

## 2021 届高三期末预热联考

### 文数参考答案及评分细则

#### 一、选择题

1. D 【解析】因为  $M \cap N = \{2, 4, 6, \dots, 2020\}$ , 所以  $M \cap N$  中元素的个数为 1010. 故选 D.

2. C 【解析】因为  $z = (i-2)i - 3i^3 = -1 - 2i + 3i = -1 + i$ , 所以  $|z| = \sqrt{2}$ . 故选 C.

3. D 【解析】将这 13 个月的数据按从小到大的顺序排列, 可得前 7 个数依次为 8.6, 30.5, 32.6, 34, 35.7, 38.8, 40, 故各月商用车销量的中位数是 40 万辆, A 错误; 由图可知, 只有少数几个月的月销量低于 34 万辆, 且月销量超过 34 万辆的月份较多, 故各月商用车的平均销量超过 34 万辆, B 错误; 由折线统计图可知, 3 月份的同比增长率为  $-22.6\%$ , C 错误; 由折线统计图可知, 2020 年 4 月至 8 月的同比增长率均为正数, 即 2020 年 4 月至 8 月的商用车月销量都超过了 2019 年商用车的同期月销量, 故 D 正确. 故选 D.

4. A 【解析】 $x^2 + y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$ , 表示圆心为  $C(0, 1)$ , 半径等于 1 的圆,  $C(0, 1)$  到直线  $l$  的距离  $d = \frac{|0+1+\sqrt{2}-1|}{\sqrt{2}} = 1$ , 则圆上的点到直线  $l$  的距离的最大值等于  $d+r=2$ . 故选 A.

5. A 【解析】由  $0 < x < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$ , 又因为  $\cos(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{6}}{3}$ , 则  $\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 所以  $\sin x = \sin(x + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}) = \sin(x + \frac{\pi}{6}) \cos \frac{\pi}{6} - \cos(x + \frac{\pi}{6}) \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{3-\sqrt{6}}{6}$ . 故选 A.

6. D 【解析】 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}|^2 \Leftrightarrow |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos A = |\vec{AB}|^2 \Rightarrow \cos A = \frac{|\vec{AB}|}{|\vec{AC}|}$ . 作  $CH \perp AB$  于点  $H$ , 则

$\cos A = \frac{|\vec{AH}|}{|\vec{AC}|}$ , 发现点  $H$  与  $B$  重合, 则  $AB \perp BC$ , 点

$C$  的轨迹是经过点  $B$  并与  $AB$  垂直的直线. 故选 D.

7. C 【解析】由余弦定理, 得  $\cos B = \frac{2+3-4}{2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}} =$

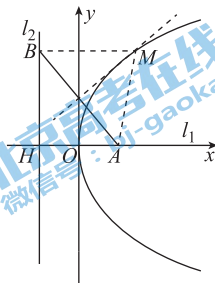
$\frac{1}{2\sqrt{6}}$ ,  $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{6}}$ . 设  $\triangle ABC$  外接圆的

半径等于  $r$ , 则由正弦定理, 得  $2r = \frac{AC}{\sin B} = 2 \times \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{23}}$ ,

解得  $r = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{23}}$ , 所以  $\triangle ABC$  外接圆的面积为  $\pi r^2 =$

$\frac{24\pi}{23}$ . 故选 C.

8. B 【解析】以  $l_1$  为  $x$  轴、以线段  $AH$  的垂直平分线为  $y$  轴建立如图所示的直角坐标系.

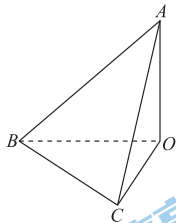


由题目条件知,  $|MA| = |MB|$ ,  $MB \perp l_2$ , 则动点  $M$  的轨迹是以  $A$  为焦点、以直线  $l_2$  为准线的抛物线, 设其方程为  $y^2 = 2px (p > 0)$ , 则  $p = |AH| = 36$ , 则抛物线的方程是  $y^2 = 72x$ , 所以  $|MA| = |MB| = x_M + \frac{p}{2} = x_M + 18 \geq 18$ , 当  $x_M = 0$  时取等号, 即  $|MA|_{\min} = 18$ . 故选 B.

9. D 【解析】设勾股形的“勾”“股”“弦”分别等于  $a, b, c$ , 则  $a = 11, a^2 + b^2 = c^2$ , 变形得  $(c+b) \cdot (c-b) = 11^2 = 11 \times 11 = 121 \times 1$ . 因为  $c > 0, b > 0$ , 则  $c+b \neq c-b, c$

$+b > c - b > 0$ , 必然有  $c + b = 121, c - b = 1$ , 联立解得  $b = 60, c = 61$ . 因为 11 是质数, 除  $(c + b) \cdot (c - b) = 11 \times 11 = 121 \times 1$  两种分解外, 再没有其它的正整数分解, 故  $b, c$  的取值是唯一的, 此勾股形的周长等于 132. 故选 D.

10. C 【解析】该几何体是以同一顶点  $O$  为端点的三条侧棱两两垂直的三棱锥(如图),



$OA = OB = OC = 2, OA, OB, OC$  两两垂直. 三棱锥的体积  $V = \frac{1}{3} \times (\frac{1}{2} \times 2 \times 2) \times 2 = \frac{4}{3}$ , 表面积  $S = (\frac{1}{2} \times 2 \times 2) \times 3 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{8})^2 = 6 + 2\sqrt{3}$ . 设该三棱锥内切球的半径等于  $r$ , 由等体积法, 得  $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot r = \frac{4}{3}$ , 则  $r = \frac{4}{S} = \frac{4}{2(3 + \sqrt{3})} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ . 故选 C.

11. A 【解析】 $b = 2\log_5 2 = \log_5 4, c = \frac{1}{2}\log_2 3 = \log_4 3, b - c = \log_5 4 - \log_4 3 = \frac{\lg 4}{\lg 5} - \frac{\lg 3}{\lg 4} = \frac{(\lg 4)^2 - \lg 3 \times \lg 5}{\lg 5 \times \lg 4}$ . 又  $\lg 3 \times \lg 5 < (\frac{\lg 3 + \lg 5}{2})^2 = (\frac{\lg 15}{2})^2 < (\frac{\lg 16}{2})^2 = (\lg 4)^2$ , 则  $b - c > 0, b > c$ .  $a = 0.75 = \frac{3}{4} = \log_4 4^{\frac{3}{4}} = \log_4 \sqrt[4]{8} < \log_4 3 = c$ . 所以  $a < c < b$ . 故选 A.

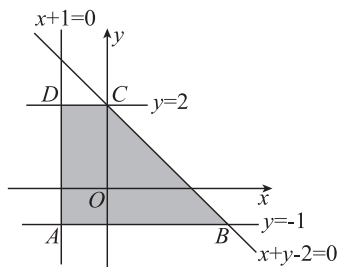
12. C 【解析】设  $g(x) = \frac{f(x)}{xe^x}$ , 则  $g'(x) = \frac{xe^x f'(x) - (e^x + xe^x)f(x)}{(xe^x)^2} = \frac{e^x [xf'(x) - (1+x)f(x)]}{(xe^x)^2}$ . 由已知  $g'(x) > 0$ ,

$g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上是增函数, 所以  $g(3) > g(2)$ , 即  $\frac{f(3)}{3e^3} > \frac{f(2)}{2e^2} \Rightarrow 2e^2 f(3) > 3e^3 f(2) \Rightarrow 2f(3) > 3ef(2)$ . 故选 C.

## 二、填空题

13.  $\frac{4}{3}$  【解析】依题意,  $a = 3, b = \sqrt{7}$ , 则  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 4$ , 所以离心率  $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{3}$ .

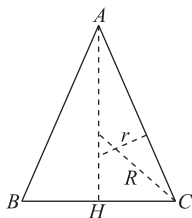
14.  $[-7, 11]$  【解析】作出不等式组表示的可行域(四边形  $ABCD$  及内部)如图所示.



设  $3x - 2y = z$ , 即  $y = \frac{3}{2}x + \frac{-z}{2}$ . 当直线  $l: y = \frac{3}{2}x + \frac{-z}{2}$  经过点  $B(3, -1)$  时, 纵截距  $\frac{-z}{2}$  最小,  $z$  最大,  $z_{\max} = 3 \times 3 - 2 \times (-1) = 11$ . 当直线  $l: y = \frac{3}{2}x + \frac{-z}{2}$  经过点  $D(-1, 2)$  时, 纵截距  $\frac{-z}{2}$  最大,  $z$  最小,  $z_{\min} = 3 \times (-1) - 2 \times 2 = -7$ . 所以  $3x - 2y$  的取值范围是  $[-7, 11]$ .

15.  $(-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$  【解析】 $f(x) = \sin(x + 2\pi + \frac{\pi}{2}) + \frac{5}{\cos(x - 4\pi + \pi)} = \cos x - \frac{5}{\cos x}$ . 令  $\cos x = t$ , 则  $y = t - \frac{5}{t} (-1 \leq t \leq 1, \text{且 } t \neq 0)$ .  $\because y = t - \frac{5}{t}$  在  $[-1, 0), (0, 1]$  上分别单调递增,  $\therefore$  函数  $f(x)$  的值域为  $(-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$ .

16.  $\frac{665\sqrt{2}\pi}{192}$  【解析】经过圆锥的轴作几何体的轴截面, 如图,



圆锥的截面是等腰 $\triangle ABC$ ,  $BH = HC = 1$ ,  $AB = AC = 3$ , 则  $AH = \sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$ . 设圆锥内切球的半径为  $r$ , 由等面积法, 得  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(AB+AC+BC) \cdot r$

$$= \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH, \text{ 则 } r = \frac{BC \cdot AH}{AB+AC+BC} = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

又  $\sin \angle ABC = \sin \angle ABH = \frac{AH}{AB} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ , 设圆锥外接

球的半径等于  $R$ , 由正弦定理, 得  $2R = \frac{AC}{\sin \angle ABC} = 3$

$$\times \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{4}, \text{ 则 } R = \frac{9\sqrt{2}}{8}, \text{ 所以空心球体的体积 } V$$

$$= \frac{4\pi}{3}R^3 - \frac{4\pi}{3}r^3 = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{9^3 \times 2\sqrt{2}}{8^3} - \frac{2\sqrt{2}}{8} \right) = \frac{665\sqrt{2}\pi}{192}.$$

### 三、解答题

17. 解: (1) 设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ ,

$$\text{由 } a_2, a_4, a_5 \text{ 成等比} \Rightarrow a_2 \cdot a_5 = a_4^2 \Rightarrow (a_1 + d)(a_1 + 4d) = (a_1 + 3d)^2 \Rightarrow d(a_1 + 5d) = 0,$$

$$\text{因为 } d \neq 0, \text{ 所以 } a_1 = -5d. \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{又 } a_3 = a_1 + 2d = -3d = 6,$$

$$\text{则 } d = -2, a_1 = -5d = 10, \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{则 } a_n = a_1 + (n-1)d = 10 - 2(n-1) = 12 - 2n.$$

$$\text{所以数列 } \{a_n\} \text{ 的通项公式为 } a_n = 12 - 2n. \quad (6 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 数列 } \{a_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } S_n = na_1 + \frac{1}{2}n(n-1)d =$$

$$10n - n(n-1) = -n^2 + 11n. \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{又 } |a_n| = |12 - 2n| = \begin{cases} a_n, & n \leq 6, \\ -a_n, & n \geq 7, \end{cases}$$

$$\text{所以 } T_{20} = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{20}| = a_1 + a_2 + \dots + a_6 - a_7 - a_8 - \dots - a_{20} = 2(a_1 + a_2 + \dots + a_6) - a_1 -$$

$$a_2 - \dots - a_6 - a_7 - a_8 - \dots - a_{20} = 2S_6 - S_{20} = 2 \times (-6^2 + 11 \times 6) - (-20^2 + 11 \times 20) = 240. \quad (12 \text{ 分})$$

18. 解: (1) 全班学生数学成绩的众数为 126 分, (1 分)

$$\text{中位数为 } \frac{126+128}{2} = 127 \text{ 分}. \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{平均数为 } \bar{x} = \frac{1}{40} \times (98 + 3 \times 100 + 17 + 6 \times 110 + 29 + 12 \times 120 + 60 + 12 \times 130 + 43 + 4 \times 140 + 19 + 2 \times 150) = 127.15 \text{ 分}. \quad (4 \text{ 分})$$

(2) 根据题设条件, 填写列联表如下:

	数学		
物理	良好	不良好	合计
良好	26	4	30
不良好	4	6	10
合计	30	10	40

(6 分)

$$K^2 \text{ 的观测值 } k = \frac{40 \times (26 \times 6 - 4 \times 4)^2}{30 \times 10 \times 30 \times 10} \approx 8.711,$$

查临界值表知,  $7.879 < 8.711 < 10.828$ , 观测值 7.879, 10.828 分别与犯错概率 0.005, 0.001 对应.

所以有 99.5% 的把握认为学生物理成绩良好与数学成绩良好有关. (8 分)

(3) 物理成绩不良好的学生恰有 10 人, 其中数学成绩良好的有 4 人, 分层抽取的 5 人中, 有 2 人数学成绩良好, 记为 A, B, 3 人数学成绩不良好, 记为 c, d, e.

从 5 人中抽取 2 人的所有情况 (基本事件) 如下: AB, Ac, Ad, Ae, Bc, Bd, Be, cd, ce, de, 共计 10 种, (10 分)

其中恰有 1 人数学成绩良好的情况有: Ac, Ad, Ae, Bc, Bd, Be, 共 6 种.

记“被抽到的两名学生恰好有一名数学成绩良好”为事件 M,

则  $P(M) = \frac{6}{10} = 0.6$ . (12分)

19. 证明: (1) 延长  $PE$  与  $AD$  交于点  $G$ , 延长  $PF$  与  $AB$  交于点  $H$ ,

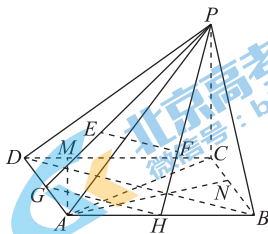
因为  $E, F$  分别是  $\triangle PAD, \triangle PAB$  的重心,

则  $G$  是  $AD$  的中点,  $H$  是  $AB$  的中点,  $\frac{PE}{EG} = 2, \frac{PF}{FH} = 2, \frac{PE}{EG} = \frac{PF}{FH}$ ,

则  $EF \parallel GH$ . (4分)

又因为  $EF \not\subset$  平面  $ABCD, GH \subset$  平面  $ABCD$ ,

所以  $EF \parallel$  平面  $ABCD$ . (6分)



(2) 连接  $BD, GH$ .

因为  $G$  是  $AD$  的中点,  $H$  是  $AB$  的中点,

则  $GH \parallel DB$ .

因为  $GH \parallel EF$ , 所以  $EF \parallel DB$ . (8分)

因为四边形  $ABCD$  是菱形, 则  $DB \perp AC, EF \perp AC$ .

作  $AM \perp CD$  于点  $M$ ,

因为平面  $PCD \perp$  平面  $ABCD$ , 平面  $PCD \cap$  平面  $ABCD = CD$ ,

则  $AM \perp$  平面  $PCD$ .

因为  $PC \subset$  平面  $PCD$ , 则  $PC \perp AM$ .

作  $AN \perp BC$  于点  $N$ , 同理可证  $PC \perp AN$ .

又因为  $AM \cap AN = A$ ,

所以  $PC \perp$  平面  $ABCD$ . (10分)

所以  $PC \perp GH, EF \perp PC$ .

由  $AC \cap PC = C$ , 得  $EF \perp$  平面  $PAC$ .

因为  $EF \subset$  平面  $PEF$ ,

所以平面  $PEF \perp$  平面  $PAC$ . (12分)

20. 解: (1) 由题得,  $e = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$a = \sqrt{2}b$ . (2分)

由以椭圆  $C$  的顶点为顶点的四边形面积等于  $2\sqrt{2}$ ,

得  $S_{\text{四边形}} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b = 2ab = 2\sqrt{2} \Rightarrow ab = \sqrt{2}$ .

联立  $\begin{cases} a = \sqrt{2}b, \\ ab = \sqrt{2}, \end{cases}$  解得  $b = 1, a = \sqrt{2}$ , (4分)

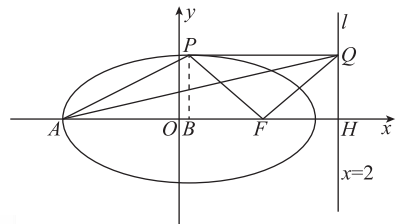
故椭圆  $C$  的方程是  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ . (5分)

(2) 因为以  $PQ$  为直径的圆经过点  $F$ ,

则  $\angle PFQ = 90^\circ$

记直线  $l$  与  $x$  轴的交点为  $H$ , 作  $PB \perp x$  轴于  $B$ , 则

$\angle BPF = \angle HFQ$ .



又  $|PF| = |QF|$ , 则  $\text{Rt}\triangle BPF \cong \text{Rt}\triangle HFQ$ ,  $|PB| = |FH| = 2 - 1 = 1$ .

设  $P(m, 1)$ , 则  $\frac{m^2}{2} + 1^2 = 1$ , 得  $m = 0$ ,

则  $B$  与  $O$  重合,  $P$  就是椭圆的上顶点.

由  $|HQ| = |BF| = |OF| = 1$ , 得  $Q(2, 1)$ . (7分)

设  $\triangle APQ$  外接圆的圆心为  $E(x_0, y_0)$ , 则  $E$  在线段  $PQ$  的垂直平分线上,

因为  $PQ \parallel x$  轴, 则  $x_0 = \frac{0+2}{2} = 1$ . (9分)

易知  $A(-\sqrt{2}, 0)$ , 半径  $|EA| = |EP| \Rightarrow (x_0 + \sqrt{2})^2 + (y_0 - 0)^2 = (x_0 - 0)^2 + (y_0 - 1)^2$ , 解得  $y_0 = \frac{-1 - 2\sqrt{2}}{2}$ .

所以  $\triangle APQ$  外接圆圆心的坐标是  $(1, \frac{-1 - 2\sqrt{2}}{2})$ .

(12分)

21. 解: (1) 当  $a = 1$  时,  $f(x) = x^3 + x^2, f'(x) = 3x^2 + 2x = 3x(x + \frac{2}{3})$ .

令  $f'(x) = 0$  得  $x_1 = 0, x_2 = -\frac{2}{3}$ .

当  $-1 < x < -\frac{2}{3}$  或  $0 < x < 1$  时,  $f'(x) > 0$ ;

当  $-\frac{2}{3} < x < 0$  时,  $f'(x) < 0$ ,

则  $f(x)$  在  $(-1, -\frac{2}{3})$ ,  $(0, 1)$  上分别单调递增, 在  $(-\frac{2}{3}, 0)$  上单调递减. (3分)

所以  $f(x)_{\text{极大值}} = f(-\frac{2}{3}) = \frac{4}{27}$ ,  $f(x)_{\text{极小值}} = f(0) = 0$ ,

又端点值  $f(-1) = 0$ ,  $f(1) = 2$ ,

比较可得, 函数  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上的值域是  $[0, 2]$ .

(5分)

(2) 由题得,  $f'(x) = 3x^2 + 2ax$ .

设经过点  $P(0, 1)$  与曲线  $y = f(x)$  相切的切线的切点为  $T(t, f(t))$ ,

则切线方程为  $y - f(t) = f'(t)(x - t)$ ,

由切线经过点  $P(0, 1)$ , 得  $1 - (t^3 + at^2) = (3t^2 + 2at)(0 - t) = -3t^3 - 2at^2$ , 即  $2t^3 + at^2 + 1 = 0$ . (8分)

设  $g(t) = 2t^3 + at^2 + 1$ , 则函数  $g(t)$  零点的个数对应于切线的条数.

又  $g'(t) = 6t(t + \frac{a}{3})$ ,

令  $g'(t) = 0$  得  $t_1 = 0, t_2 = -\frac{a}{3}$ .

(i) 当  $a = 0$  时,  $g'(t) = 6t^2 \geq 0$ ,  $g(t)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递增, 值域是  $(-\infty, +\infty)$ ,  $g(t)$  存在唯一零点.

(ii) 当  $a > 0$  时,  $-\frac{a}{3} < 0$ ,  $g(t)$  在  $(-\infty, -\frac{a}{3})$ ,  $(0, +\infty)$  上分别单调递增, 在  $(-\frac{a}{3}, 0)$  上单调递减,

$g(t)_{\text{极小值}} = g(0) = 1 > 0$ ,  $t$  趋向于  $-\infty$  时  $g(t)$  趋向于  $-\infty$ , 所以此时  $g(t)$  存在唯一零点.

(iii) 当  $a < 0$  时,  $-\frac{a}{3} > 0$ ,  $g(t)$  在  $(-\infty, 0)$ ,

$(-\frac{a}{3}, +\infty)$  上分别单调递增, 在  $(0, -\frac{a}{3})$  上单调

递减,  $g(t)_{\text{极大值}} = g(0) = 1 > 0$ ,  $g(t)_{\text{极小值}} = g(-\frac{a}{3})$

$= \frac{a^3}{27} + 1$ . (10分)

考虑到  $t$  趋向于  $-\infty$  时  $g(t)$  趋向于  $-\infty$ ,  $t$  趋向于  $+\infty$  时  $g(t)$  趋向于  $+\infty$ .

① 当  $g(t)_{\text{极小值}} = \frac{a^3}{27} + 1 = 0$  即  $a = -3$  时,  $g(t)$  存在两个零点.

② 当  $g(t)_{\text{极小值}} = \frac{a^3}{27} + 1 > 0$  即  $-3 < a < 0$  时,  $g(t)$  存在唯一零点.

③ 当  $g(t)_{\text{极小值}} = \frac{a^3}{27} + 1 < 0$  即  $a < -3$  时,  $g(t)$  有且只有三个不同零点.

综上所述, 当  $a > -3$  时, 符合条件的切线有且只有 1 条;

当  $a = -3$  时, 符合条件的切线有且只有 2 条;

当  $a < -3$  时, 符合条件的切线有且只有 3 条. (12分)

22. 解: (1) 将曲线  $C_1$  的参数方程  $\begin{cases} x = \sqrt{3} \cos \alpha, \\ y = \sin \alpha \end{cases}$  ( $\alpha$  为参数)

化为普通方程得  $C_1: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ ; ①

将曲线  $C_2$  的参数方程  $\begin{cases} x = \frac{t}{2} + \frac{1}{2t}, \\ y = \frac{t}{2} - \frac{1}{2t} \end{cases}$  ( $t$  为参数) 化为普通方程得  $C_2: x^2 - y^2 = 1$ . ②

联立①②解得曲线  $C_1$  与  $C_2$  的四个交点的直角坐标:

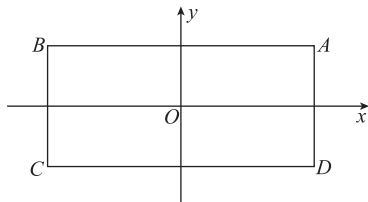
$A(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ,  $B(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ,  $C(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ ,

$D(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ .

则四个交点的极坐标是:  $A(\sqrt{2}, \frac{\pi}{6})$ ,  $B(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{6})$ ,

$C(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{6})$ ,  $D(\sqrt{2}, \frac{11\pi}{6})$ . (5分)

(2) 作出四点及以该四点为顶点的四边形(矩形)如图.



矩形四条边(线段)的直角坐标方程为:

$$AB: y = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( -\frac{\sqrt{6}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{6}}{2} \right),$$

$$BC: x = -\frac{\sqrt{6}}{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$CD: y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left( -\frac{\sqrt{6}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{6}}{2} \right),$$

$$DA: x = \frac{\sqrt{6}}{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

将四条边的直角坐标方程转化为极坐标方程:

$$AB: \rho = \frac{\sqrt{2}}{2 \sin \theta} \left( \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6} \right),$$

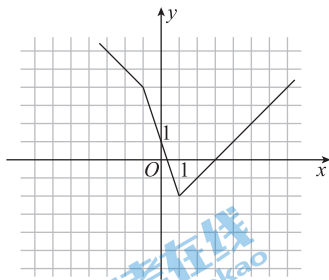
$$BC: \rho = -\frac{\sqrt{6}}{2 \cos \theta} \left( \frac{5\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{7\pi}{6} \right),$$

$$CD: \rho = -\frac{\sqrt{2}}{2 \sin \theta} \left( \frac{7\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{11\pi}{6} \right),$$

$$DA: \rho = \frac{\sqrt{6}}{2 \cos \theta} \left( -\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \right). \quad (10 \text{分})$$

23. 解: (1)  $f(x) = \begin{cases} -x+3, & x \leq -1, \\ -3x+1, & -1 < x \leq 1, \\ x-3, & x > 1. \end{cases}$  作出函数

$f(x)$ 的图象如图:



(4分)

$$f(x)_{\min} = -2 \quad (5 \text{分})$$

(2) 因为  $f(x)_{\min} = -2$ ,

所以  $f(x) + 5$  的取值范围是  $[3, +\infty)$ .

因为  $g(x) = |x+a| - 2|x-a|$ ,

所以  $g(x)_{\max} = \max\{g(-a), g(a)\} = \max\{-4|a|, 2|a|\} = 2|a|$ ,  $g(x)$  的取值范围是  $(-\infty, 2|a|]$ .

(7分)

$$\exists x_1, x_2 \in \mathbf{R} \text{ 使 } f(x_1) + 5 = g(x_2) \Leftrightarrow [3, +\infty) \cap (-\infty, 2|a|] \neq \emptyset \Leftrightarrow 2|a| \geq 3 \Leftrightarrow |a| \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow a \leq -\frac{3}{2}$$

$$\text{或 } a \geq \frac{3}{2}.$$

所以实数  $a$  的取值范围是  $(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup$

$$[\frac{3}{2}, +\infty). \quad (10 \text{分})$$



## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯