2021 北京师大二附中高三（上）10 月月考

数　　学

一、选择题（共 10 小题；共 40 分）

1.（3 分）设集合 $M=\{x|0<x\leq 3\}$，$N=\{x|0<x\leq 2\}$，那么"$a\in M$"是"$a\in N$"的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

2.（3 分）若 $\log_3 b\cdot\log_5 3=3$，则 $b=$（　　）

A．6　　B．5　　C．3^5　　D．5^3

3.（3 分）已知 x，$y\in R$，且 $x>y>0$，则（　　）

A．$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}>0$　　B．$\cos x-\cos y<0$

C．$\left(\frac{1}{2}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^y<0$　　D．$\ln(x-y)>0$

4.（3 分）已知 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x-2$，那么不等式 $f(x)<\frac{1}{2}$ 的解集是（　　）

A．$\{x|0<x<\frac{5}{2}\}$　　B．$\{x|-\frac{3}{2}<x<0\}$

C．$\{x|-\frac{3}{2}<x<0$ 或 $0<x<\frac{5}{2}\}$　　D．$\{x|x<-\frac{3}{2}$ 或 $0\leq x<\frac{5}{2}\}$

5.（3 分）已知 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$2\sin2\alpha=\cos2\alpha+1$，则 $\sin\alpha=$（　　）

A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

6.（3 分）若函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}+a$ 在区间（1，e）（其中 $e=2.71828\ldots$）上存在零点，则常数 a 的取值范围（　　）

A．$0<a<1$　　B．$\frac{1}{e}<a<1$　　C．$\frac{1}{e}-1<a<1$　　D．$\frac{1}{e}+1<a<1$

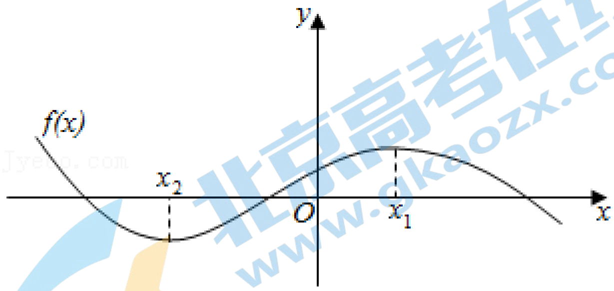
7.（3 分）函数 $f(x)=x+\frac{1}{ax}$ 在（$-\infty$，-1）上单调递增，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$[1,+\infty)$　　B．$(-\infty,0)\cup(0,1]$

C．$(0,1]$　　D．$(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$

8.（3 分）数列$\{a_n\}$前 n 项和为 S_n，已知 $a_1=\frac{1}{5}$，且对任意正整数 m，n，都有 $a_{m+n}=a_m\cdot a_n$，若 $S_n<a$ 恒成立，则实数 a 的最小值为（　　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{3}{4}$　　C．$\frac{4}{3}$　　D．4



9.（3 分）函数 $f(x)=ax^3-x^2+cx+d$ 的图象如图所示，则有（　　）

A．$a>0$，$c<0$，$d>0$　　　　B．$a<0$，$c<0$，$d>0$

C．$a<0$，$c>0$，$d>0$　　　　D．$a>0$，$c>0$，$d<0$

10.（3 分）已知函数 $f(x)=|lgx|$，$a>b$，$f(a)=f(b)$，且 $a^3+b^3>m$ 恒成立，那么 m 的最大值等于（　　）

A．8　　B．$2\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

二、填空题（共 5 小题；共 25 分）

11.（3 分）若集合 $A=\{x|-2<x<1\}$，$B=\{x|x\geq a\}$，且 $A\cup B=\{x|x>-2\}$，则实数 a 的取值范围是___________.

12.（3 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}-x+a, & x<1\\ 2^x, & x\geqslant 1\end{cases}$ 的最小值为 2，则实数 a 的取值范围是___________.

13.（3 分）记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n．若 $a_3=1$，$S_7=14$，则 $a_5=$_____.

14.（3 分）已知函数 $f(x)=ax^3-x^2+1$ 在（0，1）上有增区间，则 a 的取值范围是___________________.

15.（3 分）已知函数 $f(x)=ae^x-x^2$ 有两个极值点，则实数 a 的取值范围是___________________.

三、解答题（共 6 小题；共 85 分）

16．已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，且 $2a_1+3a_2=1$，$a_3^2=9a_2a_6$．

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=\log_3a_1+\log_3a_2+\ldots+\log_3a_n$，求 $\{b_n\}$ 的通项公式．

17．在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，已知 $b^2+c^2=a^2-bc$．

（1）求 A 的大小；

（2）如果 $\cos B=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$b=2$，求△$ABC$ 的面积．

18．函数 $f(x)=\frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}+2\sin x$．

（1）求函数 $f(x)$ 的定义域；

（2）求 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 的值；

（3）求函数 $f(x)$ 的最小正周期及其图象的所有对称轴的方程．

19．已知函数 $f(x)=(x^2-2x+a+2)e^x$，其中 e 是自然对数的底数，$a\in$R．

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）当 $x\in[0，4]$时，求函数 $f(x)$ 的最小值．

20．已知 $f(x)=\sin x$，$g(x)=\ln x$，$h(x)=x^2-ax-1$．

（1）若 $x\in[0，1]$，证明：$f(x)\geq g(x+1)$；

（2）对任意 $x\in(0，1]$ 都有 $e^{f(x)}+h(x)-g(x)>0$，求整数 a 的最大值．

21．已知 $\{a_n\}$ 是公差不等于 0 的等差数列，$\{b_n\}$ 是等比数列（$n\in N^+$），且 $a_1=b_1>0$．

（I）若 $a_3=b_3$，比较 a_2 与 b_2 的大小关系；

（II）若 $a_2=b_2$，$a_4=b_4$．

（i）判断 b_{10} 是否为数列 $\{a_n\}$ 中的某一项，并请说明理由；

（ii）若 b_m 是数列 $\{a_n\}$ 中的某一项，写出正整数 m 的集合（不必说明理由）．

2021 北京师大二附中高三（上）10 月月考数学

参考答案

一、选择题（共 10 小题：共 40 分）

1.【分析】由题意 $N\subseteq M$，由子集的定义可选．

【解答】解：设集合 $M=\{x|0<x\le 3\}$，$N=\{x|0<x\le 2\}$，$M\supseteq N$，

所以若"$a\in M$"推不出"$a\in N$"；

若"$a\in N$"，则"$a\in M$"，

所以"$a\in M$"是"$a\in N$"的必要而不充分条件，

故选：B．

【点评】本题考查充要条件的判断和集合包含关系之间的联系，属基本题．

2.【分析】由已知结合对数的换底公式及指数与对数的相互转化即可直接求解．

【解答】解：因为 $\log_3 b\cdot\log_5 3=\dfrac{\lg b}{\lg 3}\cdot\dfrac{\lg 3}{\lg 5}=\dfrac{\lg b}{\lg 5}=\log_5 b=3$，

则 $b=5^3$，

故选：D．

【点评】本题主要考查了对数的换底公式及指数与对数的互化，属于基础题．

3.【分析】由 x，$y\in R$，且 $x>y>0$，取 $x=2$，$y=1$，可排除 AD；取 $x=7$，$y=2$ 可排除 B．

【解答】解：由 x，$y\in R$，且 $x>y>0$，取 $x=2$，$y=1$，则 AD 不成立，

取 $x=7$，$y=2$，则 B 不成立．

故选：C．

【点评】本题考查了不等式的基本性质，属基础题．

4.【分析】由函数是奇函数和当 $x>0$ 时，$f(x)=x-2$，求出函数的解析式并用分段函数表示，在分三种情况求不等式 $f(x)<\dfrac{1}{2}$ 的解集，最后要把三种结果并在一起．

【解答】解：$\because y=f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，$\therefore f(0)=0$，

设 $x<0$，则 $-x>0$，$\because$ 当 $x>0$ 时，$f(x)=x-2$，$\therefore f(-x)=-x-2$，

$\because f(x)=-f(-x)$，$\therefore f(x)=x+2$，

$$\therefore f(x)=\begin{cases} x-2 & x>0 \\ 0 & x=0, \\ x+2 & x<0 \end{cases}$$

①当 $x>0$ 时，由 $x-2<\dfrac{1}{2}$，解得 $0<x<\dfrac{5}{2}$，

②当 $x=0$ 时，$0<\dfrac{1}{2}$，符合条件，

③当 $x<0$ 时，$x+2<\frac{1}{2}$，解得 $x<-\frac{3}{2}$，

综上，$f(x)<\frac{1}{2}$的解集是 $\{x|x<-\frac{3}{2}或0\leqslant x<\frac{5}{2}\}$.

故选：*D*.

【点评】本题的考点是奇函数性质的应用，考查了由奇函数求出解析式，再根据解析式对 x 分类求解不等式的解集，注意 $f(0)=0$ 这是易忽视的地方.

5.【分析】由二倍角的三角函数公式化简已知可得 $4\sin\alpha\cos\alpha=2\cos^2\alpha$，结合角的范围可求 $\sin\alpha>0$，$\cos\alpha>0$，可得 $\cos\alpha=2\sin\alpha$，根据同角三角函数基本关系式即可解得 $\sin\alpha$ 的值.

【解答】解：∵$2\sin2\alpha=\cos2\alpha+1$，

∴可得：$4\sin\alpha\cos\alpha=2\cos^2\alpha$，

∵$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\sin\alpha>0$，$\cos\alpha>0$，

∴$\cos\alpha=2\sin\alpha$，

∵$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+(2\sin\alpha)^2=5\sin^2\alpha=1$，

∴解得：$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

故选：*B*.

【点评】本题主要考查了二倍角的三角函数公式，同角三角函数基本关系式在三角函数化简求值中的应用，考查了转化思想，属于基础题.

6.【分析】判断函数的单调性，利用零点判断定理求解即可.

【解答】解：函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}+a$ 在区间（1，e）上为增函数，

∵$f(1)=\ln1-1+a<0$，$f(e)=\ln e-\frac{1}{e}+a>0$，

可得 $\frac{1}{e}-1<a<1$

故选：*C*.

【点评】本题考查函数与方程的应用，函数的零点的判断，是基础题.

7.【分析】求出函数的导数，由题意可得 $f'(x)\geq0$ 在 $(-\infty,-1)$ 上恒成立．运用参数分离可得 $\frac{1}{a}\leq x^2$ 在 $(-\infty,-1)$ 上恒成立．运用二次函数的最值，求出右边的范围即可得到.

【解答】解：函数 $f(x)=x+\frac{1}{ax}$ 的导数为 $f'(x)=1-\frac{1}{ax^2}$，

由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，

则 $f'(x)\geq0$ 在 $(-\infty,-1)$ 上恒成立.

即为$\frac{1}{a}\leq x^2$在（﹣∞，﹣1）上恒成立．

由于当$x<-1$时，$x^2>1$，

则有$\frac{1}{a}\leq 1$，解得，$a\geq 1$或$a<0$．

故选：D．

【点评】本题考查函数的单调性的运用，考查运用导数判断单调性，以及不等式恒成立问题转化为求函数最值或范围，属于基础题和易错题．

8．【分析】由$a_{m+n}=a_m\cdot a_n$，分别令m和n等于1和1或2和1，由a_1求出数列的各项，发现此数列是等比数列，利用等比数列的前n项和的公式表示出S_n，而$S_n<a$恒成立即n趋于正无穷时，求出S_n的极限小于等于a，求出极限列出关于a的不等式，即可得到a的最小值．

【解答】解：令$m=1$，$n=1$，得到$a_2=a_1^2=\frac{1}{25}$，同理令$m=2$，$n=1$，得到$a_3=a_2\cdot a_1=\frac{1}{5^3}$

所以此数列是首项为$\frac{1}{5}$公比，以$\frac{1}{5}$为公比的等比数列，

则$S_n=\frac{\frac{1}{5}(1-\frac{1}{5^n})}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1-\frac{1}{5^n}}{4}$

∵$S_n<a$恒成立

即$\lim\limits_{n\to\infty}S_n<a$而$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{5^n}+1}{4}=\frac{1}{4}$

$\therefore a\geq\frac{1}{4}$

则a的最小值为$\frac{1}{4}$

故选：A．

【点评】此题考查了等比数列关系的确定，掌握不等式恒成立时所满足的条件，灵活运用等比数列的前n项和的公式及会进行极限的运算，是一道综合题．

9．【分析】利用f（0）它可以判断d的范围，求函数的导数，利用极值点的符号关系，可以判断a，c的符号．

【解答】解：当$x=0$时，f（0）$=d>0$，

当$x\to+\infty$，f（x）<0，则$a<0$，

f'（x）$=3ax^2-2x+c$，

则f'（x）$=0$有两个不同的根，其中$x_2<0$，$x_1>0$，

则$x_1x_2<0$，即$\frac{c}{3a}<0$，则$c>0$，

即 $a<0$，$c>0$，$d>0$，

故选：C.

【点评】本题主要考查函数图象的识别和判断，利用 $f(0)$，函数的导数 $f'(x)$ 与极值点的关系是解决本题的关键，是基础题.

10.【分析】由对数函数的图像和性质，结合对数的运算性质可得 $ab=1$，$a>1$，由基本不等式可得 a^3+b^3 的范围，结合恒成立思想可得 m 的最大值.

【解答】解：由 $f(x)=|lgx|$，$a>b>0$，$f(a)=f(b)$，

可得 $|lga|=|lgb|$，即 $lga=-lgb$，

可得 $lga+lgb=0$，即 $ab=1$，$a>1$，

则 $a^3+b^3=a^3+\frac{1}{a^3}>2\sqrt{a^3\cdot\frac{1}{a^3}}=2$，

由 $a^3+b^3>m$ 恒成立，可得 $m\leq 2$，

即 m 的最大值为 2.

故选：D.

【点评】本题考查不等式恒成立问题解法，注意运用基本不等式，考查转化思想和运算能力、推理能力，属于中档题.

二、填空题（共 5 小题：共 25 分）

11.【分析】利用集合并集的定义进行分析求解即可.

【解答】解：因为集合 $A=\{x|-2<x<1\}$，$B=\{x|x\geq a\}$，且 $A\cup B=\{x|x>-2\}$，

所以 $-2<a\leq 1$.

故答案为：$-2<a\leq 1$.

【点评】本题考查了集合的运算，主要考查了集合并集的理解和应用，属于基础题.

12.【分析】由题意可得 $x=1$ 时，$f(x)$ 有最小值为 2，故有 $-1+a\geq 2$，由此求得实数 a 的取值范围.

【解答】解：∵函数 $f(x)=\begin{cases}-x+a, & x<1\\ 2^x, & x\geq 1\end{cases}$ 的最小值为 2，$f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是增函数，在 $(-\infty,1)$ 上是减函数，

可得 $x=1$ 时，$f(x)$ 有最小值为 2，故有 $-1+a\geq 2$，$a\geq 3$，

故答案为 $[3,+\infty)$.

【点评】本题主要考查函数的单调性的应用，属于中档题.

13.【分析】由等差数列的性质可得：$a_3+a_5=a_1+a_7$. 再利用求和公式即可得出.

【解答】解：由等差数列的性质可得：$a_3+a_5=a_1+a_7$.

$\therefore S_7=14=7\times\frac{1}{2}\times(a_1+a_7)=\frac{7}{2}(1+a_5)$，

解得：$a_5=3$，

故答案为：3．

【点评】本题考查了等差数列的通项公式求和公式及其性质，考查了推理能力与计算能力，属于基础题．

14．【分析】求出函数的导数，利用导函数在（0，1）上有极值点，导函数有零点，或导函数非负，求解 a 的范围即可．

【解答】解：函数 $f(x)=ax^3-x^2+1$．

可得 $f'(x)=3ax^2-2x$．

函数 $f(x)=ax^3-x^2+1$ 在（0，1）上有增区间，可知导函数在（0，1）上有极值点，

导函数在（0，1）上有解，或 $a=0$ 时，$3ax^2-2x\geq0$ 恒成立（显然不成立）．

可得 $\frac{2}{3a}\in(0,1)$，解得：$a>\frac{2}{3}$，

故答案为：$(\frac{2}{3},+\infty)$．

【点评】本题考查函数的导数的应用，函数的极值以及单调区间的求法，考查计算能力．

15．【分析】求出函数的导数，问题转化为 $y=a$ 和 $g(x)=\frac{2x}{e^x}$ 在 R 上有 2 个交点，根据函数的单调性求出 $g(x)$ 的范围，从而求出 a 的范围即可．

【解答】解：$f'(x)=ae^x-2x$，

若函数 $f(x)=ae^x-x^2$ 有两个极值点，

则 $y=a$ 和 $g(x)=\frac{2x}{e^x}$ 在 R 上有 2 个交点，

$g'(x)=\frac{2-2x}{e^x}$，

$x\in(-\infty,1)$ 时，即 $g'(x)>0$，$g(x)$ 递增，

$x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 递减，

故 $g(x)_{max}=g(1)=\frac{2}{e}$，

而 $\frac{2x}{e^x}>0$ 恒成立，所以 $0<a<\frac{2}{e}$，

故答案为：$(0,\frac{2}{e})$．

【点评】本题考查了函数的单调性、最值问题，考查导数的应用以及转化思想，是一道中档题．

三、解答题（共 6 小题；共 85 分）

16.【分析】（Ⅰ）设出等比数列的公比 q，由 $a_3^2=9a_2a_6$，利用等比数列的通项公式化简后得到关于 q 的方程，由已知等比数列的各项都为正数，得到满足题意 q 的值，然后再根据等比数列的通项公式化简 $2a_1+3a_2=1$，把求出的 q 的值代入即可求出等比数列的首项，根据首项和求出的公比 q 写出数列的通项公式即可；

（Ⅱ）把（Ⅰ）求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式代入设 $bn=\log_3a_1+\log_3a_2+\ldots+\log_3a_n$，利用对数的运算性质及等差数列的前 n 项和的公式化简后，即可得到 b_n 的通项公式，求出倒数即为 $\frac{1}{b_n}$ 的通项公式，然后根据数列的通项公式列举出数列的各项，抵消后即可得到数列 $\{\frac{1}{b_n}\}$ 的前 n 项和.

【解答】解：（Ⅰ）设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由 $a_3^2=9a_2a_6$ 得 $a_3^2=9a_4^2$，所以 $q^2=\frac{1}{9}$.

由条件可知各项均为正数，故 $q=\frac{1}{3}$.

由 $2a_1+3a_2=1$ 得 $2a_1+3a_1q=1$，所以 $a_1=\frac{1}{3}$.

故数列 $\{a_n\}$ 的通项式为 $a_n=\frac{1}{3^n}$.

（Ⅱ）$b_n=\log_3a_1+\log_3a_2+\ldots+\log_3a_n=-1-2-\ldots-n=-\frac{n(n+1)}{2}$.

【点评】此题考查学生灵活运用等比数列的通项公式化简求值，掌握对数的运算性质及等差数列的前 n 项和的公式，会进行数列的求和运算，是一道中档题.

17.【分析】（1）利用余弦定理表示出 $\cos A$，将已知等式变形后代入求出 $\cos A$ 的值，即可确定出 A 的度数；

（2）由 $\cos B$ 的值，求出 $\sin B$ 的值，再由 $\sin A$，b 的值，利用正弦定理求出 a 的值，将 a 与 b 代入已知等式求出 c 的值，利用三角形面积公式即可求出三角形 ABC 面积.

【解答】解：（1）$\because b^2+c^2=a^2-bc$，即 $b^2+c^2-a^2=-bc$，

$\therefore \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{1}{2}$，

又 $\because A\in(0,\pi)$，

$\therefore A=\frac{2\pi}{3}$；

（2）$\because \cos B=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$B\in(0,\pi)$，

$\therefore \sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得 $a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=3$，

$\because b^2+c^2=a^2-bc$，

$\therefore c^2+2c-5=0$，

解得：$c=-1\pm\sqrt{6}$，

$\because c>0$，

$\therefore c=\sqrt{6}-1$，

则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$.

【点评】此题考查了正弦、余弦定理，三角形的面积公式，熟练掌握定理及公式是解本题的关键.

18.【分析】(1) 由 $\sin x+\cos x\neq 0$，解出 x，即可；

(2) 根据特殊角的三角函数值，可得解；

(3) 结合二倍角公式和辅助角公式，将函数化简为 $f(x)=\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$，再根据正弦函数的周期性和对称性，得解.

【解答】解：(1) $\because \sin x+\cos x\neq 0$，$\therefore \sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})\neq 0$，

$\therefore x+\dfrac{\pi}{4}\neq k\pi$，$k\in Z$，即 $x\neq k\pi-\dfrac{\pi}{4}$，$k\in Z$，

$\therefore$函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq k\pi-\dfrac{\pi}{4}，k\in Z\}$.

(2) $f(\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}}+2\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{0}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

(3) $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}+2\sin x=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x+\cos x}+2\sin x=\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$，

$\therefore$最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{1}=2\pi$，

令 $x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in Z$，则 $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$，$k\in Z$，

$\therefore$对称轴的方程为 $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$，$k\in Z$.

【点评】本题考查三角恒等变换与三角函数的综合，熟练掌握二倍角公式、辅助角公式，以及正弦函数的图象与性质是解题的关键，考查逻辑推理能力和运算能力，属于基础题.

19.【分析】(1) 对 $f(x)$ 求导，然后对 a 分类讨论，由导数与函数单调性的关系即可求解；

(2) 由 (1) 中结论，对 a 分类讨论即可求解 $f(x)$ 的最小值.

【解答】解；(1) 因为 $f'(x)=(x^2+a)e^x$，

当 $a\geq 0$ 时，$f'(x)\geq 0$ 恒成立，故 $f(x)$ 在 $(-\infty，+\infty)$ 上单调递增；

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)>0$，可得 $x<-\sqrt{-a}$ 或 $x>\sqrt{-a}$，令 $f'(x)<0$，可得 $-\sqrt{-a}<x<\sqrt{-a}$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty，-\sqrt{-a})$，$(\sqrt{-a}，+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\sqrt{-a}，\sqrt{-a})$ 上单调递减.

（2）由（1）可知，当 $a\geq0$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $f(0)=a+2$；

当 $\sqrt{-a}>4$，即 $a<-16$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $f(4)=(a+10)e^4$；

当 $\sqrt{-a}\leq4$，即 $-16\leq a<0$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $f(\sqrt{-a})=(2-2\sqrt{-a})e^{\sqrt{-a}}$.

【点评】本题主要考查利用导数研究函数的单调性与最值，考查分类讨论思想与运算求解能力，属于中档题.

20.【分析】(1) 设 $F(x)=\sin x-ln(x+1)$，$(0\leq x\leq1)$，求导得 $F'(x)=\cos x-\frac{1}{x+1}$. 且 $F'(0)=0$，再求 $F''(x)$，得 $F''(x)$ 在$[0,1]$单调递减，所以 $F''(x)\geq F''(1)<0$，$F''(x)<F''(0)$，$F''(0)=1>0$，所以存在唯一零点 $x_0\in(0,1)$，使得 $F''(x_0)=0$，得 $F'(x)$ 在 $(0,x_0)$ 时单调递增，在 $(x_0,1)$ 上单调递减，$F'(1)=0$，$F'(0)=0$，进而 $F'(x)>0$ 在 $(0,1)$ 上恒成立，所以 $F(x)$ 在$[0,1]$上单调递增，所以 $F(x)\geq F(0)=0$，即 $F(x)\geq0$，即可得证.

（2）根据题意得对任意的 $x\in(0,1]$，不等式 $e^{\sin x}+x^2-ax-1-lnx>0$ 恒成立，令 $x=1$，则 $e^{\sin1}>a$，由（1）知 $\sin1>ln2$，所以 $2=e^{ln2}<e^{\sin1}<e^1<3$，由于 a 为整数，所以 $a\leq2$，得 $e^{\sin x}+x^2-ax-1-lnx>e^{\sin x}+x^2-2x-1-lnx$，接下来证明 $H(x)=e^{\sin x}+x^2-2x-1-lnx>0$，在区间 $(0,1]$恒成立，即可得整数 a 的最大值为 2.

【解答】解：(1) 设 $F(x)=\sin x-ln(x+1)$，$(0\leq x<1)$

则 $F'(x)=\cos x-\frac{1}{x+1}$.

注意到 $F'(0)=0$，因为 $x\in[0,1]$，

因为 $F''(x)=\frac{1}{(x+1)^2}-\sin x$，

则 $F''(x)$ 在$[0,1]$单调递减，所以 $F''(x)\geq F''(1)=\frac{1}{4}-\sin1<0$，$F''(x)<F''(0)$，$F''(0)=1>0$，

所以存在唯一零点 $x_0\in(0,1)$，使得 $F''(x_0)=0$

则 $F'(x)$ 在 $(0,x_0)$ 时单调递增，在 $(x_0,1)$ 上单调递减，

又 $F'(1)=-\frac{1}{2}+\cos1>-\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{3}=0$，$F'(0)=0$，

所以 $F'(x)>0$ 在 $(0,1)$ 上恒成立，所以 $F(x)$ 在$[0,1]$上单调递增，

则 $F(x)\geq F(0)=0$，即 $F(x)\geq0$，

所以 $f(x)\geq g(x+1)$.

（2）因为对任意的 $x\in(0,1]$，不等式 $e^{f(x)}+h(x)-g(x)>0$，

即 $e^{\sin x}+x^2-ax-1-lnx>0$ 恒成立，

令 $x=1$，则 $e^{\sin1}>a$，

由（1）知 $\sin1>ln2$，所以 $2=e^{ln2}<e^{\sin1}<e^1<3$，

由于 a 为 $e^{\sin x}+x^2-ax-1-lnx>0$ 整数，则 $a\leq2$，

因此 $e^{\sin x}+x^2-ax-1-lnx>e^{\sin x}+x^2-2x-1-lnx$，

下面证明 $H(x)=e^{\sin x}+x^2-2x-1-\ln x>0$，在区间（0，1]恒成立，

由（1）知 $\sin x>\ln(x+1)$，则 $e^{\sin x}>x+1$，

故 $H(x)>x+1+x^2-2x-1-\ln x=x^2-x-\ln x$，

设 $G(x)=x^2-x-\ln x$，$x\in(0，1]$，

则 $G'(x)=2x-1-\frac{1}{x}=\frac{(2x+1)(x-1)}{x}\le 0$，

所以 $G(x)$ 在（0，1]上单调递减，

所以 $G(x)\ge G(1)=0$，所以 $H(x)>0$，在（0.1]上恒成立，

综上所述，整数 a 的最大值为 2.

【点评】本题考查导数的综合应用，参数的取值范围，属于中档题.

21.【分析】(I) 先分别表示出 a_2 与 b_2，再分类讨论，利用平均值不等式，即可比较 a_2 与 b_2 的大小关系；

(II) (i) 由 $a_2=b_2$，$a_4=b_4$，利用等差数列、等比数列的通项得 $q^3-1=3(q-1)$，可得 $q=-2$，令 $a_k=b_{10}$，即 $a_1+(k-1)d=b_1q^9$，即可判断 b_{10} 是否为数列$\{a_n\}$中的某一项；

(ii) 假设 $b_m=a_k$，则 $4-3k=(-2)^{m-1}$，从而可写出正整数 m 的集合.

【解答】解：记$\{a_n\}$的 $a_1=b_1=a$，$\{a_n\}$公差为 d，$\{b_n\}$公比为 q，由 $d\neq 0$，得 $q\neq 1$

(I) $\because a_1=b_1>0$，$a_3=b_3$，

$\therefore a_2=\frac{a_1+a_3}{2}=\frac{b_1+b_3}{2}$，

$\because b_3=b_1q^2>0$，$b_2^2=b_1b_3$，

$\therefore b_2=\pm\sqrt{b_1b_3}$，

当 $b_2=-\sqrt{b_1b_3}$ 时，显然 $a_2>b_2$；

当 $b_2=\sqrt{b_1b_3}$ 时，由平均值不等式 $\frac{b_1+b_3}{2}\geqslant\sqrt{b_1b_3}$，当且仅当 $b_1=b_3$ 时取等号，

而 $b_1\neq b_3$，所以 $\frac{b_1+b_3}{2}>\sqrt{b_1b_3}$ 即 $a_2>b_2$.

综上所述，$a_2>b_2$. …（5 分）

(II) (i) 因为 $a_2=b_2$，$a_4=b_4$，所以 $a+d=aq$，$a+3d=aq^3$，得 $q^3-1=3(q-1)$，

所以 $q^2+q+1=3$，$q=1$ 或 $q=-2$.

因为 $q\neq 1$，所以 $q=-2$，$d=a(q-1)=-3a$.

令 $a_k=b_{10}$，即 $a_1+(k-1)d=b_1q^9$，

所以 $a-3(k-1)a=a(-2)^9$，

所以 $k=172$，所以 b_{10} 是 $\{a_n\}$ 中的一项．

（ii）假设 $b_m=a_k$，则 $a_1+(k-1)d=b_1q^{m-1}$，

$\therefore a-3(k-1)a=a(-2)^{m-1}$，

$\therefore 4-3k=(-2)^{m-1}$，

当 $m=1$ 或 $m=2n$，（$n\in N^*$）时，$k\in N^*$．

∴正整数 m 的集合是 $\{m|m=1$ 或 $m=2n$，$n\in N^*\}$．…（13 分）

【点评】本题考查等差数列与等比数列的综合，考查大小比较，考查学生分析解决问题的能力，有难度．

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。