ &\approx mga \left[ \cos \theta_E - \frac{\omega^2 R}{g} \sin \theta_E + \frac{4a\omega^2}{3g} \cos(2\theta_E) \right] \Delta\theta \end{aligned} \quad \textcircled{31} \quad 2 \text{ 分}$$

则有

$$\frac{L_{\text{合}}(\theta_E + \Delta\theta)}{\Delta\theta} = \begin{cases} < 0, & \text{恢复性力矩, 稳定平衡} \\ = 0, & \text{拐点, 不稳定平衡} \\ > 0, & \text{破坏性力矩, 不稳平衡} \end{cases}$$

对上式的讨论和采分点见后文。这里不单独给分。

解法(二): 势能法。

以势能对  $\theta$  的二阶导数来判断平衡位形的性质。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_{Sp}}{d\theta^2} &= -mga \cos \theta + ma\omega^2 \left( R + \frac{4}{3}a \sin \theta \right) \sin \theta - \frac{4}{3}ma^2\omega^2 \cos^2 \theta \\ &= mga \left[ -\cos \theta + \left( \frac{R\omega^2}{g} + \frac{4a\omega^2}{3g} \sin \theta \right) \sin \theta - \frac{4a\omega^2}{3g} \cos^2 \theta \right] \quad \text{③1'} \quad 2 \text{分} \\ &= -mga \left( \cos \theta - \frac{R\omega^2}{g} \sin \theta + \frac{4a\omega^2}{3g} \cos 2\theta \right) \end{aligned}$$

【对比③1式和③1'式, 可以看到  $\left. \frac{d^2 E_{Sp}}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_E} = -\frac{L_{\hat{\alpha}}(\theta_E + \Delta\theta)}{\Delta\theta}$ , 所以后面相应的讨论二者相同, 只差一个正负号。不再

分别给出解答。】

将平衡位形条件⑮或⑮' (将满足这两式的  $\theta$  记为  $\theta_E$ ) 代入③1或③1'式, 得出在平衡位形下:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 E_{Sp}}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_E} &= \frac{L_{\hat{\alpha}}(\theta_E + \Delta\theta)}{\Delta\theta} \\ &= mga \cos^2 \theta_E \left[ -\frac{1}{\cos \theta_E} - \frac{\tan^2 \theta_E}{\cos \theta_E} - A \right] \quad \text{③2} \quad 3 \text{分} \\ &= \frac{mga \cos^2 \theta_E}{\sin \theta_E} (B - \tan^3 \theta_E) \\ &= \frac{mga \cos^2 \theta_E}{\sin \theta_E} \left( \frac{R\omega^2}{g} - \tan^3 \theta_E \right) \end{aligned}$$

在第 II 象限,  $\tan \theta < 0$ ,  $\sin \theta > 0$ , 故  $\frac{L_{\hat{\alpha}}(\theta_E + \Delta\theta)}{\Delta\theta} < 0$ ,  $\left. \frac{d^2 E_{Sp}}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_E} > 0$ , 为势能极小值点, 是稳定平衡。③3

1分

在第 IV 象限,  $\tan \theta < 0$ ,  $\sin \theta < 0$ , 故  $\frac{L_{\hat{\alpha}}(\theta_E + \Delta\theta)}{\Delta\theta} > 0$ ,  $\left. \frac{d^2 E_{Sp}}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_E} < 0$ , 为势能极大值点, 是不稳定平衡。

③4 1分

在第 III 象限,  $\tan \theta > 0$ ,  $\sin \theta < 0$ , 无法用②7式判断正负。但有  $\cos \theta < 0$ , 因此将②7式改写为

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 E_{Sp}}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_E} &= -mga \cos \theta_E - \frac{4}{3}ma^2\omega^2 \cos^2 \theta_E - mga \tan \theta_E \sin \theta_E \\ &= -\frac{mga}{\cos \theta_E} (1 + A \cos^3 \theta_E) \quad \text{③5} \quad 2 \text{分} \end{aligned}$$

从题解图 4a 或 4a'可以看出, 当有两个平衡位形时, 两个  $\theta_E$  会位于  $\theta_0$  两侧。从③5式可以得出, 若

$\cos \theta_E > -A^{-\frac{1}{3}} = -\left(\frac{3g}{4\omega^2 a}\right)^{\frac{1}{3}} = \cos \theta_0$ , 即在  $\theta_E > \theta_0$  的平衡位形,  $\frac{L_{\hat{\alpha}}(\theta_E + \Delta\theta)}{\Delta\theta} < 0$ ,  $\left. \frac{d^2 E_{Sp}}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_E} > 0$ , 为势能极小值点,

是稳定平衡; ③6 1分

对  $\theta_E < \theta_0$  的平衡位形,  $\frac{L_{\text{合}}(\theta_E + \Delta\theta)}{\Delta\theta} > 0$ ,  $\left. \frac{d^2 E_{\text{sp}}}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_E} < 0$ , 为势能极大值点, 是不稳定平衡; ⑳ 1分

在各参数满足只有一个平衡位形的情况下,  $\theta_E = \theta_0$ ,  $\left. \frac{d^2 E_{\text{sp}}}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} = 0$ , 为势能曲线拐点, 是不稳定平衡。㉑

1分

验证  $\left. \frac{d^2 E_{\text{sp}}}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} = 0$  是拐点:

$$\begin{aligned} \frac{d^3 E_p}{d\theta^3} &= mga[\sin\theta + (B + A\sin\theta)\cos\theta + A\sin\theta\cos\theta + 2A\sin\theta\cos\theta] \quad \text{㉒} \quad 1分 \\ &= mga(\sin\theta + B\cos\theta + 4A\sin\theta\cos\theta) \end{aligned}$$

将㉒式代入㉑, 在  $\theta = \theta_0$  有

$$\left. \frac{d^3 E_p}{d\theta^3} \right|_{\theta=\theta_0} = 3A\text{mga}\sin\theta_0\cos\theta_0 \neq 0 \quad \text{㉓} \quad 1分$$

故  $\theta = \theta_0$  是势能曲线的拐点。

评分标准: 共 60 分

第(1)问 18分

①式 2分, ②式 3分 (或②'式 2分+③'式 1分), ③④⑤⑥⑦⑧⑨式各 1分, ⑩⑪⑫式各 2分;

第(2)问 3分

⑬ (或⑬') 2分, ⑭ (或⑭') 1分。

第(3)问 12分

⑮ (或⑮') 1分 (只要写成正切与正弦线性函数分列等式两边就给分, 不必简化系数); ⑯ (或⑯') 题解图 4a (或 4a') 4分 (其中示意画出正切曲线与正弦曲线的关系 3分, 画出正弦曲线基线和振幅 1分),

⑰ (或⑰') 1分,

⑱ (或⑱') 2分 (两个象限每个 1分),

⑳ (或㉑') ㉒⑳㉓各 1分。

第(4)问 13分

题解图 4b. ㉔㉕每图 2分 (其中图 1分, 判断 1分);

㉖㉗㉘每图 3分 (其中图 2分, 判断 1分)。

注: 主要要求画对力的方向。第 III 象限两个图中如果以 O 轴为分界线画出两个反向的等效惯性离心力, 则要求两个力的大小关系满足合力如题解相应的图中所示的方向。第 III 象限两个图的判断只要求写对  $a$  较小或较大 (或者  $R$  较小或较大) 就可以给分。

第(5)问 14分

㉙ (或㉙') 2分, ㉚3分, ㉛㉜各 1分; ㉝2分, ㉞㉟㊱㊲各 1分。

五、

(1) 根据牛顿第二定律和胡克定律，弹簧 1 的长度  $x_1(t)$  及小球加速度  $\ddot{x}_1(t)$  满足的运动方程为

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + mg + F(t) \quad \text{①} \quad 3 \text{ 分}$$

(2) 这是一个振动方程。解此方程可以得到  $x_1(t)$  (包含两个待定常量)。

解法 (一):

设小球在某时刻  $t$  位于平衡位置，此刻的  $\bar{x}_1(t)$  满足

$$-k\bar{x}_1(t) + mg + F(t) = 0 \quad \text{②} \quad 2 \text{ 分}$$

将  $F(t) = \alpha t$  代入方程②得

$$\bar{x}_1(t) = \frac{mg}{k} + \frac{\alpha}{k}t \quad \text{③} \quad 1 \text{ 分}$$

小球相对于此平衡位置的位移

$$\Delta x(t) \equiv x_1(t) - \bar{x}_1(t) \quad \text{④} \quad 2 \text{ 分}$$

满足微分方程

$$\Delta \ddot{x} + \omega^2 \Delta x = 0 \quad \text{⑤} \quad 2 \text{ 分}$$

其解为

$$\Delta x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{⑥} \quad 2 \text{ 分}$$

式中  $A$  和  $\varphi$  为待定常量。于是

$$x_1(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + \frac{\alpha}{k}t + \frac{mg}{k} \quad \text{⑦} \quad 1 \text{ 分}$$

解法 (二):

令  $x = x_1 - \frac{mg}{k}$ ，小球的运动方程可化成

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \quad \text{②}' \quad 2 \text{ 分}$$

将  $F(t) = \alpha t$  代入②'，得

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{\alpha t}{m} \quad \text{③}' \quad 1 \text{ 分}$$

非齐次微分方程的通解可表示为一个特解和该方程所对应的齐次方程的通解之和，后者即

$$x_{\text{通}} = A \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{④}' \quad 2 \text{ 分}$$

式中  $A$  和  $\varphi$  为待定常量。

此非齐次项显然有下列形式的特解

$$x_{\text{特}} = Bt,$$

式中  $B$  是待定常量。代入方程③'可定出

$$B = \frac{\alpha}{m\omega^2} = \frac{\alpha}{k} \quad \text{⑤}' \quad 2 \text{ 分}$$

于是

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) + \frac{\alpha}{k} t \quad \text{⑥}' \quad 2 \text{分}$$

故

$$x_1(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + \frac{\alpha}{k} t + \frac{mg}{k} \quad \text{⑦}' \quad 1 \text{分}$$

初始条件为

$$x_1(0) = \frac{mg}{k}, \dot{x}_1(0) = 0 \quad \text{⑧} \quad 2 \text{分}$$

由⑧第 1 式有

$$x_1(0) = A \cos \varphi + \frac{mg}{k} = \frac{mg}{k}$$

即

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{⑨} \quad 1 \text{分}$$

由⑧第 2 式有

$$\dot{x}_1(0) = -A\omega \sin \varphi + \frac{\alpha}{k} = 0$$

即

$$A = \frac{\alpha}{\omega k \sin \varphi} = \pm \frac{\alpha}{\omega k} \quad \text{⑩} \quad 1 \text{分}$$

$A$  为振幅，取为非负值，且  $\alpha$ 、 $k$ 、 $\omega$  均为正，因此

$$\sin \varphi = \frac{\alpha}{A\omega k} = 1$$

可以定出

$$A = \frac{\alpha}{\omega k} = \frac{\alpha}{k} \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{⑪}$$

因此有

$$x_1(t) = -\frac{\alpha}{\omega k} \sin \omega t + \frac{\alpha}{k} t + \frac{mg}{k} \quad \text{⑫} \quad 3 \text{分}$$

由胡克定律有

$$F(t) = kx_2(t)$$

有

$$x_2(t) = \frac{\alpha}{k} t \quad \text{⑬} \quad 2 \text{分}$$

(3) 为了判断哪个弹簧先被拉断，考虑任意时刻两弹簧长度之差：

$$\Delta x = x_1 - x_2 = -\frac{\alpha}{\omega k} \sin \omega t + \frac{mg}{k} = \frac{\alpha}{\omega k} \left( \frac{mg\omega}{\alpha} - \sin \omega t \right) \quad \text{⑭} \quad 2 \text{分}$$

(i) 若弹簧 1 先被拉断，应有

$$\Delta x > 0,$$

即

$$\sin \omega t_0 < \frac{mg\omega}{\alpha} \quad (15) \quad 1 \text{分}$$

若要求必先拉断弹簧 1, 则(15)式对任意  $t_0$  均需成立, 因此

$$\alpha < mg\omega = g\sqrt{km} \quad (16) \quad 1 \text{分}$$

(ii) 若  $\alpha \geq mg\omega = g\sqrt{km}$ , 则在不同的时刻  $\Delta x$  的正负不同。仍要保证弹簧 1 先被拉断,  $t_0$  需要落在满足(15)式的时间范围内。即

$$2n\pi \leq \omega t_0 < \arcsin \frac{mg\omega}{\alpha} + 2n\pi, \text{ 或 } (2n+1)\pi - \arcsin \frac{mg\omega}{\alpha} < \omega t_0 \leq 2(n+1)\pi, \quad (17) \quad 2 \text{分}$$

式中  $n$  为非负整数。不等式(17)是对振动相位的限制。但对应于  $n$  的多个取值, 数学上  $x_1(t)$  可能出现多个达到临界长度的时刻。但实际上弹簧 1 只可能断一次, 所以我们需要找到它首次达到临界长度的时刻所在的时间段。 (18)

1 分

考察  $x_1(t)$  随时间的增长趋势, 发现始终有

$$\dot{x}_1(t) = \frac{\alpha}{k}(1 - \cos \omega t) \geq 0 \quad (19) \quad 1 \text{分}$$

也就是说  $x_1(t)$  随时间是单调增长的, 意味着相位与长度一一对应, 不可能出现  $x_1$  在多个时间段内都达到临界长度的情况。因此可以判断, 拉断弹簧 1 确实可能发生在上述任意一个相位区间。 (20) 1 分

综上所述, 若  $\alpha \geq g\sqrt{km}$ , 弹簧 1 被拉断的时刻  $t_0$  一定落在下述时间段内:

$$\begin{aligned} 2n\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \leq t_0 < \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin\left(\frac{g}{\alpha}\sqrt{km}\right) + 2n\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \text{ 或} \\ (2n+1)\pi\sqrt{\frac{m}{k}} - \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin\left(\frac{g}{\alpha}\sqrt{km}\right) < t_0 \leq 2(n+1)\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \end{aligned} \quad (21) \quad 1 \text{分}$$

式中  $n$  为非负整数。

(iii) 若先拉断弹簧 2, 必有  $\Delta x < 0$ , 这要求

$$\sin \omega t_0 > \frac{mg\omega}{\alpha} \quad (22) \quad 1 \text{分}$$

由 (i) (ii) 的讨论可知首先必有

$$\alpha > g\sqrt{km},$$

且由(22)式可得, 拉断弹簧 2 的时刻  $t_0$  需使得相位落在下式范围内:

$$\arcsin \frac{mg\omega}{\alpha} + 2n\pi < \omega t_0 < (2n+1)\pi - \arcsin \frac{mg\omega}{\alpha}, \quad n \text{ 为非负整数} \quad (23) \quad 1 \text{分}$$

由(23)可以发现,  $\alpha$  越大,  $\arcsin \frac{mg\omega}{\alpha}$  越小, 使弹簧 2 先断的相位所覆盖的区间越大; 当  $\alpha \rightarrow \infty$  时, 拉断弹簧 2 的相位区间接近于覆盖整个第 I、II 象限。也就是说,  $\alpha$  越大, 对应的力的加载速度越快, 拉断下弹簧 2 的可能性越大。

(24) 2 分

上述讨论说明  $\alpha$  较小时会拉断上弹簧,  $\alpha$  较大时有可能拉断下弹簧, 印证了题述实验现象。

(4) 要确保弹簧 2 被拉断, 由⑬式知必有

$$t_0 = \frac{kL}{\alpha} \quad \text{⑳} \quad 1 \text{分}$$

代入㉑式得

$$\sin \frac{\omega kL}{\alpha} > \frac{\omega mg}{\alpha} \quad \text{㉒} \quad 1 \text{分}$$

将  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  代入㉒式, 可知要确保弹簧 2 被拉断,  $\alpha$  应满足的关系式为

$$\sin\left(\frac{kL}{\alpha} \sqrt{\frac{k}{m}}\right) > \frac{mg}{\alpha} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{㉓} \quad 1 \text{分}$$

要弹簧 1 和弹簧 2 同时被拉断, 需要

$$\Delta x = \frac{\alpha}{\omega k} (mg - \sin \omega t_0) = 0 \quad \text{㉔} \quad 1 \text{分}$$

而该时刻也满足式㉓, 将其代入㉔可得,  $\alpha$  应满足的关系式为

$$\sin\left(\frac{kL}{\alpha} \sqrt{\frac{k}{m}}\right) = \frac{mg}{\alpha} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{㉕} \quad 1 \text{分}$$

评分标准: 共 40 分

第 (1) 问 3 分

①式 3 分;

第 (2) 问 19 分

② (或②') 2 分, ③ (或③') 1 分, ④⑤⑥ (或④'⑤'⑥') 各 2 分, ⑦ (或⑦') 1 分,

⑧ 2 分, ⑨⑩各 1 分, ⑫ 3 分, ⑬ 2 分;

第 (3) 问 13 分

⑭⑮⑯各 1 分, ⑰ 2 分, ⑱ 1 分, ⑲⑳㉑㉒㉓各 1 分, ㉔ 2 分;

第 (4) 问 5 分

⑵⑶⑷⑸⑹各 1 分。

六、

(1) 净电流为零的条件是

$$-ej_x(x) + \frac{1}{\rho} E_x(x) = 0 \quad \text{①}$$

因此

$$E_x(x) = -e\rho c \frac{\sqrt{T(x)}}{n(x)} \frac{d}{dx} n(x) \quad \text{②}$$

(2) 对  $-L < x < L$  区域, 由静电场高斯定理有

$$\varepsilon_0 \frac{d}{dx} E_x(x) = -e[n(x) - n_0] \quad \text{③}$$

此即

$$\varepsilon_0 \rho c \frac{d}{dx} \left[ \frac{\sqrt{T(x)}}{n(x)} \frac{d}{dx} n(x) \right] = n(x) - n_0 \quad (4)$$

边界条件为（注意 $|x| > L$ 真空区域电场为零）

$$\varepsilon_0 E_x(-L+0) = \sigma_- \quad (5)$$

$$\varepsilon_0 E_x(L-0) = -\sigma_+ \quad (6)$$

此即

$$-\varepsilon_0 e \rho c \frac{\sqrt{T(x)}}{n(x)} \frac{d}{dx} n(x) \Big|_{x=-L} = \sigma_- \quad (7)$$

$$-\varepsilon_0 e \rho c \frac{\sqrt{T(x)}}{n(x)} \frac{d}{dx} n(x) \Big|_{x=+L} = -\sigma_+ \quad (8)$$

$\sigma_+$ 、 $\sigma_-$  和  $n_0$  还应当满足电中性条件

$$\sigma_- + \sigma_+ + (-e) \int_{-L}^L [n(x) - n_0] dx = 0$$

的约束。（这一点由题给的边界条件加以保证）

(3) 线性化的方程为

$$\varepsilon_0 \rho c \frac{\sqrt{T_0}}{n_0} \frac{d^2}{dx^2} [\delta n(x)] = \delta n(x) \quad (9)$$

或

$$\frac{d^2}{dx^2} [\delta n(x)] = \left( \frac{1}{\lambda} \right)^2 \delta n(x)$$

式中

$$\lambda \equiv \sqrt{\varepsilon_0 \rho c \frac{\sqrt{T_0}}{n_0}}$$

是具有长度量纲的常量。

线性化的边界条件为

$$-\varepsilon_0 e \rho c \frac{\sqrt{T_0}}{n_0} \frac{d}{dx} [\delta n(x)] \Big|_{x=-L} = \sigma_- \quad (10)$$

$$-\varepsilon_0 e \rho c \frac{\sqrt{T_0}}{n_0} \frac{d}{dx} [\delta n(x)] \Big|_{x=+L} = -\sigma_+ \quad (11)$$

或

$$-\frac{d}{dx} [\delta n(x)] \Big|_{x=-L} = \frac{\sigma_-}{\lambda^2 e}$$

$$-\frac{d}{dx} [\delta n(x)] \Big|_{x=+L} = -\frac{\sigma_+}{\lambda^2 e}$$

类比于简谐振子运动方程

$$\frac{d^2}{dt^2} [x(t)] = -\omega^2 x(t)$$

及其通解

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t),$$

方程⑨对应的  $\delta n(x)$  的通解应为

$$\delta n(x) = A_1 \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) + B_1 \sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right) \quad (12)'$$

其中  $A_1$ 、 $B_1$  为待定常量。

由于  $\cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ 、 $\sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right)$  皆为  $e^{x/\lambda}$ 、 $e^{-x/\lambda}$  的线性组合，方程⑨的一般解  $\delta n(x)$  也可写为

$$\delta n(x) = A e^{x/\lambda} + B e^{-x/\lambda} \quad (12)$$

式中  $A$ 、 $B$  为待定常量。

显然，⑫式与⑫'式是相互等价的，对应的待定常量关系为

$$A_1 = A + B, \quad B_1 = A - B$$

下面由边界条件定出解中的待定常量：

将⑫式分别代入⑩⑪式，微分方程的边界条件化为

$$A e^{-L/\lambda} - B e^{L/\lambda} = -\frac{\sigma_-}{\lambda e} \quad (13)$$

$$A e^{L/\lambda} - B e^{-L/\lambda} = \frac{\sigma_+}{\lambda e} \quad (14)$$

由以上两式解得

$$A = \frac{1}{\lambda e} \frac{\sigma_+ e^{L/\lambda} + \sigma_- e^{-L/\lambda}}{e^{2L/\lambda} - e^{-2L/\lambda}}$$

$$B = \frac{1}{\lambda e} \frac{\sigma_- e^{L/\lambda} + \sigma_+ e^{-L/\lambda}}{e^{2L/\lambda} - e^{-2L/\lambda}}$$

于是

$$\delta n(x) = \frac{1}{\lambda e} \left[ \frac{\sigma_+ e^{L/\lambda} + \sigma_- e^{-L/\lambda}}{e^{2L/\lambda} - e^{-2L/\lambda}} e^{x/\lambda} + \frac{\sigma_- e^{L/\lambda} + \sigma_+ e^{-L/\lambda}}{e^{2L/\lambda} - e^{-2L/\lambda}} e^{-x/\lambda} \right] \quad (15)$$

等价表达式为

$$\delta n(x) = \frac{1}{\lambda e} \left[ \frac{\sigma_+ + \sigma_-}{2 \sinh\left(\frac{L}{\lambda}\right)} \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \frac{\sigma_+ - \sigma_-}{2 \cosh\left(\frac{L}{\lambda}\right)} \sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right] \quad (15)'$$

(4) 由题意知，任意  $x$  处的电子气处于局域热平衡状态，满足理想气体状态方程

$$p(x) = n(x) k_B T(x) = \frac{dN}{dV} k_B T(x) \quad (16)$$

式中  $dV = dx dy dz$  是  $x$  处的体积元，而  $dN$  是  $dV$  内的电子数。单个电子受到该处电场的作用力

$$f(x) = -e E_x(x) \quad (17)$$

考虑  $x$  处厚度为  $dx$ 、面积为  $dy dz$  的薄层体积元内的电子气，该电子气整体处于宏观力学平衡状态，故

$$f(x) dN = [p(x+dx) - p(x)] dy dz = \frac{dp(x)}{dx} dx dy dz$$

式中， $f(x) dN$  是该电子气所受到的电场力， $p(x)$ 、 $p(x+dx)$  分别是该电子气层左面和右面电子气对它的压强。由

此得

$$\frac{d}{dx} p(x) = n(x) f(x) \quad (18)$$

由以上各式得

$$\frac{d}{dx} [n(x) k_B T(x)] = -e E_x(x) n(x) \quad (19)$$

线性化后得

$$T_0 \frac{d}{dx} [\delta n(x)] + n_0 \frac{d}{dx} [\delta T(x)] = -\frac{en_0}{k_B} E_x(x) \quad (20)$$

$E_x(x)$  线性化后成为

$$E_x(x) = -e\rho c \frac{\sqrt{T(x)}}{n(x)} \frac{d}{dx} n(x) \approx -\frac{e\lambda^2}{\epsilon_0} \frac{d}{dx} [\delta n(x)] \quad (21)$$

代入前一方程得

$$n_0 \frac{d}{dx} [\delta T(x)] = \left( \frac{en_0}{k_B} \frac{e\lambda^2}{\epsilon_0} - T_0 \right) \frac{d}{dx} [\delta n(x)] = \left( \frac{e^2 \rho c \sqrt{T_0}}{k_B} - T_0 \right) \frac{d}{dx} [\delta n(x)] \quad (22)$$

其解为

$$\frac{\delta T(x)}{T_0} = \left( \frac{e^2 \rho c}{k_B \sqrt{T_0}} - 1 \right) \frac{\delta n(x)}{n_0} + C$$

式中  $C$  是与  $x$  无关的常数。由于  $\delta T(x)$  和  $\delta n(x)$  都是小量，且依题意当  $\delta T(x) = 0$  时有  $\delta n(x) = 0$ ，所以

$$C = 0$$

于是

$$\delta T(x) = \frac{T_0}{n_0} \left( \frac{e^2 \rho c}{k_B \sqrt{T_0}} - 1 \right) \frac{1}{\lambda e} \left[ \frac{\sigma_+ e^{L/\lambda} + \sigma_- e^{-L/\lambda}}{e^{2L/\lambda} - e^{-2L/\lambda}} e^{x/\lambda} + \frac{\sigma_- e^{L/\lambda} + \sigma_+ e^{-L/\lambda}}{e^{2L/\lambda} - e^{-2L/\lambda}} e^{-x/\lambda} \right] \quad (23)$$

(5)

解法 (一)

将 (4) 中线性化方程写为

$$E_x(x) = - \left( \frac{e}{k_B} - \frac{\sqrt{T_0}}{e\rho c} \right)^{-1} \frac{d}{dx} T(x) \quad (24)$$

可读出 Seebeck 系数为

$$S = \frac{dU}{dT} = \frac{-E_x(x) dx}{dT} = -\frac{E_x(x)}{dT/dx} = \left( \frac{e}{k_B} - \frac{\sqrt{T_0}}{e\rho c} \right)^{-1} \quad (25)$$

解法 (二)

计算金属两端 ( $x = -L$  和  $x = +L$ ) 的电势差

$$U(L) - U(-L) = - \int_{x=-L}^L E_x(x) dx \approx \int_{x=-L}^L \frac{e\lambda^2}{\epsilon_0} \partial_x [\delta n(x)] dx = \frac{e\lambda^2}{\epsilon_0} [\delta n(+L) - \delta n(-L)] = e\rho c \frac{\sqrt{T_0}}{n_0} [\delta n(L) - \delta n(-L)] \quad (24)$$

然后和 (4) 中温度的解<sup>②③</sup>在金属两端的表达式

$$T(L) - T(-L) = \frac{T_0}{n_0} \left( \frac{e^2 \rho c}{k_B \sqrt{T_0}} - 1 \right) [\delta n(L) - \delta n(-L)]$$

比较, 得 Seebeck 系数为

$$S = \frac{U(L)-U(-L)}{T(L)-T(-L)} = \left( \frac{e}{k_B} - \frac{\sqrt{T_0}}{e\rho c} \right)^{-1} \quad (25)$$

评分标准: 本题共 60 分

第(1)问 5 分, ①为 2 分, ②为 3 分;

第(2)问 15 分, ③为 3 分, ④为 4 分, ⑤⑥⑦⑧各 2 分;

第(3)问 16 分, ⑨⑩⑪⑬⑭⑮ (或⑮') 各 2 分, ⑫ (或⑫') 式 4 分;

第(4)问 19 分, ⑯⑰⑱⑲各 2 分, ⑳式 1 分, ㉑㉒式各 4 分;

第(5)问 5 分, ㉓为 3 分, ㉔为 2 分; 另一中解法中㉕'为 3 分, ㉖'为 2 分。

七、

(1) 对夸克物质中的夸克按其速度进行分组, 设第  $i$  组夸克数密度为  $n_i$ , 速度为  $v_i$ , 能量为  $E_i$ , 动量为  $p_i$ 。因其速度大小极其接近于光速  $c$ , 故近似有

$$p_i \cdot v_i \approx E_i \quad (\text{或 } p_i \approx \frac{E_i}{c} \hat{p}_i) \quad (1)$$

式中  $\hat{p}_i$  表示  $p_i$  的方向矢量。

如解题图 7a, 为了求出压强与其他物理量之间的关系, 可以设想取假想器壁截面的  $\Delta S$  面元,  $\Delta t$  时间内的撞壁粒子数为

$$N_i = n_i^{(+)} v_{ix} \Delta t \Delta S \quad (2)$$

其中  $v_{ix}$  为第  $i$  组粒子速度的  $x$  分量, 而

$$n_i^{(+)} = \begin{cases} n_i, & v_{ix} > 0 \\ 0, & v_{ix} < 0 \end{cases}$$

粒子与假想器壁截面发生弹性碰撞时, 单粒子与壁交换动量  $2p_{ix}$ 。

第  $i$  组粒子贡献的压强为

$$P_i = \frac{2p_{ix}N_i}{\Delta t \Delta S} \Big|_{v_{ix}>0} = 2n_i^{(+)} p_{ix} v_{ix} \Big|_{v_{ix}>0} \quad (3)$$

利用粒子速度 (动量) 分布的各向同性, 总压强为

$$P = \sum_i 2n_i^{(+)} p_{ix} v_{ix} \Big|_{v_{ix}>0} = \sum_i n_i p_{ix} v_{ix} = \frac{1}{3} \sum_i n_i p_i \cdot v_i \quad (4)$$

将①式代入④式, 得

$$P = \frac{1}{3} \sum_i n_i E_i = \frac{1}{3} n \bar{E} = \frac{1}{3} u \quad (5)$$

其中  $\bar{E} = (\sum_i n_i E_i) / n$  为夸克的平均能量,  $n\bar{E}$  为单位体积内夸克的平均能量, 即平均能量密度  $u$ 。⑤式即是夸克物质

以  $P$  与  $u$  之间的关系表示的状态方程。

【解法二】

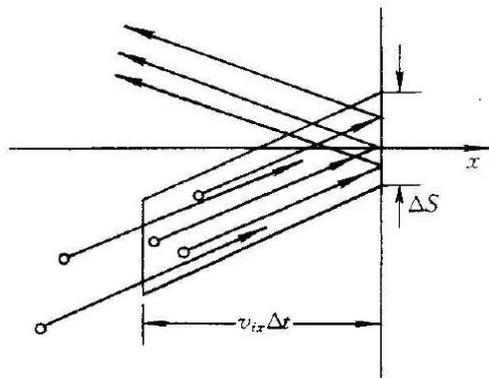
对于能量为  $E$ 、动量为  $p$  的夸克粒子, 因其速度大小极其接近于光速  $c$ , 故近似有

$$p \approx \frac{E}{c} \hat{p} \quad (1')$$

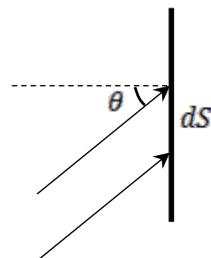
如解题图 7b, 考虑假想器壁截面面元  $dS$  处上的粒子碰撞。设粒子数密度为  $n$ , 能量分布密度函数为  $f(E)$ , 则  $dt$  时间段、能量处于  $E \rightarrow E + dE$ 、运动方向角处于  $\theta \rightarrow \theta + d\theta$  ( $\theta < \pi/2$ ) 的粒子碰撞数为

$$dN \approx n f(E) dE \cdot \frac{1}{2} \sin \theta d\theta \cdot c dt \cos \theta dS \quad (2')$$

粒子与假想器壁截面发生弹性碰撞时, 单粒子交换动量为  $2p \cos \theta \approx 2 \frac{E}{c} \cos \theta$ , 相应地, 对器



解题图 7a



解题图 7b

壁贡献的压强为

$$dP \approx \frac{dN \cdot 2 \frac{E}{c} \cos \theta}{dt dS} = n E f(E) dE \cdot \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \quad (3')$$

积分得

$$P \approx n \int f(E) dE \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{3} n \bar{E} = \frac{u}{3} \quad (4')$$

其中  $\bar{E}$  为夸克的平均能量。④'式即是夸克物质以  $P$  与  $u$  之间的关系表述的状态方程。

(2) 依题意, 夸克物质中的夸克的平均能量可以表示为

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} E(p) e^{-\frac{E(p)}{k_B T}} 4\pi p^2 dp}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{E(p)}{k_B T}} 4\pi p^2 dp} \quad (6)$$

其中夸克能量  $E(p) \approx pc$ , 因此

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} E(p) e^{-\frac{E(p)}{k_B T}} 4\pi p^2 dp}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{E(p)}{k_B T}} 4\pi p^2 dp} \approx \frac{\int_0^{\infty} E^3 e^{-\frac{E}{k_B T}} dE}{\int_0^{\infty} E^2 e^{-\frac{E}{k_B T}} dE} \quad (7)$$

可令  $\beta = (k_B T)^{-1}$ , 并令

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{E}{k_B T}} dE = \beta^{-1} = g(\beta) \quad (8)$$

则有

$$\bar{E} \approx \frac{(-1)^3 g'''(\beta)}{(-1)^2 g''(\beta)} \quad (9)$$

将⑧式代入得

$$\bar{E} \approx 3\beta^{-1} = 3k_B T \quad (10)$$

【⑦式也可以利用分部积分法, 直接进行计算。令  $\xi = \frac{E}{k_B T}$ , ⑦式可以改写成

$$\bar{E} = kT \frac{\int_0^{\infty} \xi^3 e^{-\xi} d\xi}{\int_0^{\infty} \xi^2 e^{-\xi} d\xi} = kT \frac{-\xi^3 e^{-\xi} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 3\xi^2 e^{-\xi} d\xi}{\int_0^{\infty} \xi^2 e^{-\xi} d\xi} \quad (9')$$

由于

$$\xi^3 e^{-\xi} \Big|_0^{\infty} = 0,$$

可知

$$\bar{E} = 3k_B T \quad (10)$$

】

将⑩式代入⑤式得

$$P \approx \frac{1}{3} n \bar{E} \approx n k_B T \quad (11)$$

此即夸克物质以压强  $P$ 、粒子数密度  $n$  和温度  $T$  之间的关系表述的状态方程, 与非相对论理想气体状态方程形式相同。

(后文中, “≈”均记为“=”)

(3) 设阿伏加德罗常量为  $N_A$ 。考虑 1 mol 夸克物质, 其内能为

$$U_m = N_A \bar{E} = 3RT \quad (12)$$

由热力学第一定律, 定体摩尔热容为

$$C_V = \left( \frac{dU_m}{dT} \right)_{\text{固定}V} = 3R \quad (13)$$

令夸克物质的摩尔体积为  $V_m (= N_A/n)$ , 由热力学第一定律, 定压摩尔热容为

$$C_P = \left( \frac{dU_m + PdV_m}{dT} \right)_{\text{固定}P} = \left( \frac{d(U_m + pV_m)}{dT} \right)_{\text{固定}P} \quad (14)$$

将⑪⑫式代入⑭式,

$$C_P = \left( \frac{d(3RT + nk_B TV_m)}{dT} \right)_{\text{固定}P} = 4R \quad (15)$$

故热容比为

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{4}{3} \quad (16)$$

(4) 依题意, “火球”的膨胀降温过程可近似为准静态的绝热过程, 即

$$TV^{\gamma-1} = \text{常量} \quad (17)$$

⑩式代入⑰式, 得

$$TV^{1/3} = \text{常量} \quad (18)$$

设“火球”半径为  $r$ , 则  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ , 代入⑱式得

$$Tr = \text{常量} \quad (19)$$

故所求“火球”半径为

$$r = \frac{400}{150} \times 3.0 \times 10^{-15} \text{ m} = 8.0 \times 10^{-15} \text{ m} \quad (20)$$

评分标准: 本题共 40 分。

第(1)问 11 分, ①③⑤式各 2 分, ②式 1 分, ④式 4 分。

【解法二】①'式 2 分, ②'③'④'式各 3 分。

第(2)问 10 分, ⑥⑦⑨ (或⑨') ⑩⑪式各 2 分。

第(3)问 10 分, ⑫⑬⑭⑮⑯式各 2 分。

第(4)问 9 分, ⑰式 4 分, ⑱式 1 分, ⑲⑳式各 2 分。

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯

官方微信公众号: bjgkzx

官方网站: [www.gaokzx.com](http://www.gaokzx.com)

咨询热线: 010-5751 5980

微信客服: gaokzx2018

关注北京高考在线官方微信: [北京高考资讯\(微信号:bjgkzx\)](https://www.gkzxx.com), 获取更多试题资料及排名分析信息。