

北京五十五中 2020-2021 学年第一学期期中考试

高一数学试卷

本试卷共 4 页，共 150 分，调研时长 100 分钟。

第一部分（选择题 共 60 分）

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$, $B = \{x | x > 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. \emptyset B. $(-1, 3)$ C. $(1, 3)$ D. $(2, 3)$

2. 已知命题 $P: \forall x \geq 0, e^x + 2x - 1 \geq 0$, 则命题 P 的否定为 ()

- A. $\exists x < 0, e^x + 2x - 1 < 0$ B. $\forall x \geq 0, e^x + 2x - 1 < 0$
C. $\exists x \geq 0, e^x + 2x - 1 < 0$ D. $\forall x < 0, e^x + 2x - 1 \geq 0$

3. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{2x^2-x-1}$ 的定义域是 ()

- A. $\left\{x \mid x \neq -\frac{1}{2}\right\}$ B. $\left\{x \mid x > -\frac{1}{2}\right\}$
C. $\left\{x \mid x \neq -\frac{1}{2} \text{ 且 } x \neq 1\right\}$ D. $\left\{x \mid x > -\frac{1}{2} \text{ 且 } x \neq 1\right\}$

4. 下列结论正确的是 ()

- A. 若 $a > b$, 则 $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$ B. 若 $a^2 < b^2$, 则 $a < b$
C. 若 $a > b, c > d$, 则 $ac > bd$ D. 若 $ac^2 > bc^2$, 则 $a > b$

5. 下列函数中, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是 ()

- A. $y = 3^{-x}$ B. $y = \sqrt{x}$ C. $y = \log_{0.5} x$ D. $y = \frac{3}{x}$

6. 函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ 在 $[-2, 3]$ 上的最小值和最大值分别是 ()

- A. $\frac{1}{2}, \frac{17}{2}$ B. $\frac{1}{2}, 1$ C. $1, \frac{17}{2}$ D. $\frac{1}{2}$, 无最大值

7. 函数 $f(x) = 2^x$ 和函数 $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象关于 () 对称.

- A. 原点 B. $y = x$ C. y 轴 D. x 轴

8. 若 $0 < a < \frac{1}{2}$, 则 $a(1-2a)$ 的最大值是 ()

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

9. 若 $a = 3^{0.4}$, $b = \log_{0.2} 3$, $c = \log_4 2$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > a > b$ D. $a > c > b$

10. 若函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + 1, & x \geq 0 \\ mx + m - 1, & x < 0 \end{cases}$, 在其定义域上单调递增, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(0, 3]$ B. $(0, 3)$ C. $[3, +\infty)$ D. $[0, +\infty)$

11. “ $f(x)$ 是 R 上的奇函数”是“对任意 $x \in R$ 均有 $f(x)f(-x) \leq 0$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

12. 为了衡量星星的明暗程度, 古希腊天文学家喜帕恰斯在公元前二世纪首先提出了星等这个概念. 星等的数值越小, 星星就越亮; 星等的数值越大它的光就越暗. 到了 1850 年, 由于光度计在天体光度测量的应用, 英国天文学家普森又提出了亮度的概念, 天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述. 两颗星的星等与亮度满足

$$m_1 - m_2 = 2.5(\lg E_2 - \lg E_1),$$
 其中星等为 m_k 的星的亮度为 $E_k (k=1, 2)$. 已知“心宿二”的星等是 1.00, “天津四”

的星等是 1.25, 则“心宿二”的亮度大约是“天津四”的 () 倍. (当 $|x|$ 较小时, $10^x \approx 1 + 2.3x + 2.7x^2$)

- A. 1.27 B. 1.26 C. 1.23 D. 1.22

第二部分 (非选择题 共 90 分)

二. 填空题 (本题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

13. 若幂函数 $y = f(x)$ 的图象经过点 $(2, \sqrt{2})$, 则 $f(4)$ 的值等于_____.

14. 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x + 1$, 用二分法判断方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(-1, 1)$ 内至少有_____个实数解.

15. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x(1+x)$, 则 $x < 0$ 时, $f(x) =$ _____.

16. 国家规定个人稿费纳税办法为: 不超过 800 元的不纳税; 超过 800 元而不超过 4000 元的按超过 800 元的 14% 纳税; 超过 4000 元的按全稿酬的 11% 纳税. 某人出版了一书共纳税 420 元, 这个人的稿费为_____元.

17. 对于函数 $f(x) = e^x + e^{-x}$, 下列说法正确的是_____.

①函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ; ②函数 $f(x)$ 为偶函数;

③函数 $f(x)$ 的值域为 $(0, +\infty)$; ④函数 $f(x)$ 在定义域上为增函数;

⑤方程 $f(x) = 3$ 有两个不相等的实数解.

三、解答题 (共 5 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程)

18. 计算: (1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} + \sqrt[3]{8^2} - 625^{\frac{1}{4}}$;

(2) $2\log_3 2 - \log_3 32 + \log_3 8$;

(3) $2\sqrt{3} \times 3\sqrt[3]{1.5} \times \sqrt[4]{12}$;

(4) $\log_2 3 \times \log_3 4 \times \log_4 5 \times \log_5 2$.

19. 已知函数 $f(x) = x^2 - bx + 3$ ($b \in \mathbf{R}$).

(1) 若 $f(0) = f(4)$, 求 $f(x)$ 的解析式, 并写出满足 $f(x) < 0$ 的 x 取值的集合;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[0, 3]$ 上具有单调性, 求实数 b 的取值范围.

20. 已知函数 $f(x) = a - \frac{2}{2^x + 1}$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 若 $f(x)$ 是奇函数, 求实数 a 的值;

(2) 判断 $f(x)$ 的单调性, 并用单调性的定义证明你的结论.

21. 已知函数 $f(x) = \log_a(2+x) - \log_a(2-x)$, ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)

(1) 求 $f(x)$ 的定义域;

(2) 判断并证明 $f(x)$ 的奇偶性;

(3) 求满足 $f(x) \leq 0$ 的实数 x 的取值范围.

22. 对于定义域为 D 的函数 $f(x)$, 若同时满足下列两个条件: ① $f(x)$ 在 D 上具有单调性; ② 存在区间 $[a, b] \subseteq D$, 使 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的值域也为 $[a, b]$, 则称 $f(x)$ 为 D 上的“精彩函数”, 区间 $[a, b]$ 为函数 $f(x)$ 的“精彩区间”.

(1) 判断 $[0, 1]$ 是否为函数 $y = x^3$ 的“精彩区间”, 并说明理由;

(2) 判断函数 $f(x) = x + \frac{4}{x}$ ($x > 0$) 是否为“精彩函数”, 并说明理由;

(3) 若函数 $g(x) = \sqrt{x+4} + m$ 是“精彩函数”, 求实数 m 的取值范围.

参考答案

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1. 【答案】D

【解析】

【分析】

化简集合 A ，根据集合的交集运算可得结果.

【详解】因为 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\} = \{x | -1 < x < 3\}$ ， $B = \{x | x > 2\}$ ，

所以 $A \cap B = \{x | 2 < x < 3\}$.

故选：D

【点睛】本题考查了一元二次不等式的解法，考查了集合的交集运算，属于基础题.

2. 【答案】C

【解析】

【分析】

利用全称命题的否定变换形式即可求解.

【详解】由命题 $P: \forall x \geq 0, e^x + 2x - 1 \geq 0$ ，

则命题 P 的否定为： $\exists x \geq 0, e^x + 2x - 1 < 0$.

故选：C

【点睛】本题考查了含有一个量词的命题的否定的变换形式，属于基础题.

3. 【答案】D

【解析】

【分析】

根据函数解析式的性质求定义域即可.

【详解】由函数解析式，知：
$$\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 2x^2-x-1 \neq 0 \end{cases}$$

解之得： $x > -\frac{1}{2}$ 且 $x \neq 1$ ，

故选：D

【点睛】本题考查了求具体函数的定义域，根据分式的分母不为零，根式的双重非负性求定义域，属于简单题。

4. 【答案】D

【解析】

【分析】

利用特殊值法可判断 A、B、C 选项的正误，利用不等式的基本性质可判断 D 选项的正误。

【详解】对于 A 选项，取 $a=1$ ， $b=-1$ ，则 $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ ，A 选项错误；

对于 B 选项，取 $a=-2$ ， $b=-3$ ，则 $a^2 < b^2$ 成立，但 $a > b$ ，B 选项错误；

对于 C 选项，取 $a=2$ ， $b=1$ ， $c=-1$ ， $d=-2$ ，则 $a > b$ ， $c > d$ ，但 $ac = bd$ ，C 选项错误；

对于 D 选项，若 $ac^2 > bc^2$ ，则 $c \neq 0$ ，那么 $c^2 > 0$ ，由不等式的基本性质可得 $a > b$ ，D 选项正确。

故选：D.

【点睛】本题考查利用不等式的基本性质判断不等式的正误，考查推理能力，属于基础题。

5. 【答案】B

【解析】

【分析】

根据指对幂函数及反比例函数特征逐一判断即可。

【详解】指数函数 $y = 3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减；

幂函数 $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增；

对数函数 $y = \log_{0.5}x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减；

反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减。

故选：B.

【点睛】 本题考查了指数函数和反比例函数的单调性，属于基础题.

6. 【答案】 A

【解析】

【分析】

配方得对称轴，得函数的单调性后可得最值.

【详解】 由题意知，函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x = -1$,

在 $[-2, -1]$ 上， $f(x)$ 为减函数，在 $[-1, 3]$ 上， $f(x)$ 为增函数，

故当 $x = -1$ 时， $f(x)$ 取得最小值，最小值为 $f(-1) = \frac{1}{2}$;

当 $x = 3$ 时， $f(x)$ 取得最大值，最大值为 $\frac{17}{2}$.

故选：A.

【点睛】 本题考查求二次函数的最值，可求得函数图象的对称轴，得函数单调性，再求最值.

7. 【答案】 C

【解析】

【分析】

由函数 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 关于 y 轴对称，结合 $f(x) = 2^x$ ， $g(x) = 2^{-x}$ ，可得出答案.

【详解】 因为 $f(x) = 2^x$ ， $g(x) = 2^{-x}$ ，所以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象关于 y 轴对称.

故选：C.

【点睛】 函数 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 关于 y 轴对称；

函数 $f(x)$ 与 $-f(x)$ 关于 x 轴对称；

函数 $f(x)$ 与 $-f(-x)$ 关于 $(0, 0)$ 对称.

8. 【答案】 A

【解析】

【分析】

根据题意，由 $a(1-2a) = \frac{1}{2}(2a)(1-2a)$ ，结合基本不等式，即可求出结果.

【详解】因为 $0 < a < \frac{1}{2}$ ，故 $1-2a > 0$ ，

$$\text{则 } a(1-2a) = \frac{1}{2}(2a)(1-2a) \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2a+(1-2a)}{2} \right)^2 = \frac{1}{8},$$

当且仅当 $2a=1-2a$ ，即 $a = \frac{1}{4}$ 时，等号成立；

故选：A.

【点睛】本题主要考查由基本不等式求积的最大值，熟记基本不等式即可，属于常考题型.

9. 【答案】D

【解析】

【分析】

a, c, b 形式不同，故采取中间量法比较大小，分别和 0, 1 进行比较即可得解.

【详解】 $3^{0.4} > 3^0 = 1$ ， $\log_{0.2} 3 < \log_{0.2} 1 = 0$ ，

$\therefore \log_4 1 < \log_4 2 < \log_4 4$ ，

$\therefore 0 < c < 1$ ，

$\therefore a > c > b$

故选：D.

【点睛】本题考查了指、对数的大小的比较，考查了中间量法比较大小，是指、对数的简单的计算，属于基础题.

10. 【答案】A

【解析】

【分析】

分段函数 $f(x)$ 两段均为单调递增，而且右段的最低点不低于左段的最高点，即可求解.

【详解】∵ 函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + 1, & x \geq 0 \\ mx + m - 1, & x < 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增,

$$\therefore \begin{cases} m > 0 \\ m - 1 \leq 2^0 + 1 = 2 \end{cases}, \text{ 解得 } 0 < m \leq 3,$$

∴ 实数 m 的取值范围是 $(0, 3]$.

故选: A.

【点睛】本题考查分段函数的单调性, 要注意分段函数各段单调性相同的区间合并的条件, 属于基础题.

11. 【答案】A

【解析】

【分析】

首先根据 $f(x)$ 是 R 上的奇函数得到 $f(x)f(-x) \leq 0$, 满足充分性, 根据 $f(x)f(-x) \leq 0$, 不能推出 $f(-x) = -f(x)$, 不满足必要性, 即可得到答案.

【详解】充分性: $f(x)$ 是 R 上的奇函数, 所以 $f(-x) = -f(x)$.

所以 $f(x)f(-x) = f(x) \cdot [-f(x)] = -[f(x)]^2 \leq 0$, 满足充分性.

必要性: 对任意 $x \in R$ 均有 $f(x)f(-x) \leq 0$, 不能推出 $f(-x) = -f(x)$, 不满足必要性.

所以“ $f(x)$ 是 R 上的奇函数”是“对任意 $x \in R$ 均有 $f(x)f(-x) \leq 0$ ”的充分不必要条件.

故选: A

【点睛】本题主要考查充分不必要条件的判断, 属于简单题.

12. 【答案】B

【解析】

【分析】

把已知数据代入公式计算 $\frac{E_1}{E_2}$.

【详解】由题意 $1 - 1.25 = 2.5(\lg E_2 - \lg E_1)$, $\lg \frac{E_1}{E_2} = 0.1$,

$$\therefore \frac{E_1}{E_2} = 10^{0.1} \approx 1 + 2.3 \times 0.1 + 2.7 \times 0.1^2 = 1.257 \approx 1.26.$$

故选：B.

【点睛】 本题考查数学新文化，考查阅读理解能力，解题关键是在新环境中抽象出数学知识，用数学的思想解决问题.

13. 【答案】 2

【解析】

【分析】

设出幂函数 $f(x) = x^\alpha$ ，将点 $(2, \sqrt{2})$ 代入解析式，求出解析式即可求解.

【详解】 设 $f(x) = x^\alpha$ ，函数图像经过 $(2, \sqrt{2})$ ，

$$\text{可得 } \sqrt{2} = 2^\alpha, \text{ 解得 } \alpha = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } f(x) = x^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{所以 } f(4) = 4^{\frac{1}{2}} = 2.$$

故答案为：2

【点睛】 本题考查了幂函数的定义，考查了基本运算求解能力，属于基础题.

14. 【答案】 1

【解析】

【分析】

由零点存在定理，根据二分法的步骤，即可得出结果.

【详解】 因为 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ ，

$$\text{所以 } f(-1) = -1 + 3 + 1 = 3 > 0, \quad f(1) = 1 - 3 + 1 = -1 < 0,$$

因此在 $(-1, 1)$ 内存在零点，

$$\text{又 } f(0) = 0 - 0 + 1 = 1 > 0,$$

由 $f(0) \cdot f(1) < 0$ ，可得零点在 $(0,1)$ 内，

因此 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内至少有一个零点，

即方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(-1,1)$ 内至少有一个实数解。

故答案为：1.

【点睛】本题注意考查零点存在定理的应用，考查二分法求方程近似解的步骤，属于常考题型。

15. 【答案】 $x(x-1)$

【解析】

【分析】

设 $x < 0$ ，则 $-x > 0$ ，代入 $x \geq 0$ 的解析式，由函数的奇偶性即可求解。

【详解】设 $x < 0$ ，则 $-x > 0$ ，

由 $x \geq 0$ 时， $f(x) = x(1+x)$ ，

所以 $f(-x) = (-x)(1-x)$ ，

又函数为偶函数，即 $f(-x) = f(x)$ ，

所以 $f(x) = (-x)(1-x) = x(x-1)$ 。

故答案为： $x(x-1)$

【点睛】本题考查了利用函数的奇偶性求解析式，考查了基本知识的掌握情况，属于基础题。

16. 【答案】 3800

【解析】

若稿费为 4000 元，则纳税 $(4000 - 800) \times \frac{14}{100} = 448$ 元，设此人的稿费为 x 元，则纳税

$(x - 800) \times \frac{14}{100} = 420$ ， $x = 3800$ 元。

解本小题的关键是读懂题意，建立正确的数学模型。注意先确定 420 元的稿费在哪个收入段中。

17. 【答案】 ①②⑤

【解析】

【分析】

由指数函数的性质可得定义域，进而判断①；利用函数奇偶性的定义可判断②；利用复合函数的单调性以及奇偶性可判断③④⑤.

【详解】由 $f(x) = e^x + e^{-x}$ ，可知定义域为 \mathbf{R} ，故①正确；

$f(-x) = e^{-x} + e^x = f(x)$ ，定义域为 \mathbf{R} ，所以 $f(x)$ 为偶函数，故②正确；

$f(x) = e^x + e^{-x} = e^x + \frac{1}{e^x} \geq 2\sqrt{e^x \cdot \frac{1}{e^x}} = 2$ ，当且仅当 $x = 0$ 时取等号，

所以函数的值域为 $[2, +\infty)$ ，故③错误；

$f(x) = e^x + \frac{1}{e^x}$ ，令 $t = e^x$ ，则 $f(t) = t + \frac{1}{t}$ ，

当 $t \in (0, 1)$ 时， $f(t) = t + \frac{1}{t}$ 为减函数，当 $t \in [1, +\infty)$ 时， $f(t) = t + \frac{1}{t}$ 为增函数，

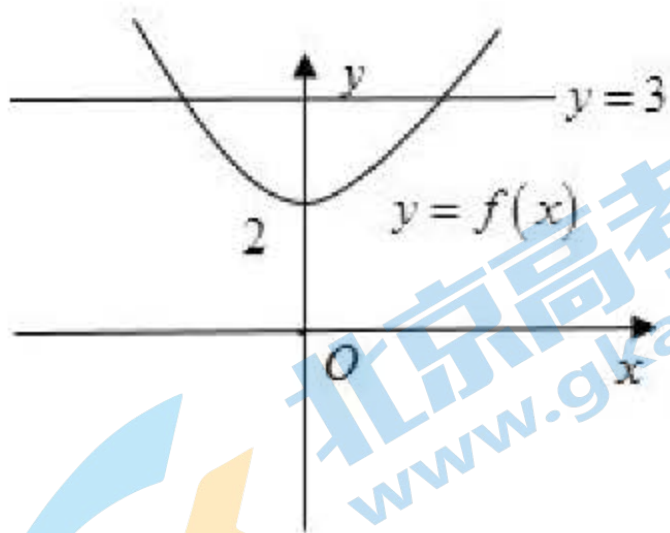
因为 $y = e^x$ 为增函数，

所以 $f(x) = e^x + e^{-x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 为减函数，在 $[0, +\infty)$ 上为增函数，故④错误；

由 $f(x) \geq 2$ ， $3 > 2$ ，结合单调性作出函数的大致图像可知，

方程 $f(x) = 3$ 有两个不相等的实数解，

故⑤正确.



故答案为：①②⑤

【点睛】本题考查了指数型函数的性质，考查了基本知识的掌握情况，属于基础题.

18. 【答案】 (1) 1; (2) 0; (3) 18; (4) 1.

【解析】

【分析】

利用指数与对数的运算性质以及换底公式即可求解.

【详解】 (1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} + \sqrt[3]{8^2} - 625^{\frac{1}{4}} = 2 + 2^2 - 5 = 1.$

(2) $2\log_3 2 - \log_3 32 + \log_3 8 = \log_3 4 - \log_3 32 + \log_3 8 = \log_3 \left(\frac{4}{32} \times 8\right) = \log_3 1 = 0.$

(3) $2\sqrt{3} \times 3\sqrt[3]{1.5} \times \sqrt[6]{12} = 2 \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3 \times 1.5^{\frac{1}{3}} \times 12^{\frac{1}{6}}$
 $= 2 \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} \times 4^{\frac{1}{6}} = 2 \times 3^2 = 18.$

(4) $\log_2 3 \times \log_3 4 \times \log_4 5 \times \log_5 2 = \frac{\lg 3}{\lg 2} \cdot \frac{\lg 4}{\lg 3} \cdot \frac{\lg 5}{\lg 4} \cdot \frac{\lg 2}{\lg 5} = 1$

【点睛】 本题考查了指数、对数的运算性质、换底公式，掌握运算性质是解题的关键，属于基础题.

19. 【答案】 (1) $f(x) = x^2 - 4x + 3$; (1,3); (2) $b \leq 0$ 或 $b \geq 6$.

【解析】

【分析】

(1) 先根据已知条件得到对称轴求得 b 值，再解一元二次不等式即可;

(2) 利用单调性判断区间与对称轴的关系，即解得参数范围.

【详解】 (1) $\because f(0) = f(4), \therefore f(x)$ 的对称轴是 $x = \frac{b}{2} = 2, \therefore b = 4,$

故 $f(x)$ 的解析式 $f(x) = x^2 - 4x + 3,$

根据二次函数图像，由 $f(x) < 0$ 得 $1 < x < 3$ ，故 x 取值的集合 (1,3);

(2) $\because f(x)$ 的对称轴是 $x = \frac{b}{2}$ ，且在区间 $[0,3]$ 上具有单调性，

$\therefore \frac{b}{2} \leq 0$ 或 $\frac{b}{2} \geq 3$, 即实数 b 的取值范围是 $b \leq 0$ 或 $b \geq 6$.

【点睛】 本题考查了二次函数的解析式和单调性, 属于基础题.

20. 【答案】 (1) 1; (2) 单调递增, 证明过程见详解.

【解析】

【分析】

(1) 由 $f(0) = a - \frac{2}{2^0 + 1} = 0$ 可求得 a 的值, 再检验, 即可得出结果;

(2) 任取 $x_1 < x_2$, 可证明 $f(x_1) - f(x_2) = \frac{2(2^{x_1} - 2^{x_2})}{(2^{x_1} + 1)(2^{x_2} + 1)} < 0$, 则 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 从而可得结论.

【详解】 (1) 由于 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数,

故 $f(0) = a - \frac{2}{2^0 + 1} = 0$, 解得 $a = 1$;

经检验, $f(x) = 1 - \frac{2}{2^x + 1} = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ 是奇函数;

(2) $f(x)$ 是 R 上的增函数, 证明如下:

任取 $x_1 < x_2$,

则 $f(x_1) - f(x_2) = \left(a - \frac{2}{2^{x_1} + 1} \right) - \left(a - \frac{2}{2^{x_2} + 1} \right) = \frac{2}{2^{x_2} + 1} - \frac{2}{2^{x_1} + 1} = \frac{2(2^{x_1} - 2^{x_2})}{(2^{x_1} + 1)(2^{x_2} + 1)}$,

由于 $x_1 < x_2$, 所以 $2^{x_1} - 2^{x_2} < 0$, $(2^{x_1} + 1)(2^{x_2} + 1) > 0$,

所以 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$,

所以 $f(x)$ 在 R 上为增函数.

【点睛】 本题主要考查根据奇偶性求参数, 考查了函数单调性的判断与证明, 同时考查了计算能力, 属于常考题型.

21. 【答案】 (1) $(-2, 2)$; (2) 奇函数, 证明见解析; (3) 当 $a > 1$ 时, $x \in (-\infty, 0]$; 当 $0 < a < 1$ 时, $x \in [0, +\infty)$

【解析】

【分析】

(1) 使函数解析式有意义 $\begin{cases} 2+x > 0 \\ 2-x > 0 \end{cases}$, 解不等式组即可求解.

(2) 利用函数的奇偶性定义判断即可.

(3) 讨论 a 的取值范围, 利用函数的单调性即可求解.

【详解】(1) $f(x) = \log_a(2+x) - \log_a(2-x)$,

要使函数有意义可得 $\begin{cases} 2+x > 0 \\ 2-x > 0 \end{cases}$, 解得 $-2 < x < 2$,

所以函数的定义域为 $(-2, 2)$,

(2) 由 (1) 可知, 函数的定义域关于原点对称,

$f(-x) = \log_a(2-x) - \log_a(2+x) = -f(x)$,

所以函数为奇函数,

(3) 由 $f(x) \leq 0$, 则 $\log_a(2+x) \leq \log_a(2-x)$

当 $a > 1$ 时, 可得 $2+x \leq 2-x$, 解得 $x \leq 0$,

此时实数 x 的取值范围为 $(-\infty, 0]$,

当 $0 < a < 1$ 时, 可得 $2+x \geq 2-x$, 解得 $x \geq 0$,

此时实数 x 的取值范围为 $[0, +\infty)$.

【点睛】本题考查了对数函数的性质, 考查了基本知识掌握的情况, 属于基础题.

22. 【答案】(1) 是“精彩区间”, 理由见解析; (2) 不是“精彩函数”, 理由见解析; (3) $-\frac{17}{4} < m \leq -4$

【解析】

【分析】

(1) 先判断函数 $y = x^3$ 是否满足“精彩函数”的条件, 从而可判断 $[0, 1]$ 是否为函数 $y = x^3$ 的“精彩区间”;

(2) 判断函数 $f(x) = x + \frac{4}{x} (x > 0)$ 是否满足“精彩函数”的条件即可;

(3) 由 $g(x)$ 是“精彩函数”, 可知 $g(x) = x$ 至少存在两个不等的实数解, 可转化为 $x^2 - (2m+1)x + m^2 - 4 = 0$ 有两个不等的实数根, 两实根都不小于 -4 和 m , 结合二次函数的性质, 求出 m 的取值范围.

【详解】(1) 由题意, $y = x^3$ 是 \mathbb{R} 上的增函数,

易知 $y = x^3$ 在 $[0, 1]$ 上的值域为 $[0, 1]$,

所以函数 $y = x^3$ 是“精彩区间”, $[0, 1]$ 是该函数的“精彩区间”.

(2) 不是精彩函数, 证明如下:

因为函数 $f(x) = x + \frac{4}{x} (x > 0)$ 在区间 $(0, 2)$ 上单调递减, 在区间 $(2, +\infty)$ 上单调递增,

所以函数 $f(x) = x + \frac{4}{x}$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 上不单调, 不满足“精彩函数”的第一个条件,

所以函数 $f(x) = x + \frac{4}{x} (x > 0)$ 不是“精彩函数”.

(3) 由题意, 函数 $g(x) = \sqrt{x+4} + m$ 的定义域为 $[-4, +\infty)$, 且 $g(x)$ 在定义域上为单调递增函数,

因为函数 $g(x) = \sqrt{x+4} + m$ 是“精彩函数”, 所以方程 $\sqrt{x+4} + m = x$ 至少存在两个不等的实数解,

方程整理得 $x^2 - (2m+1)x + m^2 - 4 = 0$,

所以该方程有两个不等的实数根, 设为 x_1, x_2 , 不妨设 $x_2 > x_1$, 则 $x_2 > x_1 \geq -4$, $x_2 > x_1 \geq m$,

令 $h(x) = x^2 - (2m+1)x + m^2 - 4$,

$$\text{由题意得, } \begin{cases} \Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2 - 4) > 0 \\ h(m) = m^2 - (2m+1)m + m^2 - 4 \geq 0 \\ h(-4) = 16 + 4(2m+1) + m^2 - 4 \geq 0 \\ \frac{2m+1}{2} > -4 \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} 4m+17 > 0 \\ m+4 \leq 0 \\ (m+4)^2 \geq 0, \text{ 解得 } -\frac{17}{4} < m \leq -4. \\ \frac{2m+1}{2} > -4 \end{cases}$$

所以实数 m 的取值范围是 $-\frac{17}{4} < m \leq -4$.

【点睛】本题考查新定义，考查函数与方程的综合应用，考查了函数基本性质的运用，考查了学生的推理能力与计算求解能力，属于中档题.



关于我们

北京高考资讯是专注于北京新高考政策、新高考选科规划、志愿填报、名校强基计划、学科竞赛、高中生涯规划的超级升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有北京高考在线网站（www.gaokzx.com）和微信公众平台等媒体矩阵。

目前，北京高考资讯微信公众号拥有30W+活跃用户，用户群体涵盖北京80%以上的重点中学校长、老师、家长及考生，引起众多重点高校的关注。
北京高考在线官方网站：www.gaokzx.com

北京高考资讯 (ID: bj-gaokao)
扫码关注获取更多



关注北京高考在线官方微信：[北京高考资讯 \(ID:bj-gaokao\)](https://www.gaokzx.com)，获取更多试题资料及排名分析信息。