2023北京丰台高二（下）期末

数　　学

2023.07

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_n-a_{n-1}=2(n\geqslant 2)$，则$a_6=$

（A）10　　（B）11

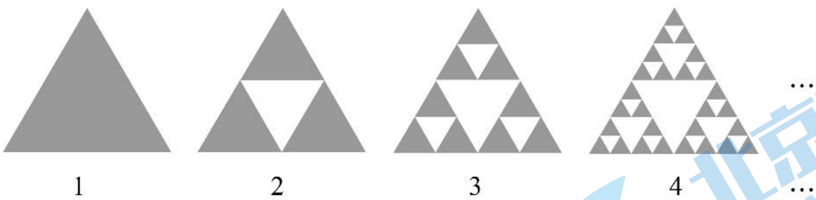
（C）12　　（D）13

2．已知$P(A)=\frac{1}{2},P(AB)=\frac{1}{3}$，那么$P(B|A)=$

（A）$\frac{1}{6}$　　（B）$\frac{1}{3}$

（C）$\frac{2}{3}$　　（D）$\frac{5}{6}$

3．下图所示的三角形图案是谢尔宾斯基三角形．已知第n个图案中黑色与白色三角形的个数之和为a_n，数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_{n+1}=3a_n+1(n\geqslant 1)$，那么下面各数中是数列$\{a_n\}$中的项的是



（A）121　　（B）122

（C）123　　（D）124

4．已知某生物技术公司研制出一种新药，并进行了临床试验，该临床试验的成功概率是失败概率的2倍．若记一次试验中成功的次数为X，则随机变量X的数学期望为

（A）$\frac{2}{3}$　　（B）$\frac{1}{2}$

（C）$\frac{1}{3}$　　（D）$\frac{1}{6}$

5．用充气筒吹气球，气球会鼓起来，假设此时气球是一个标准的球体，且气球的体积$V(r)$随着气球半径r的增大而增大．当半径$r=1$时，气球的体积$V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$相对于r的瞬时变化率为

（A）$\frac{4}{3}\pi$　　（B）2π

（C）4π　　（D）8π

6．某人需要先从 A 地到 B 地，再同站转车赶到 C 地，他能够选择的高铁车次的列车时刻表如下表所示，那么此人这天乘坐高铁列车从 A 地到 C 地不同的乘车方案总数为

A 地至 B 地高铁列车时刻表

车次	发车时间	到站时间
G87	07:00	08:01
G91	07:55	08:56
G93	09:00	10:01

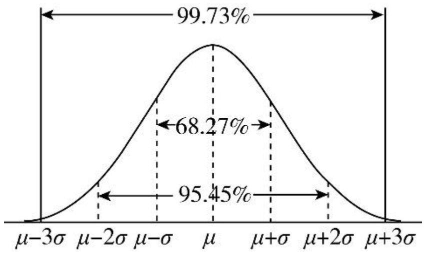
B 地至 C 地高铁列车时刻表

车次	发车时间	到站时间
G2811	08:25	10:31
G653	09:24	11:13
G501	10:26	12:30

（A）9　　（B）6

（C）4　　（D）3

7．正态分布在概率和统计中占有重要地位，它广泛存在于自然现象、生产和生活实践之中．在现实生活中，很多随机变量都服从或近似服从正态分布．假设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，可以证明，对给定的 $k\in\mathbf{N}^*$，$P(\mu-k\sigma\leqslant X\leqslant\mu+k\sigma)$ 是一个只与 k 有关的定值，部分结果如下图所示：



通过对某次数学考试成绩进行统计分析，发现考生的成绩 ξ 基本服从正态分布 $\xi\sim N(105,10^2)$．若共有 1000 名考生参加这次考试，则考试成绩在 $(105,125)$ 的考生人数大约为

（A）341　　（B）477

（C）498　　（D）683

8．设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，前 n 项和为 S_n．若 $S_3=7$，$S_6=63$，则 $q=$

（A）$\frac{1}{8}$　　（B）$\frac{1}{2}$

（C）2　　（D）8

9．2023 年 5 月 18 日至 19 日，首届中国—中亚峰会在陕西西安成功举行．峰会期间，甲、乙、丙、丁、戊 5 名同学承担 A,B,C,D 共 4 项翻译工作，每名同学需承担 1 项翻译工作，每项翻译工作至少需要 1 名同学，则不同的安排方法有

（A）480 种　　（B）240 种

（C）120 种　　（D）4^5 种

10．设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-(a+1)x+2a, & x<1,\\ a|x-2|, & x\geqslant 1.\end{cases}$ 给出下列四个结论：

①当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 有三个极值点；

②当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 有三个极值点；

③ $\forall a\in\mathbf{R}$， $x=2$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点；

④ $\forall a\in\mathbf{R}$， $x=\dfrac{a+1}{2}$ 不是函数 $f(x)$ 的极大值点.

其中，所有正确结论的序号是

（A）①②　　（B）②③

（C）①④　　（D）②④

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11．在 $(x-\dfrac{1}{x})^6$ 的展开式中，常数项是___（用数字作答）.

12．某电子设备厂所用的元件由甲、乙两家元件厂提供，根据以往的记录，这两个厂家的次品率分别为 0.01，0.03，提供元件的份额分别为 0.80，0.20．设这两个厂家的产品在仓库里是均匀混合的，且无任何区分的标志，现从仓库中随机取出一个元件，取到的元件是次品的概率为___.

13．已知函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{-x+1}$ 在区间 $[0,m]$ 上单调递增，则 m 的最大值为___.

14．投掷一枚质地并不均匀的硬币，结果只有正面和反面两种情况，记每次投掷结果是正面的概率为 $p(0<p<1)$．现在连续投掷该枚硬币 10 次，设这 10 次的结果恰有 2 次是正面的概率为 $f(p)$，则 $f(p)=$___；函数 $f(p)$ 取最大值时， $p=$___.

15. 设 n 是正整数，且 $n\geqslant 2$，数列 $\{a_k\}$， $\{b_k\}$ 满足： $a_1=a(a>0)$， $a_{k+1}=a_k+\dfrac{a_k^2}{n}(k=1,2,\cdots,n-1)$， $b_k=\dfrac{1}{a_k+n}(k=1,2,\cdots,n)$，数列 $\{b_k\}$ 的前 k 项和为 S_k．给出下列四个结论：

①数列 $\{a_k\}$ 为单调递增数列，且各项均为正数；

②数列 $\{b_k\}$ 为单调递增数列，且各项均为正数；

③对任意正整数 $k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$， $S_k=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a_{k+1}}$；

④对任意正整数 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$， $S_k<1$．

其中，所有正确结论的序号是___.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16．（本小题 14 分）

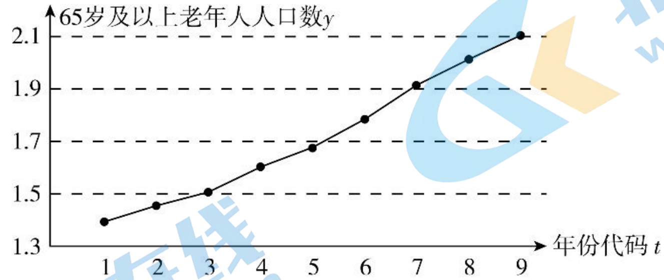
已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+b$ 在 $x=-2$ 时取得极大值 4 .

（Ⅰ）求实数 a,b 的值；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 在区间 $[-3,1]$ 上的最值.

17.（本小题 13 分）

下图是我国 2014 年至 2022 年 65 岁及以上老人人口数（单位：亿）的折线图.



注：年份代码 1-9 分别对应年份 2014-2022.

（Ⅰ）由折线图看出，可用线性回归模型拟合 y 与 t 的关系，请用相关系数（结果精确到 0.01）加以说明；

（Ⅱ）建立 y 关于 t 的回归方程（系数精确到 0.01），并预测 2023 年我国 65 岁及以上老人人口数（单位：亿）.

参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{9}y_i=15.41$，$\sum\limits_{i=1}^{9}t_iy_i=82.57$，$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{9}(y_i-\overline{y})^2}=0.72$，$\sqrt{15}\approx3.873$.

参考公式：相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}t_iy_i-n\overline{t}\,\overline{y}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$.

回归方程 $y=a+\hat{b}t$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})^2}$，$a=\overline{y}-\hat{b}\overline{t}$.

18.（本小题 14 分）

数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，其中 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_1=1$. 从条件①、条件②、条件③中选择一个作为已知，使得数列唯一确定，并解答以下问题：

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设 $b_n=a_n+2^n$，求 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$.

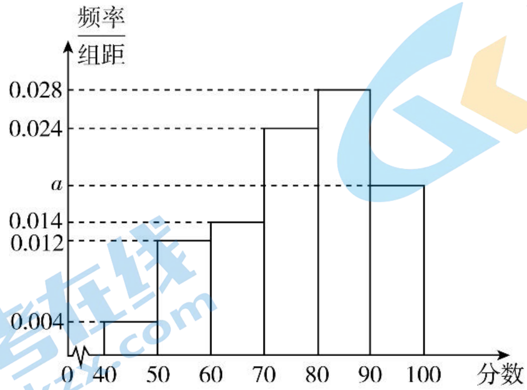
条件①：$a_{n+1}=a_n+2$；条件②：$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$；条件③：$S_n=n^2+c(c\in\mathbf{R})$.

注：如果选择条件①、条件②、条件③分别作答，按第一个解答计分.

19.（本小题 14 分）

2023 年 4 月 18 日至 27 日，第二十届上海国际汽车工业展览会在上海国家会展中心举行，本次展会以

"拥抱汽车行业新时代"为主题．在今年的展会中，社会各界不仅能看到中国市场的强大活力，也能近距离了解各国产汽车自主品牌在推动"智电化"和可持续发展进程中取得的最新成果．为了解参观者对参展的某款国产新能源汽车的满意度，调研组从这款新能源汽车的参观者中随机抽取了 50 名参观者作为样本进行问卷测评，记录他们的评分，问卷满分 100 分．问卷结束后，将数据分成 6 组：[40,50)，[50,60)，[60,70)，[70,80)，[80,90)，[90,100]，并整理得到如下频率分布直方图．



（Ⅰ）求图中的 a 的值；

（Ⅱ）在样本中，从分数在 60 分以下的参观者中随机抽取 3 人，用 X 表示分数在[50,60）中的人数，求 X 的分布列及数学期望；

（Ⅲ）在频率分布直方图中，用每一个小矩形底边中点的横坐标作为该组参观者评分的平均数，估计本次车展所有参观者对这款新能源汽车评分的平均数为 m，若中位数的估计值为 n，写出 m 与 n 的大小关系．(直接写出结果)

20．(本小题 15 分)

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax-1(a\in\mathbf{R})$．

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅲ）判断 $\mathrm{e}^{0.01}$ 与 1.01 的大小关系，并说明理由．

21．(本小题 15 分)

正实数构成的集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}(n\geqslant 2)$，定义 $A\otimes A=\{a_i\cdot a_j|\ a_i,a_j\in A,且\ i\neq j\}$．当集合 $A\otimes A$ 中的元素恰有 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个数时，称集合 A 具有性质 Ω．

（Ⅰ）判断集合 $A_1=\{1,2,4\},A_2=\{1,2,4,8\}$ 是否具有性质 Ω；

（Ⅱ）若集合 A 具有性质 Ω，且 A 中所有元素能构成等比数列，$A\otimes A$ 中所有元素也能构成等比数列，求集合 A 中的元素个数的最大值；

（Ⅲ）若集合 A 具有性质 Ω，且 $A\otimes A$ 中的所有元素能构成等比数列．问：集合 A 中的元素个数是否存在最大值？若存在，求出该最大值；若不存在，请说明理由．

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	C	A	A	C	B	B	C	B	D

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

11．-20　　12．0.014　　13．1

14．$45p^2(1-p)^8$，$\dfrac{1}{5}$　　15．①③④

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16.（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）因为函数 $f(x)=x^3+ax^2+b$，所以 $f'(x)=3x^2+2ax$．

因为函数 $f(x)$ 在 $x=-2$ 时取得极大值 4，

所以 $f'(-2)=0, f(-2)=4$．

即 $\begin{cases}3\times(-2)^2-4a=0,\\(-2)^3+4a+b=4,\end{cases}$

所以 $a=3$，$b=0$．　……………………………………………6 分

（Ⅱ）因为 $f'(x)=3x^2+6x$，

所以 $x\in(-\infty,-2)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 单调递增；

$x\in(-2,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(-2,0)$ 单调递减；

$x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增．

因为 $f(-3)=0$，$f(-2)=4$，$f(0)=0$，$f(1)=4$，

所以 $f(x)_{\max}=4$，$f(x)_{\min}=0$．　……………………………………………14 分

17.（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）由折线图的数据和附注中的参考数据得 $\bar{t}=5$，$\sum_{i=1}^{9}(t_i-\bar{t})^2=60$，

所以 $\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})=\sum_{i=1}^{9}t_iy_i-\bar{t}\sum_{i=1}^{9}y_i=82.57-5\times15.41=5.52$，

所以 $r\approx\dfrac{5.52}{2\times3.873\times0.72}\approx0.99$．

因为 y 与 t 的相关系数近似为 0.99，说明 y 与 t 的线性相关程度很强，从而可以用线性回归模型拟合 y 与 t 的关系．　……………………………………………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2}=\dfrac{5.52}{60}=0.092$．

又因为 $\bar{y}=\dfrac{15.41}{9}\approx 1.712$，

所以 $a=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}=1.712-0.092\times 5\approx 1.25$．

所以 y 关于 t 的回归方程为 $y=1.25+0.09t$．

将 2023 年对应的 $t=10$ 代入回归方程得：$y=1.25+0.09\times 10=2.15$，

所以预测 2023 年我国 65 岁及以上老年人人口约 2.15 亿．…………………13 分

18.（本小题 14 分）

解：选择条件①：$a_{n+1}=a_n+2$．

（Ⅰ）因为 $a_{n+1}=a_n+2$， 即 $a_{n+1}-a_n=2$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是以1为首项，2 为公差的等差数列．

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$．…………………………………………6 分

（Ⅱ）因为 $b_n=a_n+2^n$，

所以 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=(1+2)+(3+2^2)+(5+2^3)+\cdots+(2n-1+2^n)$

$=[1+3+5+\cdots+(2n-1)]+(2+2^2+2^3+\cdots+2^n)$

$=\dfrac{[1+(2n-1)]n}{2}+\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}$

$=2^{n+1}+n^2-2$．…………………………………………14 分

选择条件条件③：$S_n=n^2+c\ (c\in\mathbf{R})$．

（Ⅰ）因为 $S_n=n^2+c$，且 $a_1=1$，

所以 $S_n=1^2+c=1$，所以 $c=0$．

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$；

因为 $n=1$时，$a_1=S_1=1$，

所以 $a_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$．

（Ⅱ）因为 $b_n=a_n+2^n$，

所以 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=(a_1+2)+(a_2+2^2)+(a_3+2^3)+\cdots+(a_n+2^n)$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)+(2+2^2+2^3+\cdots+2^n)$

$=S_n+\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}$

$=2^{n+1}+n^2-2$.

19.（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）由题意 $10(0.004+0.012+0.014+a+0.024+0.028)=1$，

所以 $a=0.018$．　　………………………………………3 分

（Ⅱ）X 的所有可能取值为 1，2，3．

$$P(X=1)=\frac{C_2^2C_6^1}{C_8^3}=\frac{3}{28},$$

$$P(X=2)=\frac{C_2^1C_6^2}{C_8^3}=\frac{15}{28},$$

$$P(X=3)=\frac{C_6^3}{C_8^3}=\frac{5}{14}.$$

所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{14}$

所以 X 的数学期望为 $E(X)=1\times\frac{3}{28}+2\times\frac{15}{28}+3\times\frac{5}{14}=\frac{9}{4}$．　　…………………12 分

（Ⅲ）$m<n$．　　…………………………………………14 分

20.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=e^x-ax-1$，所以 $f'(x)=e^x-a$．

所以 $f'(0)=1-a$，又 $f(0)=0$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=(1-a)x$．　　………………4 分

（Ⅱ）$f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，由题得 $f'(x)=e^x-a$．

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)=e^x-a>0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=e^x-a=0$，解得 $x=\ln a$．

随着 x 的变化，$f(x)$ 与 $f'(x)$ 的变化情况如下表

x	$(-\infty,\ln a)$	$\ln a$	$(\ln a,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

由表可知，$f(x)$ 的单调递增区间是 $(\ln a,+\infty)$；$f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty,\ln a)$．

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间是 $(\ln a,+\infty)$；$f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty,\ln a)$．

…………………………………………11 分

（Ⅲ）$e^{0.01}>1.01$，证明如下：

当 $a=1$ 时，由（Ⅱ）知函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 的单调递增，

所以 $\forall x\in(0,+\infty)$，总有 $f(x)\geqslant f(0)=0$，即 $e^x\geqslant x+1$，当且仅当 $x=0$ 时取等号.

令 $x=0.01$，得 $e^{0.01}>0.01+1=1.01$． ……………………………………………15 分

21.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）A_1 具有性质 Ω；A_2 不具有性质 Ω． ……………………………………4 分

（Ⅱ）当 A 中的元素个数 $n\geqslant 4$ 时，因为 A 中所有元素能构成等比数列，

不妨设元素依次为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 构成等比数列，则 $a_1a_n=a_2a_{n-1}$，其中 a_1,a_2,a_{n-1},a_n 互不相同.

于是这与 A 具有性质 Ω，$A\otimes A$ 中恰有 $C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个元素，即任取 A 中两个不同元素组成组合的两个数其积的结果互不相同相矛盾.

当 A 中的元素个数恰有 3 个时，取 $A=\{1,2,4\}$ 时满足条件，

所以集合 A 中的元素个数最大值为 3. ………………………………………………8 分

（Ⅲ）因为 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，不妨设 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_{n-1}<a_n$，

所以 $a_1a_2<a_1a_3<\cdots<a_{n-2}a_n<a_{n-1}a_n$．

（1）当 $n>5$ 时，$a_1a_2,a_1a_3,\cdots,a_{n-2}a_n,a_{n-1}a_n$ 构成等比数列，

所以 $\dfrac{a_1a_3}{a_1a_2}=\cdots=\dfrac{a_{n-1}a_n}{a_{n-2}a_n}$，即 $a_2a_{n-1}=a_3a_{n-2}$，其中 a_2,a_{n-1},a_3,a_{n-2} 互不相同.

这与 $A\otimes A$ 中恰有 $C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个元素，即任取 A 中两个不同元素组成组合的两个数其积的结果互不相同相矛盾.

（2）当 $n=5$ 时，$a_1a_2,a_1a_3,\cdots,a_3a_5,a_4a_5$ 构成等比数列，第 3 项是 a_2a_3 或 a_1a_4．

① 若第 3 项是 a_2a_3，则 $\dfrac{a_1a_3}{a_1a_2}=\dfrac{a_2a_3}{a_1a_3}=\cdots=\dfrac{a_4a_5}{a_3a_5}$，即 $\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{a_2}{a_1}=\cdots=\dfrac{a_4}{a_3}$，

所以 $a_2a_3=a_1a_4$，与题意矛盾.

② 若第 3 项是 a_1a_4，则 $\dfrac{a_1a_3}{a_1a_2}=\dfrac{a_1a_4}{a_1a_3}=\cdots=\dfrac{a_4a_5}{a_3a_5}$，即 $\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{a_4}{a_3}=\cdots=\dfrac{a_4}{a_3}$，

所以 a_2,a_3,a_4 成等比数列，设公比为 q，则 $A\otimes A$ 中等比数列的前三项为：

a_1a_2,a_1a_3,a_1a_4，其公比为 q，第四项为 $a_1a_2q^3$，第十项为 $a_1a_2q^9$．

（i）若第四项为 a_2a_3，则 $a_2a_3=a_1a_2q^3$，得 $a_2=a_1q^2$，

又 $a_4a_5=a_1a_2q^9$，得 $a_5=a_1q^7$，此时 A 中依次为 $a_1,a_1q^2,a_1q^3,a_1q^4,a_1q^7$

显然 $a_1a_5=a_3a_4$，不合题意.

（ii）若第四项为 a_1a_5，则 $a_1a_5=a_1a_2q^3$，得 $a_5=a_2q^3$，又 $a_4a_5=a_1a_2q^9$，得 $a_2=a_1q^4$，

此时 A 中依次为 $a_1,a_1q^4,a_1q^5,a_1q^6,a_1q^7$，显然 $a_2a_5=a_3a_4$，不合题意.

因此，$n\leqslant 4$.

取 $A=\{1,2,4,16\}$ 满足条件.

所以 A 中的元素个数最大值是 4. ……………………………………………14 分