安徽省2023届高三第一次教学质量检测

数学试题

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集 $U=\{-2,-1,0,1,2\}$，集合 $A=\{x|x^2=4\}$，$B=\{x|x^2+x-2=0\}$，则 $\complement_U(A\cup B)=$

A. $\{-2,-1,1,2\}$　　B. $\{-2,-1,0\}$

C. $\{-1,0\}$　　D. $\{0\}$

2. 若复数 z 满足 $(2+2i)z=4$，则 $\bar{z}=$

A. $1+i$　　B. $1-i$

C. $2+i$　　D. $2-i$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为单位向量，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})=$

A. 2　　B. -2　　C. 4　　D. -4

4. 学校组织班级知识竞赛，某班的8名学生的成绩（单位：分）分别是：68、63、77、76、82、88、92、93，则这8名学生成绩的75%分位数是

A. 88分　　B. 89分　　C. 90分　　D. 92分

5. 已知实数 $a>b>c$，$abc\neq 0$，则下列结论一定正确的是

A. $\frac{a}{b}>\frac{a}{c}$　　B. $ab>bc$

C. $\frac{1}{a}<\frac{1}{c}$　　D. $ab+bc>ac+b^2$

6. 已知函数 $f(x)=\log_a(x^2-ax+a)$，若 $\exists x_0\in\mathbf{R}$，使得 $f(x)\geqslant f(x_0)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是

A. $1<a<4$　　B. $0<a<4,a\neq 1$

C. $0<a<1$　　D. $a\geqslant 4$

7. 将函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到 $g(x)$ 的图象，若 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称，则 $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=$

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. 0　　D. $\frac{1}{2}$

8. 已知直线 $l:mx+y-3m-2=0$ 与圆 $M:(x-5)^2+(y-4)^2=25$ 交于 A,B 两点，则当弦 AB 最短时，圆 M 与圆 $N:(x+2m)^2+y^2=9$ 的位置关系是

A. 内切　　B. 外离

C. 外切　　D. 相交

9.《孙子算经》是中国古代重要的数学著作，上面记载了一道有名的"孙子问题"，后来南宋数学家秦九韶在《算书九章·大衍求一术》中将此问题系统解决."大衍求一术"属现代数论中的一次同余式组问题，后传入西方，被称为"中国剩余定理". 现有一道同余式组问题：将正整数中，被 4 除余 1 且被 6 除余 3 的数，按由小到大的顺序排成一列数 $\{a_n\}$，记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_{10}=$

A. 495　　B. 522

C. 630　　D. 730

10. 已知等边△ABC 的顶点都在球 O 的表面上，若 $AB=\sqrt{3}$，直线 OA 和平面 ABC 所成角的正切值为 $\sqrt{2}$，则球 O 的表面积为

A. 8π　　B. 12π　　C. 16π　　D. 20π

11. 已知抛物线 $C:x^2=12y$ 的焦点为 F，其准线与 y 轴的交点为 A，点 B 为抛物线 C 上一动点，当 $\frac{|AB|}{|FB|}$ 取得最大值时，直线 AB 的倾斜角为

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$

12. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f\left(x-\frac{3}{2}\right)-f\left(-x-\frac{3}{2}\right)=0$，$f(2\ 022)=\frac{1}{e}$，若 $f(x)>f'(-x)$，则不等式 $f(x+2)>\frac{1}{e^x}$ 的解集为

A. $(1,+\infty)$　　B. $(-\infty,1)$

C. $(-\infty,3)$　　D. $(3,+\infty)$

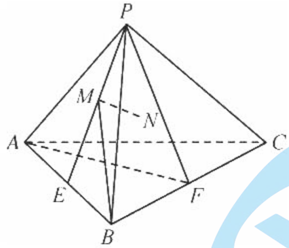
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若角 α 的终边在第四象限，且 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，则 $\tan\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)=$________.

14. 已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9}=1(a>0)$ 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，则双曲线 E 的焦距等于________.

15. 现有 5 名同学站成一排拍照毕业留念，在"甲不站最左边，乙不站最右边"的前提下，丙站最左边的概率为________.

16. 如图，在侧棱长为$\sqrt{2}$，底面边长为 2 的正三棱锥 $P-ABC$ 中，E,F 分别为 AB,BC 的中点，M,N 分别为 PE 和平面 PAF 上的动点，则 $BM+MN$ 的最小值为________.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

在$\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$\cos A\sin B=(2-\cos B)\sin A$.

（1）求 A 的最大值；

（2）若 $\cos B=\frac{1}{4}$，$\triangle ABC$ 的周长为 10，求 b.

18.（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}-a_n=-2$（$n\geqslant 2$，且 $n\in\mathbf{N}^*$），且 $a_2=4$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

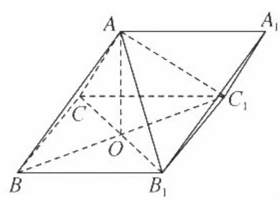
（2）设数列$\left\{\frac{2^n}{(a_n-1)(a_{n+1}-1)}\right\}$的前 n 项和为 T_n，求证：$\frac{2}{3}\leqslant T_n<1$.

19.（本小题满分 12 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BC=BB_1$，$BC_1\cap B_1C=O$，$AO\perp$平面 BB_1C_1C.

（1）求证：$AB\perp B_1C$；

（2）若$\angle B_1BC=60^\circ$，直线 AB 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 30°，求二面角 $A_1-B_1C_1-A$ 的正弦值.



20.（本小题满分 12 分）

国庆节期间，某大型服装团购会举办了一次“你消费我促销”活动，顾客消费满 300 元（含 300 元）可抽奖一次，抽奖方案有两种（顾客只能选择其中的一种）.

方案一：从装有 5 个形状、大小完全相同的小球（其中红球 1 个，黑球 4 个）的抽奖盒中，有放回地摸出 3 个球，每摸出 1 次红球，立减 100 元.

方案二：从装有 10 个形状，大小完全相同的小球（其中红球 2 个，白球 1 个，黑球 7 个）的抽奖盒中，不放回地摸出 3 个球，中奖规则为：若摸出 2 个红球，1 个白球，享受免单优惠；若摸出 2 个红球和 1 个黑球则打 5 折；若摸出 1 个红球，1 个白球和 1 个黑球，则打 7.5 折；其余情况不打折.

（1）某顾客恰好消费 300 元，选择抽奖方案一，求他实付金额的分布列和期望；

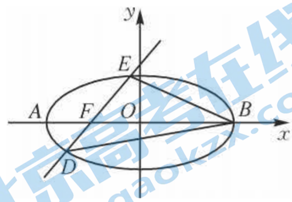
（2）若顾客消费 500 元，试从实付金额的期望值分析顾客选择何种抽奖方案更合理？

21.（本小题满分 12 分）

如图，已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别是 A,B，且经过点 $\left(1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，直线 $l:x=ty-1$ 恒过定点 F 且交椭圆于 D,E 两点，F 为 OA 的中点.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）记△BDE 的面积为 S，求 S 的最大值.



22.（本小题满分 12 分）

设函数 $f(x)=\ln(x+1)-a^2e^x, a\in\mathbf{R}$.

（1）若 $a=-1$，求函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（2）若 $f(x)+a\leqslant 0$ 恒成立，求正数 a 的取值范围.

安徽省 2023 届高三第一次教学质量检测 · 数学试题
参考答案、提示及评分细则

1. C　因为 $A=\{x\mid x^2=4\}=\{-2,2\}$，$B=\{x\mid (x+2)(x-1)=0\}=\{1,-2\}$，所以 $A\cup B=\{-2,1,2\}$. 因为 $U=\{-2,-1,0,1,2\}$，所以 $\complement_U(A\cup B)=\{-1,0\}$. 故选 C.

2. A　因为 $(2+2i)z=4$，所以 $z=\dfrac{4}{2+2i}=\dfrac{2}{1+i}=\dfrac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-i$，$\bar{z}=1+i$. 故选 A.

3. B　因为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为单位向量，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{b}^2+7\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2-4=-2$. 故选 B.

4. C　8 名学生的成绩由小到大排列为 63、68、76、77、82、88、92、93，因为 $8\times75\%=6$，所以这 8 名学生成绩的 75%分位数是 $\dfrac{88+92}{2}=90$. 故选 C.

5. D　若 $a=1$，$b=-1$，$c=-2$，$\dfrac{a}{b}=-1<\dfrac{a}{c}=-\dfrac{1}{2}$，故选项 A 错误；若 $a=1$，$b=-2$，$c=-3$，$ab=-2<bc=6$，故选项 B 错误；若 $a=1$，$c=-1$，$\dfrac{1}{a}=1>\dfrac{1}{c}=-1$，故选项 C 错误；因为 $(ab+bc)-(ac+b^2)=(a-b)(b-c)>0$，所以 $ab+bc>ac+b^2$，故选项 D 正确. 故选 D.

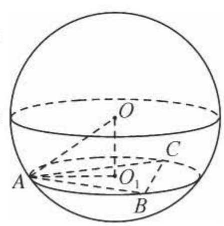
6. A　当 $a>1$ 时，若 $f(x)$ 有最小值，则 $t=x^2-ax+a$ 有最小正值，故 $\Delta<0$，即 $a^2-4a<0$，所以 $1<a<4$；当 $0<a<1$ 时，若 $f(x)$ 有最小值，则 $t=x^2-ax+a$ 有最大正值，与二次函数性质相互矛盾，舍去. 故选 A.

7. D　由题意得 $g(x)=\sin\left[2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\varphi\right]=\sin\left(2x+\varphi-\dfrac{\pi}{3}\right)$，因为 $g(x)=\sin\left(2x+\varphi-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 对称，所以 $2\times\dfrac{\pi}{3}+\varphi-\dfrac{\pi}{3}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，又 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $g(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，$g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$. 故选 D.

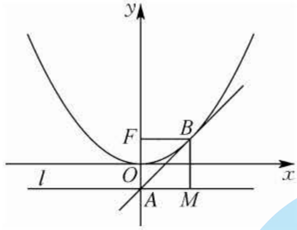
8. B　易知直线 $l:mx+y-3m-2=0$ 过定点 $P(3,2)$，当弦 AB 最短时直线 l 垂直于 PM，又 $k_{PM}=\dfrac{4-2}{5-3}=1$，所以 $1\cdot(-m)=-1$，解得 $m=1$，此时圆 N 的方程是 $(x+2)^2+y^2=9$. 两圆圆心之间的距离 $|MN|=\sqrt{(-2-5)^2+(0-4)^2}=\sqrt{65}$，又 $\sqrt{65}>5+3$，所以这两圆外离. 故选 B.

9. C　由题意可设 $a_n=4x+1=6y+3$，且 $x,y\in\mathbf{N}$，所以 $4(x+1)=6(y+1)$，令 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=k(k\in\mathbf{N})$，所以 $x=3k-1$，$y=2k-1$，所以 $a_k=12k-3$，则 $a_1=9$，$\{a_n\}$ 的公差 $d=12$，所以 $S_{10}=10\times9+\dfrac{10\times9}{2}\times12=630$. 故选 C.

10. B　如图，设 O_1 是 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心，由正弦定理有：$AO_1=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$，因为直线 OA 和平面 ABC 所成角的正切值为 $\sqrt{2}$，所以 $\dfrac{OO_1}{AO_1}=\sqrt{2}$，解得 $OO_1=\sqrt{2}$，设球 O 的半径 R，则 $R=\sqrt{1+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$，所以球 O 的表面积为 12π. 故选 B.



11. D　抛物线 C 的准线为 $l: y=-3$，焦点为 $F(0,3)$，易知点 $A(0,-3)$，过点 B 作 $BM\perp l$，垂足为 M，



由抛物线的定义可得 $|BM|=|BF|$，易知 $BM // y$ 轴，则 $\angle BAF=\angle ABM$，所以 $\dfrac{|BF|}{|AB|}=\dfrac{|BM|}{|AB|}=\cos\angle ABM=\cos\angle BAF$，当 $\dfrac{|AB|}{|FB|}$ 取得最大值时，$\cos\angle BAF$ 取最小值，此时 $\angle BAF$ 最大，则直线 AB 与抛物线 C 相切，由图可知，直线 AB 的斜率存在，设直线 AB 的方程为 $y=kx-3$，联立 $\begin{cases}x^2=12y,\\ y=kx-3,\end{cases}$ 可得 $x^2-12kx+36=0$，则 $\Delta=144k^2-144=0$，解得 $k=\pm1$，因此，直线 AB 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\dfrac{3\pi}{4}$. 故选 D.

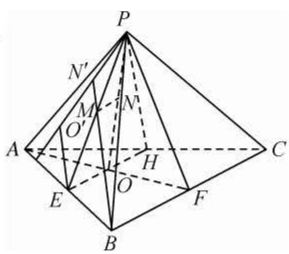
12. A　因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f\left(x-\dfrac{3}{2}\right)-f\left(-x-\dfrac{3}{2}\right)=0$，故 $f\left(x-\dfrac{3}{2}\right)-f\left(x+\dfrac{3}{2}\right)=0$，即 $f\left(x-\dfrac{3}{2}\right)=f\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$，即 $f(x)$ 的周期为 3. 又 $f(2\,022)=\dfrac{1}{e}$，故 $e^3f(3\times673+3)=e^2$，即 $e^3f(3)=e^2$. 因为 $f(x)>f'(-x)=-f'(x)$，即 $f(x)+f'(x)>0$，故构造函数 $g(x)=e^xf(x)$，则 $g'(x)=e^x[f(x)+f'(x)]>0$，所以 $g(x)=e^xf(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，且 $g(3)=e^2$. 又 $f(x+2)>\dfrac{1}{e^x}$，即 $\dfrac{g(x+2)}{e^{x+2}}>\dfrac{1}{e^x}$，$g(x+2)>e^2=g(3)$，所以 $x+2>3$，解得 $x>1$. 故选 A.

13. 7　因为角 α 的终边在第四象限，且 $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，所以 $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$，$\tan\alpha=-\dfrac{3}{4}$，所以 $\tan\left(\dfrac{5\pi}{4}-\alpha\right)=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\dfrac{\pi}{4}\times\tan\alpha}=\dfrac{1-\left(-\dfrac{3}{4}\right)}{1+1\times\left(-\dfrac{3}{4}\right)}=7.$

14. $4\sqrt{3}$　因为双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9}=1(a>0)$ 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，所以 $\dfrac{9}{a^2}=(\sqrt{3})^2$，即 $a^2=3$，所以 $c^2=a^2+9=12$，解得 $c=2\sqrt{3}$，$2c=4\sqrt{3}$，所以 E 的焦距等于 $4\sqrt{3}$.

15. $\dfrac{3}{13}$　记事件 A：甲不站最左边，乙不站最右边；事件 B：丙站最左边，则 $P(A)=\dfrac{C_3^1C_3^1A_3^3+A_4^4}{A_5^5}=\dfrac{78}{120}=\dfrac{13}{20}$，$P(AB)=\dfrac{C_3^1A_3^3}{A_5^5}=\dfrac{18}{120}=\dfrac{3}{20}$，所以 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\frac{3}{20}}{\frac{13}{20}}=\dfrac{3}{13}$.

16. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$　取 AC 中点 H，连接 EH 交 AF 于点 O，易证 $EO\perp$ 平面 PAF，要使 $BM+MN$ 最小，即 M 到点 B 以及 M 到直线 PO 的距离之和最小，可知 $MN\perp$ 平面 PAF，又可证明 $MN // EO$，再把平面 POE 绕 PE 旋转，与平面 PAB 共面，将 PO 旋转到 PO' 的位置，如图所示，$MN'=MN$，$MN'\perp PO'$，所以当 B,M,N' 三点共线时 $BM+MN$ 最小，所以所求的最小值就是点 B 到直线 PO' 的距离. 又



可证得$\angle POE=90°$. 因为$EH=\frac{1}{2}BC=1$，$EO=\frac{1}{2}EH=\frac{1}{2}$，又因为$PA=PB=\sqrt{2}$，$AB=2$，所以$PA\perp PB$，

$PE=\frac{1}{2}AB=1$，所以$\sin\angle OPE=\frac{1}{2}$，即$\angle OPE=30°$，所以$\angle MPN'=30°$，所以$\angle BPN'=45°+30°=75°$，可

得$\sin 75°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，所以$(BM+MN)_{\min}=BN'=PB\cdot\sin 75°=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

17. 解：(1)由$\cos A\sin B=(2-\cos B)\sin A$，得$\cos A\sin B=2\sin A-\cos B\sin A$，

得$\sin A\cos B+\cos A\sin B=2\sin A$，

得$\sin(A+B)=2\sin A$， ………………………………………… 2分

得$\sin C=2\sin A$， ………………………………………… 3分

由正弦定理得$c=2a$， ………………………………………… 4分

由余弦定理得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}+\frac{3a}{b}\right)\geqslant\frac{1}{4}\times2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{3a}{b}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

当且仅当$b=\sqrt{3}a$时取得等号，所以A的最大值为$\frac{\pi}{6}$. ………………………………………… 6分

(2)由余弦定理得$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B=a^2+4a^2-a^2=4a^2$，所以$b=2a$， ………………………… 8分

因为$a+b+c=10$，所以$5a=10$，即$a=2$，$b=4$. ………………………………………… 10分

18. (1)解：因为$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}-a_n=-2$，

所以$a_1+a_2+\cdots+a_n-a_{n+1}=-2$，

两式相减得$a_{n+1}=2a_n(n\geqslant2)$. ………………………………………… 2分

当$n=2$时，$a_1-a_2=-2$，又$a_2=4$，所以$a_1=2$，$a_2=2a_1$，

所以$a_{n+1}=2a_n(n\in\mathbf{N}^*)$. ………………………………………… 4分

所以$\{a_n\}$是首项为2，公比为2的等比数列，

所以$a_n=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$. ………………………………………… 6分

(2)证明：$\frac{2^n}{(a_n-1)(a_{n+1}-1)}=\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$， ………………………… 8分

所以$T_n=\left(\frac{1}{2-1}-\frac{1}{2^2-1}\right)+\left(\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)=1-\frac{1}{2^{n+1}-1}<1$， ………… 10分

由$n\geqslant1$，得$2^{n+1}\geqslant4$，得$2^{n+1}-1\geqslant3$，得$\frac{1}{2^{n+1}-1}\leqslant\frac{1}{3}$，得$-\frac{1}{2^{n+1}-1}\geqslant-\frac{1}{3}$，

所以$1-\frac{1}{2^{n+1}-1}\geqslant\frac{2}{3}$， ………………………………………… 11分

综上所述，$\frac{2}{3}\leqslant T_n<1$. ………………………………………… 12分

19. (1)证明：因为$AO\perp$平面BB_1C_1C，$B_1C\subset$平面BB_1C_1C，

所以$AO\perp B_1C$. ………………………………………… 1分

因为$BC=BB_1$，四边形BB_1C_1C是平行四边形，所以四边形BB_1C_1C是菱形.

所以$BC_1\perp B_1C$. ………………………………………… 2分

因为$AO\cap BC_1=O$，$AO\subset$平面ABC_1，$BC_1\subset$平面ABC_1，

所以$B_1C\perp$平面ABC_1. ………………………………………… 3分

因为$AB\subset$平面ABC_1，所以$B_1C\perp AB$. ………………………………………… 4分

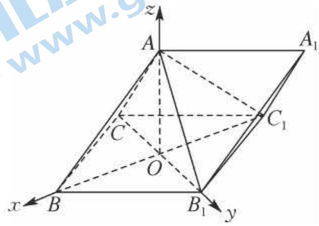
(2)解：因为 AB 与平面 BB_1C_1C 所成角为 $30°$，$AO\perp$平面 BB_1C_1C，

所以$\angle ABO=30°$，………………………………………………………………………… 5分

因为$\angle B_1BC=60°$，所以$\triangle BCB_1$ 是正三角形.

设 $BC=2$，则 $B_1C=2$，$BO=\sqrt{3}$，$OA=1$，

以 O 为原点，分别以 OB，OB_1，OA 所在直线为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $B(\sqrt{3},0,0)$，$B_1(0,1,0)$，$A(0,0,1)$，$C_1(-\sqrt{3},0,0)$，所以 $\overrightarrow{AB_1}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{C_1B_1}=(\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},0,-1)$. …………… 6分

设平面 AB_1C_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB_1}=y-z=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{C_1B_1}=\sqrt{3}x+y=0,\end{cases}$

令 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}_1=(1,-\sqrt{3},-\sqrt{3})$；………………………………………………………… 8分

设平面 $B_1C_1A_1$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x',y',z')$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=\sqrt{3}x'-z'=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{C_1B_1}=\sqrt{3}x'+y'=0,\end{cases}$

令 $x'=1$，解得 $\boldsymbol{n}_2=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$. ………………………………………………………… 10分

设二面角 $A_1-B_1C_1-A$ 的大小为 θ，

因为 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{(1,-\sqrt{3},-\sqrt{3})\cdot(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\dfrac{1}{7}$，

所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{7}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$，

所以二面角 $A_1-B_1C_1-A$ 的正弦值为$\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$. ………………………………………………… 12分

20. 解：(1)设实付金额为 X 元，X 可能的取值为 0，100，200，300，………………………………… 1分

则 $P(X=0)=\left(\dfrac{1}{5}\right)^3=\dfrac{1}{125}$，$P(X=100)=C_3^2\left(\dfrac{1}{5}\right)^2\times\left(\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{12}{125}$，

$P(X=200)=C_3^1\left(\dfrac{1}{5}\right)\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{48}{125}$，$P(X=300)=\left(\dfrac{4}{5}\right)^3=\dfrac{64}{125}$，……………………………… 3分

故 X 的分布列为

X	0	100	200	300
P	$\dfrac{1}{125}$	$\dfrac{12}{125}$	$\dfrac{48}{125}$	$\dfrac{64}{125}$

…… 4分

所以 $E(X)=0\times\dfrac{1}{125}+100\times\dfrac{12}{125}+200\times\dfrac{48}{125}+300\times\dfrac{64}{125}=240$(元). ……………………………… 6分

(2)若选择方案一，设摸到红球的个数为 Y，实付金额为 φ，则 $\varphi=500-100Y$，

由题意可得 $Y\sim B\left(3,\dfrac{1}{5}\right)$，故 $E(Y)=3\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{5}$，

所以 $E(\varphi)=E(500-100Y)=500-100E(Y)=500-60=440$(元)；…………………………………… 8分

若选择方案二，设实付金额为 η 元，η 可能的取值为 0，250，375，500，

则 $P(\eta=0)=\frac{C_2^2C_1^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{120}$，$P(\eta=250)=\frac{C_2^2C_7^1}{C_{10}^3}=\frac{7}{120}$，

$P(\eta=375)=\frac{C_2^1C_1^1C_7^1}{C_{10}^3}=\frac{7}{60}$，$P(\eta=500)=1-\frac{1}{120}-\frac{7}{120}-\frac{7}{60}=\frac{49}{60}$，

故 η 的分布列为

η	0	250	375	500
P	$\frac{1}{120}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{49}{60}$

所以 $E(\eta)=0\times\frac{1}{120}+250\times\frac{7}{120}+375\times\frac{7}{60}+500\times\frac{49}{60}\approx466.67$(元). ………………………………… 11 分

因为 $E(\varphi)<E(\eta)$，

故从实付金额的期望值分析顾客选择方案一更合理. ………………………………… 12 分

21. 解：(1)由题意可得，直线 $l: x=ty-1$ 恒过定点 $F(-1,0)$， ………………………………… 1 分

因为 F 为 OA 的中点，所以 $|OA|=2$，即 $a=2$. ………………………………… 2 分

因为椭圆 C 经过点 $\left(1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以 $\frac{1^2}{2^2}+\frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{b^2}=1$，解得 $b=1$， ………………………………… 3 分

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………………… 4 分

(2)设 $E(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}x^2+4y^2=4,\\x=ty-1,\end{cases}$ 得 $(t^2+4)y^2-2ty-3=0$，$\Delta>0$ 恒成立，

则 $y_1+y_2=\frac{2t}{t^2+4}$，$y_1y_2=-\frac{3}{t^2+4}$， ………………………………… 6 分

则 $|ED|=\sqrt{1+t^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+t^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{2t}{t^2+4}\right)^2-4\times\left(-\frac{3}{t^2+4}\right)}$

$=\frac{4\sqrt{1+t^2}\cdot\sqrt{t^2+3}}{t^2+4}$， ………………………………… 7 分

又因为点 B 到直线 l 的距离 $d=\frac{3}{\sqrt{1+t^2}}$， ………………………………… 8 分

所以 $S=\frac{1}{2}\times|ED|\times d=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{1+t^2}\cdot\sqrt{t^2+3}}{t^2+4}\cdot\frac{3}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{6\sqrt{t^2+3}}{t^2+4}$， ………………………………… 9 分

令 $m=\sqrt{t^2+3}\geqslant\sqrt{3}$，则 $\frac{6\sqrt{t^2+3}}{t^2+4}=\frac{6m}{m^2+1}=\frac{6}{m+\frac{1}{m}}$， ………………………………… 10 分

因为 $y=m+\frac{1}{m}$ 在 $m\in[\sqrt{3},+\infty)$ 上单调递增，

所以当 $m=\sqrt{3}$ 时，$\left(m+\frac{1}{m}\right)_{\min}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时，故 $S_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

即 S 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. ………………………………… 12 分

22. 解：(1)若 $a=-1$，$f(x)=\ln(x+1)-e^x$，$f'(x)=\frac{1}{x+1}-e^x$，…… 1 分

则切线的斜率为 $f'(1)=\frac{1}{2}-e$，…… 2 分

又 $f(1)=\ln 2-e$，所以函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程是 $y-(\ln 2-e)=\left(\frac{1}{2}-e\right)(x-1)$，即 $(1-2e)x-2y+2\ln 2-1=0$. …… 3 分

(2)当 $a>0$ 时，$f(x)+a\leqslant 0$ 恒成立，

即 $\ln(x+1)\leqslant a^2e^x-a$ 在 $x>-1$ 时恒成立，

当 $x=0$ 时，$\ln(x+1)\leqslant a^2e^x-a$ 恒成立，即 $a^2-a\geqslant 0$，

又 $a>0$，则 $a\geqslant 1$. …… 4 分

下面证明：当 $a\geqslant 1$ 时，$\ln(x+1)\leqslant a^2e^x-a$ 在 $x>-1$ 时恒成立.

先证明 $x>-1$ 时，$\ln(x+1)\leqslant x$，

令 $m(x)=\ln x-x+1$，则 $m'(x)=\frac{1-x}{x}$，…… 5 分

当 $x\in(0,1)$ 时，$m'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$m'(x)<0$，

故 $m(x)=\ln x-x+1$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，…… 6 分

则 $m(x)\leqslant m(1)=0$，即 $\ln x-x+1\leqslant 0$，故 $\ln x\leqslant x-1$，

所以当 $x>-1$ 时，$\ln(x+1)\leqslant x$. …… 7 分

要证明 $\ln(x+1)\leqslant a^2e^x-a$，只需证明：对任意的 $x\in(-1,+\infty)$，$a^2e^x-a\geqslant x$ 恒成立，

令 $g(x)=a^2e^x-x-a$，则 $g'(x)=a^2e^x-1$，

由 $g'(x)=a^2e^x-1=0$，得 $x=\ln\frac{1}{a^2}=-2\ln a\leqslant 0$. …… 8 分

①当 $-2\ln a\leqslant -1$ 即 $a\geqslant\sqrt{e}$ 时，$g'(x)\geqslant 0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成立，

则 $g(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，

于是 $g(x)>g(-1)=\frac{a^2}{e}+1-a=\frac{1}{e}\left(a-\frac{e}{2}\right)^2+1-\frac{e}{4}>1-\frac{e}{4}>0$；…… 9 分

②当 $-2\ln a>-1$，即 $1\leqslant a<\sqrt{e}$ 时，

$g(x)$ 在 $(-1,-2\ln a)$ 上单调递减，在 $(-2\ln a,+\infty)$ 上单调递增，

于是 $g(x)\geqslant g(-2\ln a)=\frac{a^2}{a^2}+2\ln a-a=2\ln a-a+1$，…… 10 分

令 $h(a)=2\ln a-a+1$，则 $h'(a)=\frac{2}{a}-1>\frac{2}{\sqrt{e}}-1>0$，则 $h(a)$ 在 $(1,\sqrt{e})$ 上单调递增，

于是 $h(a)\geqslant h(1)=0$，所以 $g(x)\geqslant 0$ 恒成立，

所以当 $a\geqslant 1$ 时，不等式 $a^2e^x-a\geqslant x$ 恒成立. …… 11 分

因此，正数 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$. …… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。