西城区高三统一测试

数　　学(文科)

2018.4

本试卷分第Ⅰ卷和第Ⅱ卷两部分，第Ⅰ卷1至2页，第Ⅱ卷3至6页，共150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第Ⅰ卷（选择题　共40分）

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 若集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid 3x+2>0\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-2x-3>0\}$，则 $A\cap B=$

(A) $\{x\in\mathbf{R}\mid x<-1\}$　　(B) $\{x\in\mathbf{R}\mid -1<x<-\frac{2}{3}\}$

(C) $\{x\in\mathbf{R}\mid -\frac{2}{3}<x<3\}$　　(D) $\{x\in\mathbf{R}\mid x>3\}$

2. 若复数 $(a+\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})$ 的实部与虚部相等，则实数 $a=$

(A) 7　　(B) -7　　(C) 1　　(D) -1

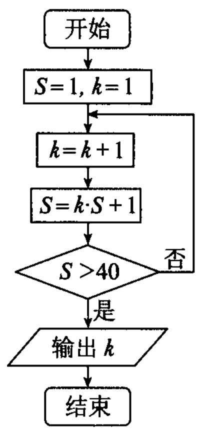
3. 执行如图所示的程序框图，输出的 k 值为

(A) 2

(B) 3

(C) 4

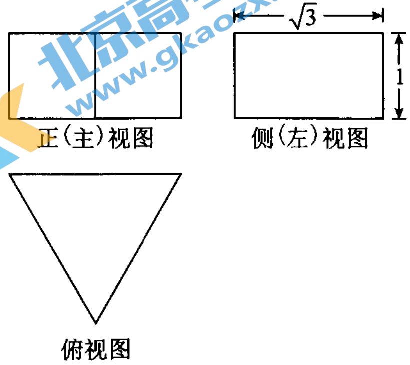
(D) 5



4. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3^x}, & x>0,\\ g(x), & x<0\end{cases}$ 是奇函数，则 $f(-\dfrac{1}{2})=$

(A) $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　(B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　(C) $-\dfrac{2}{9}$　　(D) $\dfrac{2}{9}$

5. 正三棱柱的三视图如图所示，该正三棱柱的表面积是



(A) $3\sqrt{3}$　　(B) $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

(C) $6+\sqrt{3}$　　(D) $6+2\sqrt{3}$

6. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$. 则“$a<0$”是“$f(x)<0$ 恒成立”的

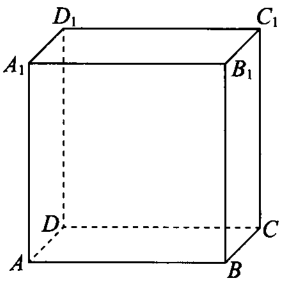
(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

7. 已知 O 是正方形 $ABCD$ 的中心. 若 $\overrightarrow{DO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，其中 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$，则 $\dfrac{\lambda}{\mu}=$

(A) -2　　(B) $-\dfrac{1}{2}$　　(C) $-\sqrt{2}$　　(D) $\sqrt{2}$

8. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AB=2$，$BC=1$，点 P 在侧面 A_1ABB_1 上. 满足到直线 AA_1 和 CD 的距离相等的点 P



(A) 不存在　　(B) 恰有 1 个

(C) 恰有 2 个　　(D) 有无数个

第Ⅱ卷(非选择题　共 110 分)

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$ 的定义域是____.

10. 已知 x，y 满足条件 $\begin{cases} x+y\leqslant 1, \\ x-y\leqslant 1, \\ x+1\geqslant 0, \end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的最小值为____.

11. 已知抛物线 $y^2=-8x$ 的焦点与双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1\ (a>0)$ 的一个焦点重合，则 $a=$____；双曲线的渐近线方程是____.

12. 在$\triangle ABC$ 中，$b=7$，$c=5$，$\angle B=\dfrac{2\pi}{3}$，则 $a=$____.

13. 能够说明“存在不相等的正数 a，b，使得 $a+b=ab$”是真命题的一组 a，b 的值为____.

14. 某班共有学生 40 名，在乒乓球、篮球、排球三项运动中每人至少会其中的一项，有些人会其中的两项，没有人三项均会. 若该班 18 人不会打乒乓球，24 人不会打篮球，16 人不会打排球，则该班会其中两项运动的学生人数是____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（本小题满分 13 分）

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差不为 0，$a_2=1$，且 a_2，a_3，a_6 成等比数列．

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

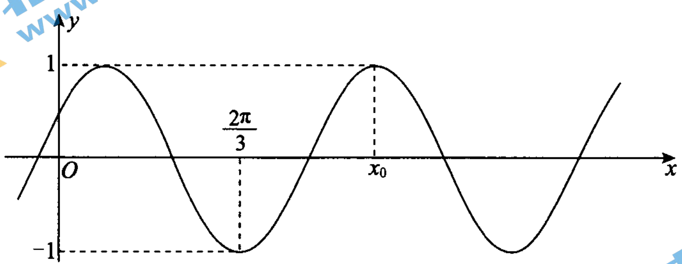
（Ⅱ）设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求使 $S_n>35$ 成立的 n 的最小值．

16．（本小题满分 13 分）

函数 $f(x)=2\cos x\cdot\cos(x-\frac{\pi}{3})+m$ 的部分图象如图所示．

（Ⅰ）求 m 的值；

（Ⅱ）求 x_0 的值．



17．（本小题满分 13 分）

某企业 2017 年招聘员工，其中 A、B、C、D、E 五种岗位的应聘人数、录用人数和录用比例（精确到 1%）如下：

岗位	男性应聘人数	男性录用人数	男性录用比例	女性应聘人数	女性录用人数	女性录用比例
A	269	167	62%	40	24	60%
B	40	12	30%	202	62	31%
C	177	57	32%	184	59	32%
D	44	26	59%	38	22	58%
E	3	2	67%	3	2	67%
总计	533	264	50%	467	169	36%

（Ⅰ）从表中所有应聘人员中随机选择 1 人，试估计此人被录用的概率；

（Ⅱ）从应聘 E 岗位的 6 人中随机选择 1 名男性和 1 名女性，求这 2 人均被录用的概率；

（Ⅲ）表中 A、B、C、D、E 各岗位的男性、女性录用比例都接近(二者之差的绝对值不大于 5%)，但男性的总录用比例却明显高于女性的总录用比例. 研究发现，若只考虑其中某四种岗位，则男性、女性的总录用比例也接近，请写出这四种岗位.（只需写出结论）

18.（本小题满分 14 分）

如图 1，在$\triangle ABC$中，D，E分别为AB，AC的中点，O为DE的中点，$AB=AC=2\sqrt{5}$，$BC=4$. 将$\triangle ADE$沿DE折起到$\triangle A_1DE$的位置，使得平面$A_1DE\perp$平面$BCED$，F为A_1C的中点，如图 2.

（Ⅰ）求证：$EF//$平面A_1BD；

（Ⅱ）求证：平面$A_1OB\perp$平面A_1OC；

（Ⅲ）线段OC上是否存在点G，使得$OC\perp$平面EFG？说明理由.

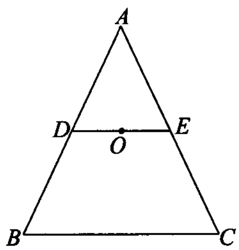


图 1

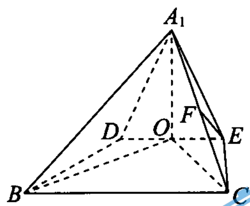


图 2

19.（本小题满分 14 分）

已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，以椭圆$C$的任意三个顶点为顶点的三角形的面积是$2\sqrt{2}$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）设A是椭圆C的右顶点，点B在x轴上. 若椭圆C上存在点P，使得$\angle APB=90°$，求点B横坐标的取值范围.

20.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=e^{x}\cdot(a+\ln x)$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线与直线 $y=-\dfrac{x}{e}$ 垂直，求 a 的值；

（Ⅱ）记 $f(x)$ 的导函数为 $g(x)$. 当 $a\in(0,\ln 2)$时，证明：$g(x)$存在极小值点 x_0，且 $f(x_0)<0$.

西城区高三统一测试

数学（文科）参考答案及评分标准

2018.4

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．

1．D　　2．B　　3．C　　4．A

5．D　　6．B　　7．A　　8．D

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

9．$(0,1)\cup(1,+\infty)$　　10．-5　　11．$\sqrt{3}$，$x\pm\sqrt{3}y=0$

12．3　　13．$\frac{3}{2},3$（答案不唯一）　　14．22

注：第 11 题第一空 3 分，第二空 2 分．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．其他正确解答过程，请参照评分标准给分．

15．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，$d\neq 0$．

因为 a_2，a_3，a_6 成等比数列，　所以$a_3^2=a_2\cdot a_6$．　［2 分］

即 $(1+d)^2=1+4d$，　［4 分］

解得 $d=2$，或$d=0$（舍去）．　［6 分］

所以 $\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a_2+(n-2)d=2n-3$．　［8 分］

（Ⅱ）因为 $a_n=2n-3$，

所以 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(a_2+a_{n-1})}{2}=n^2-2n$．　［10 分］

依题意有 $n^2-2n>35$，

解得 $n>7$．　［12 分］

使$S_n>35$成立的n的最小值为 8．　［13 分］

16.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）依题意，有 $f(\frac{2\pi}{3})=-1$， [2 分]

所以 $2\cos\frac{2\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{3}+m=-1$，

解得 $m=-\frac{1}{2}$． [4 分]

（Ⅱ）因为 $f(x)=2\cos x\cdot\cos(x-\frac{\pi}{3})-\frac{1}{2}$

$=2\cos x\cdot(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)-\frac{1}{2}$ [6 分]

$=\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x-\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x$ [9 分]

$=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$． [10 分]

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$． [11 分]

所以 $x_0=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{7\pi}{6}$． [13 分]

17.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为 表中所有应聘人员总数为 $533+467=1000$，

被该企业录用的人数为 $264+169=433$．

所以从表中所有应聘人员中随机选择 1 人，此人被录用的概率约为 $P=\frac{433}{1000}$． [3 分]

（Ⅱ）记应聘 E 岗位的男性为 M_1，M_2，M_3，被录用者为 M_1，M_2；应聘 E 岗位的女性为 F_1，F_2，F_3，被录用者为 F_1，F_2． [4 分]

从应聘 E 岗位的 6 人中随机选择 1 名男性和 1 名女性，共 9 种情况，即：

$M_1F_1,M_1F_2,M_1F_3,M_2F_1,M_2F_2,M_2F_3,M_3F_1,M_3F_2,M_3F_3$． [7 分]

这 2 人均被录用的情况有 4 种，即：$M_1F_1,M_1F_2,M_2F_1,M_2F_2$． [8 分]

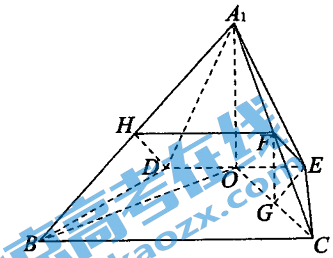
记“从应聘 E 岗位的 6 人中随机选择 1 名男性和 1 名女性，这 2 人均被录用”为事件 K，

则 $P(K)=\frac{4}{9}$． [10 分]

（Ⅲ）这四种岗位是：B、C、D、E． [13 分]

18．（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）取线段 A_1B 的中点 H，连接 HD，HF． ［1 分］



因为在 $\triangle ABC$ 中，D，E 分别为 AB，AC 的中点，

所以 $DE /\!/ BC$，$DE=\frac{1}{2}BC$．

因为 H，F 分别为 A_1B，A_1C 的中点，

所以 $HF /\!/ BC$，$HF=\frac{1}{2}BC$，

所以 $HF /\!/ DE$，$HF=DE$，

所以 四边形 $DEFH$ 为平行四边形， ［3 分］

所以 $EF /\!/ HD$． ［4 分］

因为 $EF \not\subset$ 平面 A_1BD，$HD \subset$ 平面 A_1BD，

所以 $EF /\!/$ 平面 A_1BD． ［5 分］

（Ⅱ）因为在 $\triangle ABC$ 中，D，E 分别为 AB，AC 的中点，

所以 $AD=AE$．

所以 $A_1D=A_1E$，又 O 为 DE 的中点，

所以 $A_1O \perp DE$． ［6 分］

因为 平面 $A_1DE \perp$ 平面 $BCED$，且 $A_1O \subset$ 平面 A_1DE，

所以 $A_1O \perp$ 平面 $BCED$， ［7 分］

所以 $CO \perp A_1O$． ［8 分］

在 $\triangle OBC$ 中，$BC=4$，易知 $OB=OC=2\sqrt{2}$，

所以 $CO \perp BO$，

所以 $CO \perp$ 平面 A_1OB， ［9 分］

所以 平面 $A_1OB \perp$ 平面 A_1OC． ［10 分］

（Ⅲ）线段 OC 上不存在点 G，使得 $OC \perp$ 平面 EFG． ［11 分］

否则，假设线段 OC 上存在点 G，使得 $OC \perp$ 平面 EFG，

连接 GE，GF，

则必有 $OC \perp GF$，且 $OC \perp GE$．

在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1OC$ 中，由 F 为 A_1C 的中点，$OC \perp GF$，

得 G 为 OC 的中点． ［12 分］

在 $\triangle EOC$ 中，因为 $OC \perp GE$，

所以 $EO=EC$，

这显然与 $EO=1$，$EC=\sqrt{5}$ 矛盾！

所以 线段 OC 上不存在点 G，使得 $OC \perp$ 平面 EFG． ［14 分］

19．（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）设椭圆C的半焦距为c．依题意，得

$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$， $ab=2\sqrt{2}$，且$a^2=b^2+c^2$． ［3 分］

解得 $a=2$，$b=\sqrt{2}$．

所以椭圆C的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$． ［5 分］

（Ⅱ）"椭圆C上存在点P，使得$\angle APB=90^\circ$"等价于"存在不是椭圆左、右顶点的点

P，使得$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$成立"． ［6 分］

依题意，$A(2,0)$．设$B(t,0)$，$P(m,n)$，则$m^2+2n^2=4$， ［7 分］

且 $(2-m,-n)\cdot(t-m,-n)=0$，

即 $(2-m)(t-m)+n^2=0$． ［9 分］

将 $n^2=\frac{4-m^2}{2}$代入上式，

得 $(2-m)(t-m)+\frac{4-m^2}{2}=0$． ［10 分］

因为 $-2<m<2$，

所以 $t-m+\frac{2+m}{2}=0$，

即 $m=2t+2$． ［12 分］

所以 $-2<2t+2<2$，

解得 $-2<t<0$，

所以 点B横坐标的取值范围是$(-2,0)$． ［14 分］

20．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）$f'(x)=\mathrm{e}^x\cdot(a+\ln x)+\mathrm{e}^x\cdot\frac{1}{x}=\mathrm{e}^x\cdot(a+\frac{1}{x}+\ln x)$． ［2 分］

依题意，有 $f'(1)=\mathrm{e}\cdot(a+1)=\mathrm{e}$， ［3 分］

解得 $a=0$． ［4 分］

（II）由（I）得 $g(x)=e^x\cdot(a+\frac{1}{x}+\ln x)$，

所以 $g'(x)=e^x\cdot(a+\frac{1}{x}+\ln x)+e^x\cdot(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})=e^x\cdot(a+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\ln x)$. [6 分]

因为 $e^x>0$，所以 $g'(x)$ 与 $a+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\ln x$ 同号.

设 $h(x)=a+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\ln x$， [7 分]

则 $h'(x)=\frac{x^2-2x+2}{x^3}=\frac{(x-1)^2+1}{x^3}$.

所以 对任意 $x\in(0,+\infty)$，有 $h'(x)>0$，故 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增. [8 分]

因为 $a\in(0,\ln 2)$，所以 $h(1)=a+1>0$，$h(\frac{1}{2})=a+\ln\frac{1}{2}<0$，

故存在 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $h(x_0)=0$. [10 分]

$g(x)$ 与 $g'(x)$ 在区间 $(\frac{1}{2},1)$ 上的情况如下：

x	$(\frac{1}{2},x_0)$	x_0	$(x_0,1)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	极小值	↗

所以 $g(x)$ 在区间 $(\frac{1}{2},x_0)$ 上单调递减，在区间 $(x_0,1)$ 上单调递增.

所以 若 $a\in(0,\ln 2)$，存在 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$，使得 x_0 是 $g(x)$ 的极小值点. [11 分]

令 $h(x_0)=0$，得 $a+\ln x_0=\frac{1-2x_0}{x_0^2}$，

所以 $f(x_0)=e^{x_0}\cdot(a+\ln x_0)=e^{x_0}\cdot\frac{1-2x_0}{x_0^2}<0$. [13 分]