2012年全国高中数学联合竞赛

第一试

一、填空题（每小题8分，共64分）

1. 设 P 是函数 $y=x+\dfrac{2}{x}(x>0)$ 图像上的任意一点，过 P 分别向直线 $y=x$ 和 y 轴作垂线，垂足分别为 A、B．则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=$ ______．

答案：-1.

解法1　设 $P\left(x_0,x_0+\dfrac{2}{x_0}\right)$，则 $l_{PA}:y-\left(x_0+\dfrac{2}{x_0}\right)=-(x-x_0)$，即 $y=-x+2x_0+\dfrac{2}{x_0}$．

上式与 $y=x$ 联立解得点 $A\left(x_0+\dfrac{1}{x_0},x_0+\dfrac{1}{x_0}\right)$. 又点 $B\left(0,x_0+\dfrac{2}{x_0}\right)$，则 $\overrightarrow{PA}=\left(\dfrac{1}{x_0},-\dfrac{1}{x_0}\right)$，$\overrightarrow{PB}=(-x_0,0)$，

故 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\dfrac{1}{x_0}(-x_0)=-1$．

解法2　如图3，设 $P\left(x_0,x_0+\dfrac{2}{x_0}\right)(x_0>0)$．则点 P 到直线 $x-y=0$ 和 y 轴的距离分别为

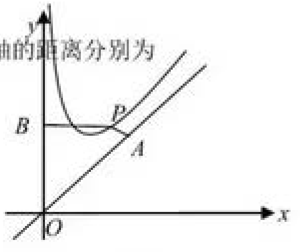

图 3

$$|PA|=\frac{\left|x_0-(x_0+\frac{2}{x_0})\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{x_0}，\quad |PB|=x_0．$$

因为 O、A、P、B 四点共圆，所以，$\angle APB=\pi-\angle AOB=\dfrac{3\pi}{4}$．

故 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|\cos\dfrac{3\pi}{4}=-1$．

2. 设△ABC 的内角 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边分别为 a、b、c，且满足 $a\cos B-b\cos A=\dfrac{3}{5}c$．则 $\dfrac{\tan A}{\tan B}=$ ______．

答案：4.

解法1　由题设及余弦定理得 $a\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}-b\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{3}{5}c\Rightarrow a^2-b^2=\dfrac{3}{5}c^2$．

$$故\ \frac{\tan A}{\tan B}=\frac{\sin A\cdot\cos B}{\sin B\cdot\cos A}=\frac{a\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}{b\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}=\frac{c^2+a^2-b^2}{c^2+b^2-a^2}=4$$

解法2　如图4，过点 C 作 $CD\perp AB$，垂足为 D.则 $a\cos B=DB$，$b\cos A=AD$．

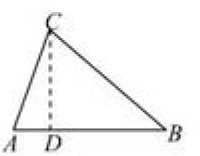

图 4

由题设得 $DB-AD=\dfrac{3}{5}c$．

又 $DB+DA=c$，联立解得 $AD=\dfrac{1}{5}c$，$DB=\dfrac{4}{5}c$.故 $\dfrac{\tan A}{\tan B}=\dfrac{\frac{CD}{AD}}{\frac{CD}{DB}}=\dfrac{DB}{AD}=4$．

解法3　由射影定理得 $a\cos B+b\cos A=c$

又 $a\cos B-b\cos A=\dfrac{3}{5}c$，与上式联立解得 $a\cos B=\dfrac{4}{5}c$，$b\cos A=\dfrac{1}{5}c$

故 $\dfrac{\tan A}{\tan B}=\dfrac{\sin A\cdot\cos B}{\sin B\cdot\cos A}=\dfrac{a\cos B}{b\cos A}=4$

3. 设 x、y、$z\in[0,1]$.则 $M=\sqrt{|x-y|}+\sqrt{|y-z|}+\sqrt{|z-x|}$ 的最大值是________.

答案：$\sqrt{2}+1$.

解：不妨设 $0\le x\le y\le z\le 1$.则 $M=\sqrt{y-x}+\sqrt{z-y}+\sqrt{z-x}$

由 $\sqrt{y-x}+\sqrt{z-y}\le\sqrt{2[(y-x)+(z-y)]}=\sqrt{2(z-x)}\Rightarrow M\le(\sqrt{2}+1)\sqrt{z-x}\le\sqrt{2}+1$.

当且仅当 $x=0$，$y=\dfrac{1}{2}$，$z=1$ 时，上式等号同时成立.

4. 抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，准线为 l，A、B 是抛物线上的两个动点，且满足 $\angle AFB=\dfrac{\pi}{3}$.

设线段 AB 的中点 M 在 l 上的投影为 N.则 $\dfrac{|MN|}{|AB|}$ 的最大值是________.

答案：1.

解法 1 设 $\angle ABF=\theta\left(0<\theta<\dfrac{2\pi}{3}\right)$.则由正弦定理得 $\dfrac{|AF|}{\sin\theta}=\dfrac{|BF|}{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)}=\dfrac{|AB|}{\sin\dfrac{\pi}{3}}$.

故 $\dfrac{|AF|+|BF|}{\sin\theta+\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)}=\dfrac{|AB|}{\sin\dfrac{\pi}{3}}$，即 $\dfrac{|AF|+|BF|}{|AB|}=\dfrac{\sin\theta+\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=2\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

如图 5，由抛物线的定义及梯形的中位线定理得：$|MN|=\dfrac{|AF|+|BF|}{2}$ ①

则 $\dfrac{|MN|}{|AB|}=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$．故当 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 时，$\dfrac{|MN|}{|AB|}$ 取得最大值 1

解法 2 同解法 1 得式①

在 $\triangle AFB$ 中，由余弦定理得

$$|AB|^2=|AF|^2+|BF|^2-2|AF||BF|\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=(|AF|+|BF|)^2-3|AF||BF|$$
$$\ge(|AF|+|BF|)^2-3\left(\frac{|AF|+|BF|}{2}\right)^2$$
$$=\left(\frac{|AF|+|BF|}{2}\right)^2=|MN|^2.$$

当且仅当 $|AF|=|BF|$ 时，上式等号成立.

故 $\dfrac{|MN|}{|AB|}$ 的最大值为 1.

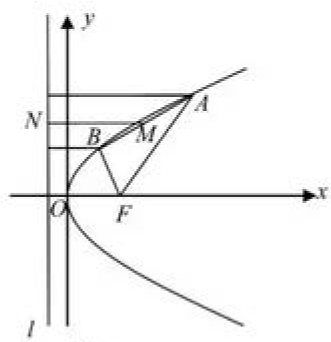

图 5

5. 设同底的两个正三棱锥 $P-ABC$ 和 $Q-ABC$ 内接于同一个球.若正三棱锥 $P-ABC$ 的侧面与底面所成的角为 45°，则正三棱锥 $Q-ABC$ 的侧面与底面所成角的正切值是_____.

答案：4.

解： 如图 6，联结 PQ.则 $PQ\perp$ 平面 ABC，垂足 H 为正 $\triangle ABC$ 的中心，且 PQ 过球心 O.
联结 CH 并延长与 AB 交于点 M.则 M 为边 AB 的中点，且 $CM\perp AB$.易知，$\angle PMH$ 、$\angle QMH$ 分别为正三棱锥 $P-ABC$ 、正三棱锥 $Q-ABC$ 的侧面与底面所成二面角的平面角．则

$\angle PMH=45^\circ \Rightarrow PH=MH=\dfrac{1}{2}AH$.

由 $\angle PAQ=90^\circ$， $AH\perp PQ$

$\Rightarrow AH^2=PH\cdot QH$

$\Rightarrow AH^2=\dfrac{1}{2}AH\cdot QH$

$\Rightarrow QH=2AH=4MH.$

故 $\tan\angle QMH=\dfrac{QH}{MH}=4$

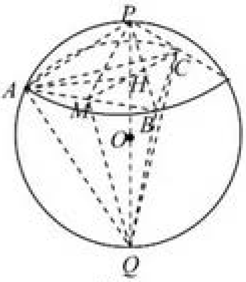

图 6

6. 设 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且当 $x\ge 0$ 时， $f(x)=x^2$. 若对任意的 $x\in[a,a+2]$，不等式 $f(x+a)\ge 2f(x)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是________.

解： 由题设知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\ge 0;\\ -x^2, & x<0\end{cases}\Rightarrow 2f(x)=f\left(\sqrt{2}x\right)$

故原不等式等价于 $f(x+a)\ge f\left(\sqrt{2}x\right)$. 由 $f(x)$ 在 R 上是增函数知

$x+a\ge\sqrt{2}x\Rightarrow a\ge\left(\sqrt{2}-1\right)x\Rightarrow a\ge\left(\sqrt{2}-1\right)(a+2)\Rightarrow a\ge\sqrt{2}.$

即 a 的取值范围为 $\left[\sqrt{2},+\infty\right)$

7. 满足 $\dfrac{1}{4}<\sin\dfrac{\pi}{n}<\dfrac{1}{3}$ 的所有正整数 n 的和是__________.

解： 由正弦函数的凸性，知当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{6})$ 时， $\dfrac{3}{\pi}x<\sin x<x$.

故 $\sin\dfrac{\pi}{13}<\dfrac{\pi}{13}<\dfrac{1}{4}$， $\sin\dfrac{\pi}{12}>\dfrac{3}{\pi}\times\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{1}{4}$， $\sin\dfrac{\pi}{10}<\dfrac{\pi}{10}<\dfrac{1}{3}$， $\sin\dfrac{\pi}{9}>\dfrac{3}{\pi}\times\dfrac{\pi}{9}=\dfrac{1}{3}$.

因此，满足 $\dfrac{1}{4}<\sin\dfrac{\pi}{n}<\dfrac{1}{3}$ 的正整数 n 的所有值分别为 10、11、12，其和为 33.

8. 某情报站有 A、B、C、D 四种互不相同的密码，每周使用其中的一种密码，且每周都是从上周未使用的三种密码中等可能地随机选用一种.设第一周使用 A 种密码.那么，第七周也使用 A 种密码的概率是________（用最简分数表示）.

解：用 P_k 表示第 k 周用 A 种密码本的概率.则第 k 周未用 A 种密码的概率为 $1-P_k$．故

$$P_{k+1}=\frac{1}{3}(1-P_k)(k\in N_+)$$

$$\Rightarrow P_{k+1}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}(P_k-\frac{1}{4})$$

$$\Rightarrow P_k-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}(-\frac{1}{3})^{k-1}$$

$$\Rightarrow P_k=\frac{3}{4}(-\frac{1}{3})^{k-1}+\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P_7=\frac{61}{243}.$$

二、解答题（共 56 分）

9. （16 分）已知函数 $f(x)=a\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x+a-\frac{3}{a}+\frac{1}{2}$，其中，$a\in\mathbb{R}$，且 $a\neq 0$.

（1）若对任意 $x\in\mathbb{R}$，都有 $F(x)<0$，求 a 的取值范围.

（2）若 $a\geq 2$，且存在 $x\in\mathbb{R}$，使 $f(x)\leq 0$，求 a 的取值范围.

解：（1）$f(x)=\sin^2 x+a\sin x+a-\frac{3}{a}$.令 $t=\sin x(-1\leq t\leq 1)$.则 $g(t)=t^2+at+a-\frac{3}{a}$

由题设知 $\begin{cases} g(-1)=1-\frac{3}{a}\leq 0, \\ g(1)=1+2a-\frac{3}{a}\leq 0. \end{cases}$

解得 a 的取值范围为 $(0,1]$.

（2）因为 $a\geq 2$，所以，$-\frac{a}{2}\leq -1$.

故 $g(t)_{\min}=g(-1)=1-\frac{3}{a}$.

从而，$f(x)_{\min}=1-\frac{3}{a}$.

由题设知 $1-\frac{3}{a}\leq 0$.

解得 $0<a\leq 3$.

故 a 的取值范围是 $[2,3]$.

10. （20 分）已知数列$\{a_n\}$的各项均为非零实数，且对于任意的正整数 n 都有
$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3$．

（1）当$n=3$时，求所有满足条件的三项组成的数列a_1，a_2，a_3．

（2）是否存在满足条件的无穷数列$\{a_n\}$，使得$a_{2013}=-2012$？若存在，求出这样的无穷数列的一个通项公式；若不存在，说明理由．

解：（1）当$n=1$时，$a_1^2=a_1^3$．由$a_1\neq 0$，得$a_1=1$．

当$n=2$时，$(1+a_2)^2=1+a_2^3$．由$a_2\neq 0$，得$a_2=2$或-1．

当$n=3$时，$(1+a_2+a_3)^2=1+a_2^3+a_3^3$．若$a_2=2$，得$a_3=3$或$-2$；若$a_2=-1$，得$a_3=1$．

综上，满足条件的三项数列有三个：1，2，3 或 1，2，-2 或 1，-1，1．

（2）令$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$.则$S_n^2=a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3\ (n\in N_+)$．

故$(S_n+a_{n+1})^2=a_1^3+a_2^3+\cdots+a_{n+1}^3$.两式相减并结合$a_{n+1}\neq 0$，得$2S_n=a_{n+1}^2-a_{n+1}$．

当$n=1$时，由（1）知$a_1=1$；

当$n\geq 2$时，$2a_n=2(S_n-S_{n-1})=(a_{n+1}^2-a_{n+1})-(a_n^2-a_n)$，

即$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-1)=0$．

所以，$a_{n+1}=-a_n$或a_n+1．

又$a_1=1$，$a_{2013}=-2012$，则

$$a_n=\begin{cases}n, & 1\leq n\leq 2012;\\ (-1)^n 2012, & n\geq 2013.\end{cases}$$

11. （20 分）如图 1，在平面直角坐标系 xOy 中，菱形 $ABCD$ 的边长为 4，且$|OB|=|OD|=6$．

（1）证明：$|OA||OC|$为定值；

（2）当点 A 在半圆$M:(x-2)^2+y^2=4(2\leq x\leq 4)$上运动时，求点 C 的轨迹.

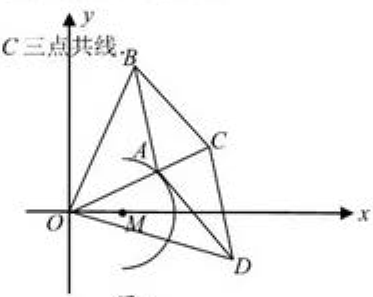

图 1

解：（1）由$|AB|=|AD|=|CB|=|CD|$，$|OB|=|OD|$，知 O、A、C 三点共线.

如图 7，联结 BD.则 BD 垂直平分线段 AC．设垂足为 K，

$$|OA||OC|$$
$$=(|OK|-|AK|)(|OK|+|AK|)$$
$$\text{故}=|OK|^2-|AK|^2$$
$$=(|OB|^2-|BK|^2)-(|AB|^2-|BK|^2)$$
$$=|OB|^2-|AB|^2=20(\text{定值}).$$

（2）设$C(x,y)$，$A(2+2\cos\alpha,2\sin\alpha)$，其中，$\alpha=\angle xMA\left(-\dfrac{\pi}{2}\leq\alpha\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$.

则$\angle xOC=\dfrac{\alpha}{2}$．

又$|OA|^2=(2+2\cos\alpha)^2+(2\sin\alpha)^2=8(1+\cos\alpha)=16\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$，

所以，$|OA|=4\cos\dfrac{\alpha}{2}$．

由（1）的结论得$|OC|\cos\dfrac{\alpha}{2}=5$．

则$x=|OC|\cos\dfrac{\alpha}{2}=5$．

故$y=|OC|\sin\dfrac{\alpha}{2}=5\tan\dfrac{\alpha}{2}\in[-5,5]$．

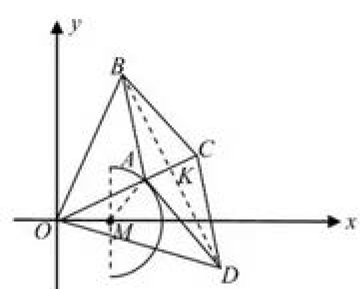

图 7

因此，点 C 的轨迹是一条线段，其两个端点的坐标分别为$(5,5)$，$(5,-5)$．