数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
答案	B	A	B	C	B	D	C	C	ABC	BC	ABD

1.【解析】因为$N=\left\{x\in Z\middle|x^2\le 1\right\}=\{-1,0,1\}$,所以$(\complement_R M)\cap N=\{-1\}$.

2.【解析】$iz=2-i$，所以$\dfrac{z}{2+i}=\dfrac{2-i}{i(2+i)}=-\dfrac{4+3i}{5}$.

3.【解析】二项式$\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^6$的通项公式为$T_{r+1}=C_6^3\cdot(2x)^3\cdot\left(-\dfrac{1}{x}\right)^3=-160$.

4.【解析】由题意可知$2=u\ln\dfrac{1000}{800}$，火箭耗尽燃料时速度为$V=u\ln\dfrac{1000}{500}$,

所以$V=2\times\dfrac{\ln\dfrac{1000}{500}}{\ln\dfrac{1000}{800}}=\dfrac{2\ln 2}{\ln 5-2\ln 2}\approx\dfrac{2\times 0.69}{0.23}=6$，故选 C.

5.【答案】B【解析】由题意可得抛物线方程为$C:y^2=4x$，所以准线方程为$x=-1$，A 错误；可以计算，ΔAFO 的面积为1,B 正确；当$P(1,2)$时，C 错误；对于 D,可以判断这样的点 P 不存在.

6.【解析】在ΔACD中,$\angle ACD=\dfrac{\pi}{6}$,$\angle ADC=\dfrac{2\pi}{3}$,所以$\angle DAC=\dfrac{\pi}{6}$,故$CD=AD=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$,

在ΔBCD中,$BD^2=BC^2+CD^2-2\times BC\times CD\times\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{7-2\sqrt{3}}{3}$,所以$BD=\dfrac{\sqrt{21-6\sqrt{3}}}{3}$.

7.【解析】由已知得$a=2c$，左右焦点为$F_1(-c,0),F_2(c,0)$，则$\triangle PF_1F_2$为等边三角形,由题意知直线l为$\angle PF_1F_2$的角平分线,点P,F_2关于直线l对称,所以$\triangle PAB$的周长就是ΔABF_2的周长 4a,故$4a=16$,得$a=4$,$c=2,b=2\sqrt{3}$,所以椭圆方程为$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$.

8.【解析】若$f(f(x))=\dfrac{1}{2}$,则$f(x)=x_1,x_2,x_3,x_4$,且$0<x_1<1,x_2,x_3,x_4>1$, $f(x)=x_1$时有 4 个根,$f(x)=x_2,x_3,x_4$各有 2 个根,故共有 10 个根.

9.【答案】ABC【解析】因为$a=2$，$a^x=2,a^y=8$，所以$x=1,y=3$，故$x+y=4$，所以 A 正确；由已知得$x=\log_a 2,y=\log_a 8=3\log_a 2$,故$4\log_a 2=1$,所以$a=16$,故 B 正确；由$a>2$，$x+y=4\log_a 2<4\log_a a=4$,故 C 正确;由$x+y=4\log_a 2>1$,得$a>16$,故错误 D.

10.【答案】BC【解析】由 $f(x)=2\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{3}\right)$,函数 $f(x)$ 的图象关于 $x=-\dfrac{\pi}{3}$ 对称，

所以 $-\dfrac{\pi\omega}{3}-\dfrac{\pi}{3}=k\pi-\dfrac{\pi}{2}, k\in Z$,所以 $\omega=-3k+\dfrac{1}{2}, k\in Z$，由 $x\in\left[0,\dfrac{4\pi}{3}\right]$，$\omega>0$，

则 $\omega x-\dfrac{\pi}{3}\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{4\pi\omega}{3}-\dfrac{\pi}{3}\right]$,又函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{4\pi}{3}\right]$ 上单调,所以 $\begin{cases}\dfrac{4\pi\omega}{3}-\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{\pi}{2},\\ \omega>0,\end{cases}$ 解得 $0<\omega\le\dfrac{5}{8}$，

所以当 $k=0$ 时, $\omega=\dfrac{1}{2}$, $f(x)=2\sin\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.故 $f(x)$ 的最小正周期为 4π ,所以 A 不正确；

所以 $f(\pi)=2\sin\dfrac{\pi}{6}=1$,故 B 正确; $f\left(x+\dfrac{5\pi}{3}\right)=2\sin\left(\dfrac{1}{2}\times(x+\dfrac{5\pi}{3})-\dfrac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)=2\cos\dfrac{x}{2}$,所以

C 正确; $f\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)=2\sin\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)=2\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$,故 D 错误.

11.【答案】ABD【解析】由已知 $a_{n+2}-2a_{n+1}=a_{n+1}+2a_n-2a_{n+1}=-(a_{n+1}-2a_n)$，$a_2-2a_1=-a_1$，故 A 正确；由已知 $a_{n+3}-a_{n+1}=a_{n+2}+a_{n+1}=2(a_{n+2}-a_n)$，$a_3-a_1=2a_1$，故 B 正确；

由 $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$ 得 $S_{n+2}-S_{n+1}=S_{n+1}-S_n+2(S_n-S_{n-1})$（$n\ge 2$）,即 $n\ge 2$ 时，

$S_{n+2}-2S_{n+1}=S_n-2S_{n-1}$,又 $S_2-2S_1=0$, $S_3-2S_2=a_1$.所以 $\{S_{n+1}-2S_n\}$ 的奇数项均为 0,偶数项均为 a_1.

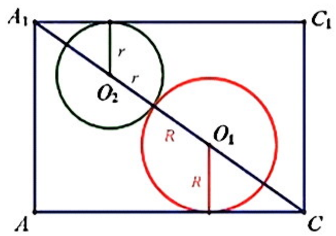
故 $\{S_{n+1}-2S_n\}$ 的奇数项为等差数列，偶数项为等差数列，所以 C 错误.即当 $n=2k(k\in N^*)$ 时，即

$S_{2k+1}-2S_{2k}=a_{2k+1}-S_{2k}=a_1$，故 $\{a_{2n+1}-S_{2n}\}$ 是每项均为 a_1 的常数列，也是等差数列，所以 D 正确.

12.【答案】$\dfrac{3}{4}$【解析】由已知得 $\sin\alpha\ne 0$，所以 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{3}{4}$.

13.【答案】$\dfrac{1}{2}$【解析】设事件 M：“甲分配到 A 社区”；事件 N：“乙分配到 B 社区”，则 $P(N)=\dfrac{1}{3}$，

$P(MN)=\dfrac{1}{A_3^3}=\dfrac{1}{6}$，$P(M|N)=\dfrac{P(MN)}{P(N)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}$.



14.【答案】$\dfrac{(9-5\sqrt{3})\pi}{2}$【解析】如图为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的对角面 ACC_1A_1，设两个球 O_1,O_2 的半径分别为 R,r（$0<r\le R$），当他们相切，且与正方体三个面相切时，体

积和最大.所以$(R+r)(1+\sqrt{3})=\sqrt{3}$，$R+r=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$，$R=\frac{3-\sqrt{3}}{2}-r$.

由已知$0<r\le\frac{1}{2},0<R\le\frac{1}{2},0<r\le R$，故$\frac{2-\sqrt{3}}{2}\le r\le\frac{3-\sqrt{3}}{4}$.

体积$V=\frac{4}{3}\pi(R^3+r^3)=\frac{4}{3}\pi(R+r)\left[(R+r)^2+3\left(r^2-\frac{3-\sqrt{3}}{2}r\right)\right]$

当$r=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$时，V最大，此时$R=\frac{1}{2}$，$V=\frac{(9-5\sqrt{3})\pi}{2}$

15.【解析】(1) 由已知得2×2列联表如下：

	喜欢网购人数	不喜欢网购人数	合计
年龄超过 45 岁人数	20	30	50
年龄不超过 45 岁人数	40	10	50
合计	60	40	100

………………………………………………………………………………………………… 2 分

假设H_0：M社区的市民是否喜欢网上购物与年龄无关.

由题意可得，$K^2=\frac{100(40\times30-10\times20)^2}{(40+10)\times(20+30)\times(40+20)\times(10+30)}=\frac{100}{6}\approx16.67>10.828$，……… 4 分

则假设不成立，所以有99.9%的把握认为M社区的市民是否喜欢网上购物与年龄有关…… 5 分

(2) 由题意可知，抽取的 20 名市民，喜欢网上购物的市民人数X服从二项分布，

且喜欢上网购物的频率为$\frac{60}{60+40}=0.6$，则$X\sim B(20,0.6)$ ……………………………… 7 分

且$P(X=k)=C_{20}^{k}\cdot0.6^k\cdot(1-0.6)^{20-k}=C_{20}^{k}\cdot0.6^k\cdot0.4^{20-k}$，$k=0,1,2\cdots,20$ ……………………… 8 分

设$t=\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)}=\frac{C_{20}^{k}\cdot0.6^k\cdot0.4^{20-k}}{C_{20}^{k-1}\cdot0.6^{k-1}\cdot0.4^{21-k}}=\frac{\frac{20!}{k!(20-k)!}\cdot0.6^{k-1}\cdot0.6\cdot0.4^{20-k}}{\frac{20!}{(k-1)!(21-k)!}\cdot0.6^{k-1}\cdot0.4^{20-k}\cdot0.4}$

$=\frac{3}{2}\cdot\frac{21-k}{k}=\frac{63-3k}{2k}$，$k=0,1,2\cdots,20$，……………………………………………… 10 分

若$t>1$，即$P(X=k)>P(X=k-1)$，即$\frac{63-3k}{2k}-1=\frac{63-5k}{2k}>0$，解得$0<k<\frac{63}{5}$，

若$t<1$，即$P(X=k)>P(X=k-1)$，即$\frac{63-3k}{2k}-1=\frac{63-5k}{2k}<0$，解得$k<0$或$k>\frac{63}{5}$，

所以当$k=12$时，$P(X=k)$最大，故k的值为12 ……………………………………………… 13 分

16.【解析】证明：（1）如图，连接 EC,取 AB 中点，连接 DE,DF,

因为 $BC=2$,所以 $DF=1$ ………………………………………………………………… 1 分

因为 D,E 为 AB, A_1B_1 的中点，且 $AA_1=2$,所以 $DE=2$, ……………………………… 2 分

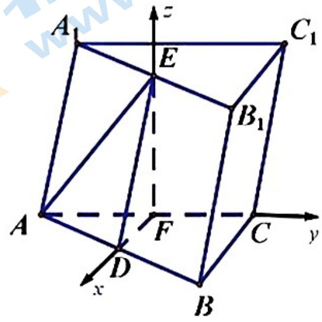
所以 $DE^2=EF^2+DF^2$,所以 $DF\perp EF$,…………………………………3 分

又因为 $DF//BC$,所以 $BC\perp EF$ ，

又因为 $AC\perp BC$ ，且 $AC\cap EF=F$ ，

所以 $BC\perp$ 平面AEF ，…………………………………………………4 分

因为 $AE\subset$ 平面AEF ,所以 $AE\perp BC$ ……………………………………6 分



（2）因为 $AE=2$，在 ΔAEF 中，$AE^2=EF^2+AF^2$,所以 $EF\perp AC$

以 F 为坐标原点，以 FD,FC,FE 分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，

$A(0,-1,0)$, $B(2,1,0)$, $C(0,1,0)$, $E(0,0,\sqrt{3})$, $D(1,0,0)$ ， ……………………8 分

所以 $\overrightarrow{AC}=(0,2,0)$ ，$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{DE}=(-1,0,\sqrt{3})$ ，$\overrightarrow{AB}=(2,2,0)$ ，

设平面 ACC_1A_1 与平面 BAA_1B_1 的一个法向量分别为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$ ，$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$ ，

则 $\begin{cases}2y_1=0,\\-x_1+\sqrt{3}z_1=0,\end{cases}$ 令 $z_1=1$ ，解得 $x_1=\sqrt{3}$ ，故 $\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{3},0,1)$ ， ……………………………… 10 分

$\begin{cases}-x_2+\sqrt{3}z_2=0,\\2x_2+2y_2=0,\end{cases}$ 令 $z_2=1$ ，解得 $x_2=\sqrt{3}$ ， $y_2=-\sqrt{3}$ ，故 $n_2=(\sqrt{3},-\sqrt{3},1)$ ， ………………… 12 分

设二面角 $C-AA_1-B$ 的平面角为 θ ，则 $|\cos\theta|=\dfrac{|n_1\cdot n_2|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{4}{\sqrt{4}\times\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$ ，

所以 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$,所以二面角 $C-AA_1-B$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. …………………………………… 15 分

17.【解析】（1）由已知得 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{5}$ ， $c^2=a^2+b^2$ ，所以 $b=2a$ 。

又点 $P(3,4)$ 在 C 上，故 $\dfrac{9}{a^2}-\dfrac{16}{4a^2}=1$ …………………………………………………………… 4 分

解得 $a^2=5,b^2=20$ ，所以双曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{20}=1$ …………………………………… 6 分

（2）当 l 斜率不存在时，显然不满足条件.

当 l 斜率存在时，设其方程为 $y=kx+m$ ，与方程联立 C 联立得：$\left(4-k^2\right)x^2-2kmx-m^2-20=0$ ，

由已知得 $k^2\neq 4$ ，且 $\Delta=4k^2m^2+4\left(4-k^2\right)\left(m^2+20\right)=16\left(m^2-5k^2+20\right)>0$ ，

设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$ ，则 $x_1+x_2=\dfrac{2km}{4-k^2}$ ， $x_1x_2=-\dfrac{m^2+20}{4-k^2}$ ………………………… 8 分

直线 PA,PB 的斜率分别为 $k_1=\dfrac{y_1-4}{x_1-3}=\dfrac{kx_1+m-4}{x_1-3}$，$k_2=\dfrac{kx_2+m-4}{x_2-3}$

由已知 $k_1k_2=1$，故 $(kx_1+m-4)(kx_2+m-4)=(x_1-3)(x_2-3)$

即 $(k^2-1)x_1x_2+(km-4k-3)(x_1+x_2)+m^2-8m+7=0$ ………………………………… 10 分

所以 $-(k^2-1)(m^2+20)+2km(km-4k-3)+(4-k^2)(m^2-8m+7)=0$

化简得：$(m+3k-4)(5m-9k-12)=0$，又已知 l 不过点 $P(3,4)$，故 $m+3k-4\neq 0$

所以 $5m-9k-12=0$，即 $m=\dfrac{9}{5}k+\dfrac{12}{5}$ ………………………………………………… 12 分

故直线 l 的方程为 $y=k\left(x+\dfrac{9}{5}\right)+\dfrac{12}{5}$，所以直线 l 过定点 $\left(-\dfrac{9}{5},\dfrac{12}{5}\right)$ ……………………… 15 分

18.【解析】(1) 设直线 $l:y=x$ 与曲线 $y=f(x)$ 的切点坐标为 $(x_0,\ln(x_0+a))$

$f'(x)=\dfrac{1}{x+a}$，切线的斜率为 $f'(x_0)=\dfrac{1}{x_0+a}$，切线方程为：$y-\ln(x_0+a)=\dfrac{1}{x_0+a}(x-x_0)$，

即 $y=\dfrac{1}{x_0+a}x+\ln(x_0+a)-\dfrac{x_0}{x_0+a}$ ……………………………………………………… 4 分

由已知得 $x_0+a=1$ 且 $\ln(x_0+a)-\dfrac{x_0}{x_0+a}=0$，解得 $x_0=0,a=1$，故实数 $a=1$ ………… 6 分

(2) 由 (1) 知 $F(x)=\dfrac{me^x}{x+1}+\ln(x+1)-x$，$x\in(-1,+\infty)$

$F'(x)=\dfrac{mxe^x}{(x+1)^2}-\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{x(me^x-x-1)}{(x+1)^2}$，$x\in(-1,+\infty)$ ………………………… 8 分

当 $m\le 0$ 时，$x\in(-1,0),F'(x)>0$，$x\in(0,+\infty),F'(x)<0$，

此时 $F(x)$ 只有一个极大值点，不符合题意.

当 $m\ge 1$ 时，$me^x-x-1\ge e^x-(x+1)\ge 0$，当且仅当 $m=1,x=0$ 时取等号。

$x\in(-1,0),F'(x)<0$，$x\in(0,+\infty),F'(x)>0$，

此时 $F(x)$ 只有一个极小值点，不符合题意。 ……………………………………………… 10 分

当 $0<m<1$ 时，令 $g(x)=me^x-x-1$，$x\in(-1,+\infty)$，$g'(x)=me^x-1$

$x\in(-1,-\ln m),g'(x)<0$ ， $x\in(-\ln m,+\infty),g'(x)>0$，

$g(x)\min=g(-\ln m)=\ln m<0$， ·· 13 分

$g(-1)=me^{-1}>0$， $g(0)=m-1<0$， $x\to+\infty,g(x)\to+\infty$ ，

所以存在 x_1,x_2 ， $-1<x_1<0<-\ln m<x_2$，使得 $g(x_1)=g(x_2)=0$

故 $x\in(-1,x_1)$， $F'(x)<0$ ； $x\in(x_1,0)$， $F'(x)>0$；

$x\in(0,x_2)$， $F'(x)<0$； $x\in(x_2,+\infty)$， $F'(x)>0$.

所以函数 $F(x)$ 有三个极值点 $x_1,x_2,x_3=0$.

综上，实数 m 的取值范围为 $(0,1)$ ·· 17 分

19.【解析】(1) d1＝2，d2＝2，d3＝2，d4＝4. ·· 4 分

(2) 证明：不妨设 $\{a_n\}$ 的周期为 T（T∈N*），

记 $A_T=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_T\},B_T=\min\{a_{T+1},a_{T+2},\cdots\}$,则当 $n>T$ 时， $d_n=A_T-B_T$ 是常数,

即 $\exists n_0=T$，使得当 $n>n_0$ 时， d_n 是常数，结论正确. ·· 10 分

(3) 证明 充分性：

若{an}为公差为 d 的等差数列，则 an＝a1＋(n－1)d.

于是 An＝an＝a1＋(n－1)d，Bn＝an＋1＝a1＋nd.

因此 dn＝An－Bn＝－d(n＝1,2,3，…). ·· 13 分

必要性：因为 dn＝－d≤0，∴An＝Bn＋dn≤Bn

∵an≤An，an＋1≥Bn

∴an≤an＋1，于是 An＝an，Bn＝an＋1.

因此 an＋1－an＝Bn－An＝－dn＝d.

故数列{an}是公差为 d 的等差数列. ·· 17 分