绝密★启用前

2022届全国高三第一次学业质量联合检测

文科数学

本试卷4页。总分150分。考试时间120分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

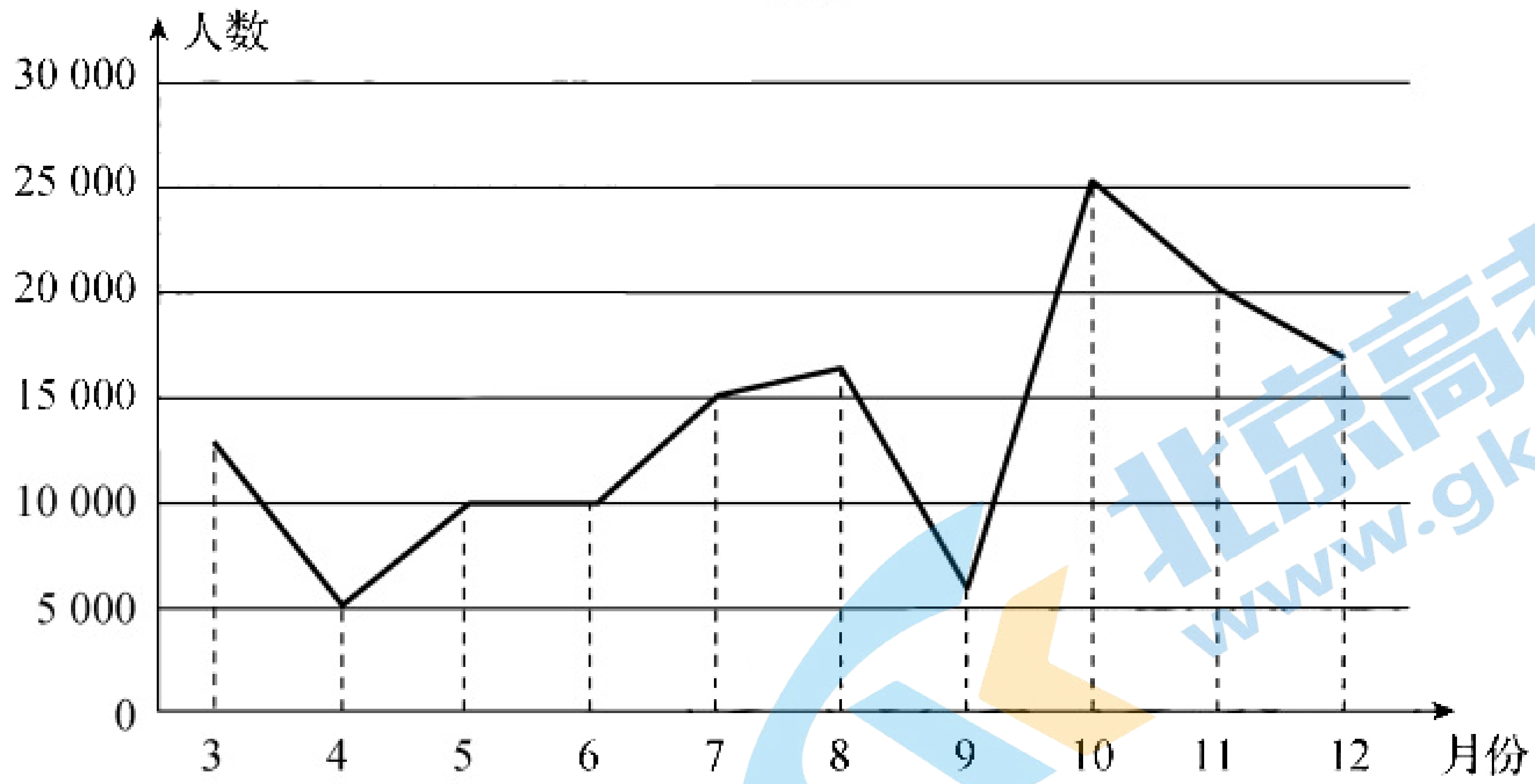
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|x=e^n, n=-1,0,1,2\}$，$B=\{x|y=\sqrt{1-x}\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-1,0,1\}$　　B. $\{-1,0\}$　　C. $\left\{\frac{1}{e},1\right\}$　　D. $\{1,2\}$

2. 下图记录了某景区某年3月至12月客流量情况：



根据该折线图，下列说法正确的是

A. 景区客流量逐月增加

B. 客流量的中位数为8月份对应的游客人数

C. 3月至7月的客流量情况相对于8月至12月波动性更小，变化比较平稳

D. 4月至5月的客流量增长量与8月至9月的客流量回落量基本一致

3. 复数 $z=\frac{2+i}{1+i^{11}}$ 在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

4. 已知函数 $f(x)=x+\frac{4}{x}$，则“$x>4$”是“$f(x)>5$”的

A. 充要条件　　B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 抛物线 $C_1: y^2=12x$ 的焦点到双曲线 $C_2: y^2-x^2=4$ 的渐近线的距离为

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

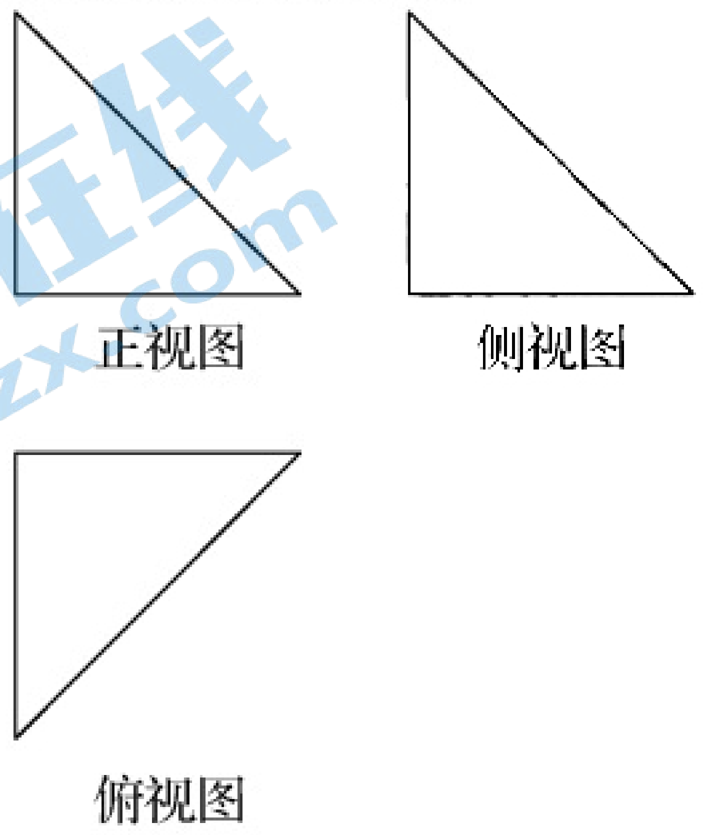
6. 某微生物科研机构为了记录微生物在不同时期的存活状态，计划将微生物分批次培养.第一批次，培养 1 个；从第二批次开始，每一批次培养的个数是前一批次的 2 倍.按照这种培养方式(假定每一批次的微生物都能成活)，要使微生物的总个数不少于 950，大概经过的批次为

A. 10　　B. 9　　C. 8　　D. 7

7. 已知△ABC 的面积为 6，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=9$，则 $\sin 2B=$

A. $-\frac{7}{25}$　　B. $\frac{24}{25}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $-\frac{1}{3}$

8. 如图，某几何体的三视图为三个全等的等腰直角三角形，其中直角边长为 2，则该几何体的各个面中，面积最大的面所对的顶点到该面的距离为



A. $\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

9. 曲线 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积为

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

10. 对于函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象与性质，有下列四个说法：

甲：函数图象经过点 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$；

乙：函数图象两条相邻对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{4}$；

丙：当 $x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right]$ 时，函数的最小值为 $-\frac{1}{2}$；

丁：点 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 是函数图象的一个对称中心.

若上述四个说法中，有且只有一个是错误的，则该说法是

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$，且满足如下性质：

①对于定义域内的任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$；

②当 $x>0$ 时，$f(x)+xf'(x)>0$ 恒成立；

③$f(3)=2$.

则不等式 $f(x)>\frac{6}{x}$ 的解集为

A. $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$　　B. $(-6,0)\cup(6,+\infty)$

C. $(-6,0)\cup(0,6)$　　D. $(-3,0)\cup(3,+\infty)$

12. 已知圆 $O:x^2+y^2=1$，点 $B(1,c)(c>1)$，射线 OB 与圆 O 交于点 $A(a,b)$，则下列结论错误的是

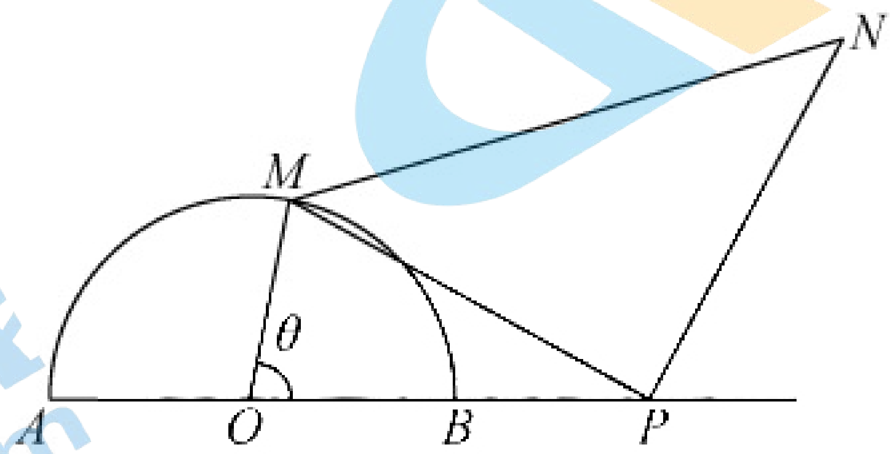
A. $a<b<c$　　B. $ab<\frac{1}{2}$　　C. $\log_a c<b^a<a^b$　　D. $1<a+b<\sqrt{2}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 120°，则 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=$________.

14. 将一个直角边长为 1 的等腰直角三角形绕着其中一条直角边所在直线旋转一周形成一个几何体，则该几何体的侧面积为________.

15. 如图，半圆 AB 的圆心为 O，半径为 2，B 为 OP 的中点，点 M 为半圆 AB 上的一个动点，点 N 在直线 AB 的上方，且 $PM=PN$，$PM\perp PN$.设 $\angle MOB=\theta$，则四边形 $OMNP$ 面积的最大值为________.



16. 若椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上有两个动点 M,N 满足 $OM\perp ON$（O 为坐标原点），过点 O 作 $OP\perp MN$，垂足 P 的轨迹为圆，则称该圆为 C 的内准圆.已知 C 的内准圆方程为 $x^2+y^2=\dfrac{2b^2}{3}$，则 C 的离心率为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

“直播带货”指通过一些互联网平台，使用直播技术，进行近距离商品展示、咨询答复、导购的新型服务方式.某厂家分别选择甲、乙两个直播平台销售同一产品，厂家为了解产品的销售情况，随机调查了甲、乙两个直播平台 20 天的日销售额，得到如下列联表：

平台	天数		总计
	日销售额不大于 8 万元	日销售额大于 8 万元	
甲	13	7	20
乙	6	14	20
总计	19	21	40

（1）分别估计厂家产品在甲、乙平台日销售额大于 8 万元的概率；

（2）试判断是否有 95％的把握认为该产品的日销售额是否超过 8 万元与选择的直播平台有关？

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

18.（12 分）

已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 a_n^2,S_n,a_n 成等差数列.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）请从以下三个条件中任意选择一个，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

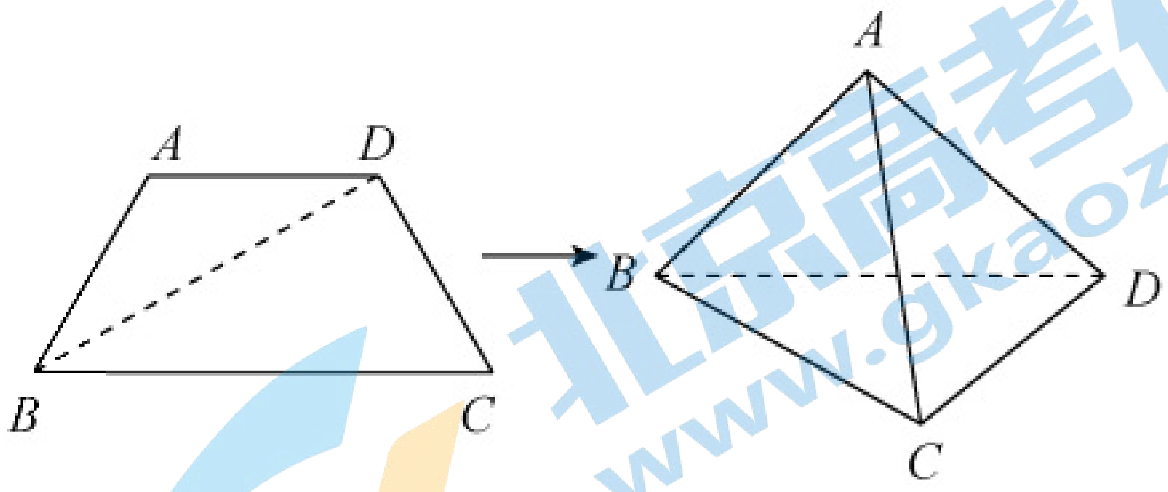
条件Ⅰ：设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=(-1)^n a_n$；

条件Ⅱ：设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=2^{a_n}\cdot a_n$；

条件Ⅲ：设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\dfrac{1}{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}}$.

19.（12 分）

如图，已知等腰梯形 $ABCD$ 满足 $AD \parallel BC$，$2AD=BC=2$，$\angle DCB=\frac{\pi}{3}$，沿对角线 BD 将△ABD 折起，使得平面 $ABD\perp$平面 BCD.



（1）若点 E 是棱 AD 上的一个动点，证明：$BE\perp CD$；

（2）若点 P，N 分别是棱 CD，BC 的中点，K 是棱 BD 上的一个动点，试判断三棱锥 K-ANP 的体积是否为定值？若是，求出这个定值；若不是，试说明理由.

20.（12 分）

已知椭圆 M：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，直线 $x-\sqrt{15}y+\sqrt{15}=0$ 过椭圆 M 的一个焦点和一个顶点.

（1）求椭圆 M 的方程；

（2）若 A 为椭圆 M 的左顶点，B，C 是椭圆 M 上的两点，△ABC 的内切圆 K 的方程为 $x^2+y^2-4x+m=0$.

（ⅰ）求实数 m 的值；

（ⅱ）P 为椭圆 M 的上顶点，椭圆 M 上是否存在两点 E，F，使得圆 K 是△PEF 的内切圆？若存在，求出直线 EF 的方程；若不存在，说明理由.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=e^x(1-x)$.

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若 a，b 为不相等的实数，且 $e^b-e^a=be^a-ae^b$，证明：$a+b>0$.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=t-2,\\ y=t+2\end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\frac{2a}{\rho}=\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta(a>0)$.

（1）求曲线 C_1 的普通方程与 C_2 的直角坐标方程；

（2）若曲线 C_2 上的动点 M 到曲线 C_1 的最小距离为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$，求实数 a 的值.

23. [选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=2x-1$，$g(x)=|f(x-1)|+\left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right|$.

（1）解不等式 $g(x)>f(x)$；

（2）若对于任意的实数 t，关于 x 的方程 $g(x)-t^2+2t-m=0$ 恒有实数解，求实数 m 的取值范围.

衡中同卷

参考答案及解析

2022 届全国高三第一次学业质量联合检测 · 文科数学

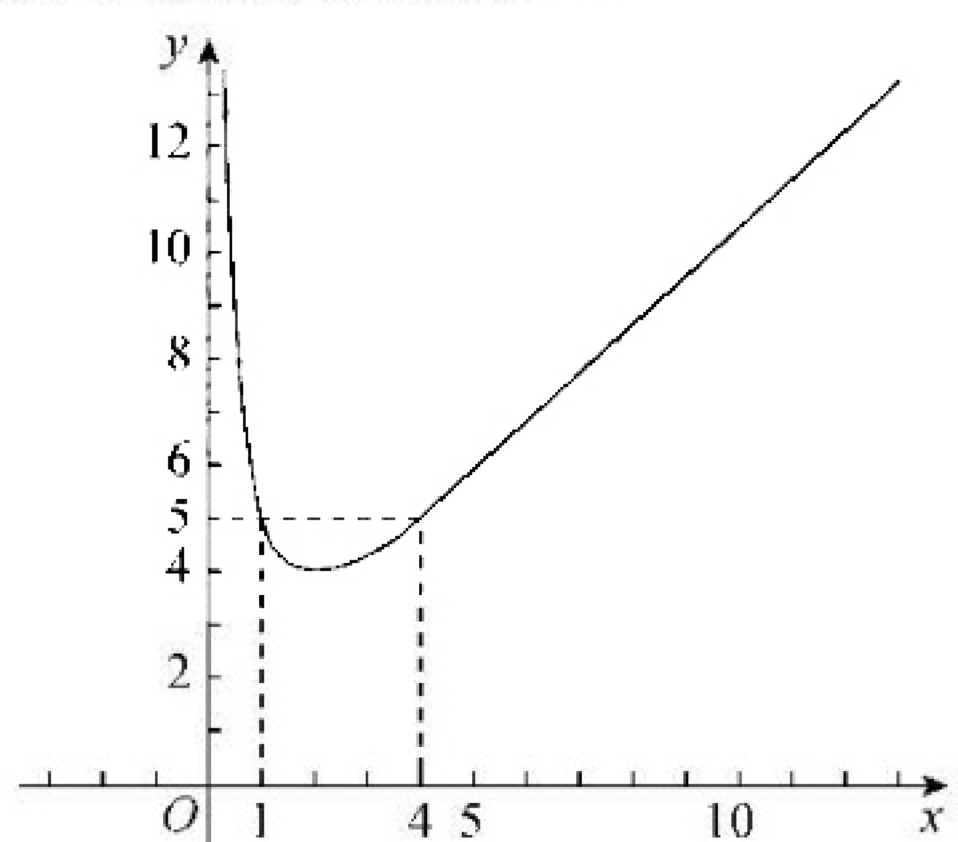
一、选择题

1. C 【解析】因为集合 $A=\{x\,|\,x=\mathrm{e}^n,n=-1,0,1,2\}=\left\{\frac{1}{\mathrm{e}},1,\mathrm{e},\mathrm{e}^2\right\}$，$B=\{x\,|\,y=\sqrt{1-x}\}=\{x\,|\,x\leqslant 1\}$，所以 $A\cap B=\left\{\frac{1}{\mathrm{e}},1\right\}$.

2. C 【解析】对于 A，景区客流量有增有减，故错误；对于 B，由于是 10 个月份的客流量，因此数据的中位数为 3 月份和 7 月份对应人数的平均数，故错误；对于 D，4 月至 5 月的客流量增长量与 8 月至 9 月的客流量回落量相比，明显不同，故错误.

3. A 【解析】由 $z=\frac{2+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}^{11}}=\frac{2+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$，得对应的点的坐标为 $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$，位于第一象限.

4. B 【解析】函数 $f(x)=x+\frac{4}{x}$，当 $x<0$ 时，$f(x)<0$，当 $x>0$ 时，函数 $f(x)$ 的图象如图所示，由图象可知，当 $0<x<1$ 或 $x>4$ 时，均满足 $f(x)>5$.故“$x>4$”是“$f(x)>5$”的充分不必要条件.

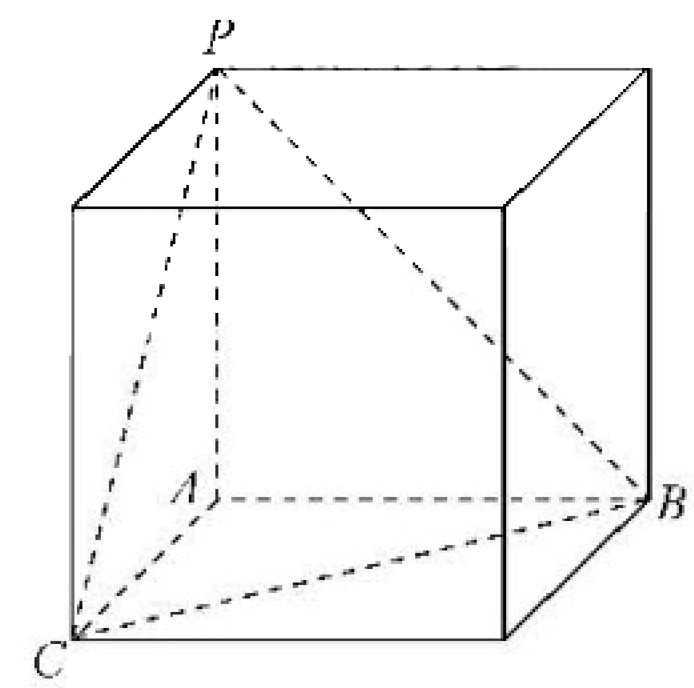


5. D 【解析】抛物线 $C_1:y^2=12x$ 的焦点坐标为 $(3,0)$，双曲线 $C_2:y^2-x^2=4$ 的渐近线方程为 $y=\pm x$，利用点到直线的距离公式得 $d=\frac{|3|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

6. A 【解析】第一批次，培养 1 个；从第二批次开始，每一批次培养的个数是前一批次的 2 倍，培养若干批次后，求微生物的总个数，符合等比数列求和模型.因而，培养第 n 批次后，微生物的总个数为 $\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，令 $2^n-1\geqslant 950$，即 $2^n\geqslant 951$.因为 n 是正整数，所以 $n=10$.

7. B 【解析】由 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=9$，$S_{\triangle ABC}=6$，可得 $\begin{cases}ca\cos B=9,\\ ca\sin B=12,\end{cases}$ 所以 $\tan B=\frac{4}{3}$，则 $\sin 2B=\frac{2\sin B\cos B}{\sin^2 B+\cos^2 B}=\frac{2\tan B}{1+\tan^2 B}=\frac{24}{25}$.

8. D 【解析】如图，可以借助正方体模型，找到这个三棱锥 P-ABC.该三棱锥各个面中，面积最大的是面 PBC，该面所对应的顶点是点 A，设点 A 到面 PBC 的距离为 h，由等体积法，可得 $V_{三棱锥P\text{-}ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times 2=\frac{4}{3}$，$V_{三棱锥A\text{-}PBC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times h$，$V_{三棱锥P\text{-}ABC}=V_{三棱锥A\text{-}PBC}$，解得 $h=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



9. B 【解析】当 $x=1$ 时，$f(1)=0$.因为 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，所以 $f'(1)=1$，所以曲线 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-0=1\cdot(x-1)$，即 $x-y-1=0$.因为 $x-y-1=0$ 与两坐标轴的交点坐标为 $(1,0)$ 和 $(0,-1)$，所以此切线与两坐标轴围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$.

10. D 【解析】对于甲，该函数图象经过点 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$，可得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$；对于乙，该函数图象两条相邻对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{4}$，可得 $T=\frac{\pi}{2}$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=4$.此时，函数解析式为 $f(x)=\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$，假设甲、乙正确，对于丙，当 $x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right]$ 时，$4x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，此时 $f(x)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，函数 $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{2}$，正确；对于丁，当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(4\times\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{1}{2}\neq 0$，错误.

11. D 【解析】因为对于定义域内的任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数；由当 $x>0$ 时，满足 $f(x)+xf'(x)>0$ 恒成立，可得 $[xf(x)]'>0$ 恒成立，设 $g(x)=xf(x)$，则 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，根据奇偶性可知，$g(x)=xf(x)$ 为偶函数，因而，$g(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递减；由 $f(3)=2$，可知 $g(3)=3f(3)=6$，则不等式 $f(x)>\frac{6}{x}\Leftrightarrow\frac{xf(x)-6}{x}>0\Leftrightarrow$ 当 $x>0$ 时，$g(x)>g(3)$，得

$x>3$；当 $x<0$ 时，$g(x)<g(3)=g(-3)$，得 $-3<x<0$.综上，原不等式的解集为 $(-3,0)\cup(3,+\infty)$.

12. C 【解析】设 $\angle BOx=\theta\left(\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $a=\cos\theta$，$b=\sin\theta$，$c=\tan\theta$.对于 A，由于 $\angle BOx=\theta\left(\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，由三角函数线可以直观得到 $a<b<c$，故 A 正确；对于 B，方法 1：因为 $a^2+b^2=1(a>0,b>0)$，所以 $ab<\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{1}{2}$（因为 $a\neq b$，所以等号取不到）；方法 2：因为 $a=\cos\theta$，$b=\sin\theta$，所以 $ab=\frac{1}{2}\sin 2\theta$，因为 $\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $ab<\frac{1}{2}$，故 B 正确；对于 C，因为 $0<a<b<1<c$，所以 $\log_a c<0<a^b<a^a<b^a$，故 C 错误；对于 D，$a+b=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，因为 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$，所以 $1<\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)<\sqrt{2}$，即 $1<a+b<\sqrt{2}$，故 D 正确.

二、填空题

13. $\sqrt{3}$ 【解析】因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}$，所以 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{1+4\times\left(-\frac{1}{2}\right)+4}=\sqrt{3}$.

14. $\sqrt{2}\pi$ 【解析】由题意知，旋转一周形成的几何体是圆锥，此时圆锥的母线长为 $\sqrt{2}$，底面半径为 1，侧面积 $S=\pi rl=\sqrt{2}\pi$.

15. $4\sqrt{5}+10$ 【解析】在 $\triangle MOP$ 中，由余弦定理，可得 $MP=\sqrt{4+16-16\cos\theta}=\sqrt{20-16\cos\theta}$，$S_{四边形OMNP}=S_{\triangle OMP}+S_{\triangle MNP}=\frac{1}{2}\times2\times4\times\sin\theta+\frac{1}{2}(20-16\cos\theta)=4\sin\theta-8\cos\theta+10=4\sqrt{5}\sin(\theta-\varphi)+10(\tan\varphi=2)$，当且仅当 $\sin(\theta-\varphi)=1$ 时，面积有最大值，最大值为 $4\sqrt{5}+10$.

16. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】当直线 MN 的斜率存在时，设直线 MN 的方程为 $y=kx+m$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，联立方程 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$ 化简整理得 $(a^2k^2+b^2)x^2+2a^2kmx+a^2(m^2-b^2)=0$，$\Delta>0$，由根与系数的关系可得 $\begin{cases}x_1x_2=\frac{a^2(m^2-b^2)}{a^2k^2+b^2},\\ y_1y_2=\frac{b^2(m^2-a^2k^2)}{a^2k^2+b^2}.\end{cases}$ 由 $OM\perp ON$ 可知 $x_1x_2+y_1y_2=0$，即 $a^2m^2-a^2b^2+b^2m^2-a^2b^2k^2=0$，整理得 $(a^2+b^2)m^2=a^2b^2(1+k^2)$.又原点到直线 MN 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{\frac{m^2}{k^2+1}}=\sqrt{\frac{m^2(a^2+b^2)}{(k^2+1)(a^2+b^2)}}=\sqrt{\frac{a^2b^2(1+k^2)}{(k^2+1)(a^2+b^2)}}=\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}$，即 $x^2+y^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$，由题意得 $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{2b^2}{3}$，解得 $a^2=2c^2$，$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.当直线 MN 的斜率不存在时，易得 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

三、解答题

17. 解：(1)由调查数据，选择在甲平台销售，日销售额大于 8 万元的比率为 $\frac{7}{20}=0.35$，　　(1 分)

因此厂家在甲平台日销售额大于 8 万元的概率的估计值为 0.35；　　(3 分)

选择在乙平台销售，日销售额大于 8 万元的比率为 $\frac{14}{20}=0.7$，　　(4 分)

因此厂家在乙平台日销售额大于 8 万元的概率的估计值为 0.7.　　(6 分)

(2)根据公式，计算可得

K^2 的观测值 $k=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{40\times(182-42)^2}{20\times20\times19\times21}\approx4.912$，　　(8 分)

因为 $4.912>3.841$，　　(10 分)

所以有 95%的把握认为该产品的日销售额是否超过 8 万元与选择的直播平台有关.　　(12 分)

18. 解：(1)因为 a_n^2，S_n，a_n 成等差数列，

所以 $2S_n=a_n^2+a_n$.　　(1 分)

当 $n\geqslant2$ 时，$2S_{n-1}=a_{n-1}^2+a_{n-1}$，　　(2 分)

两式作差化简，得 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-1)=0$.　　(3 分)

因为该数列是正项数列，所以 $a_n-a_{n-1}-1=0$，即 $a_n-a_{n-1}=1$，　　(4 分)

所以数列 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列，且当 $n=1$ 时，$2a_1=a_1^2+a_1$，得 $a_1=1$，　　(5 分)

所以 $a_n=n$.　　(6 分)

(2)若选择条件Ⅰ：数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=(-1)^n a_n=(-1)^n n$，

所以 $T_n=-1+2-3+4-5+6-\cdots+(-1)^n n$，　　(7 分)

当 n 为偶数时，$T_n=(-1+2)+(-3+4)+(-5+6)+\cdots+[-(n-1)+n]=\frac{n}{2}\times1=\frac{n}{2}$；　　(9 分)

当 n 为奇数时，$T_n=(-1+2)+(-3+4)+(-5+6)+\cdots+[-(n-2)+(n-1)]-n=\frac{(n-1)}{2}\times1-n=\frac{n-1-2n}{2}=-\frac{1+n}{2}$.　　(11 分)

所以 $T_n=\begin{cases}\frac{n}{2},n\text{ 为偶数},\\ -\frac{1+n}{2},n\text{ 为奇数}.\end{cases}$　　(12 分)

若选择条件Ⅱ：数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=2^{a_n}\cdot a_n=n\cdot2^n$，

利用乘公比错位相减法，可得 $T_n=1\times2^1+2\times2^2+\cdots+n\times2^n$ ①，　　(7 分)

$2T_n=1\times2^2+2\times2^3+\cdots+n\times2^{n+1}$ ②，　　(8 分)

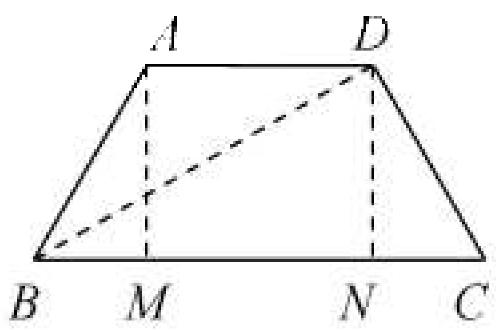
①－②得 $-T_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\times2^{n+1}=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n\times2^{n+1}=(1-n)\times2^{n+1}-2$，　　(11 分)

则 $T_n=(n-1)\times2^{n+1}+2$.　　(12 分)

若选择条件Ⅲ：数列$\{b_n\}$满足$b_n=\dfrac{1}{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，（9分）

则$T_n=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{n+1}-1$.（12分）

19.（1）**证明**：如图，在等腰梯形中，过A,D分别作底边的垂线，垂足分别为M,N，



在$\mathrm{Rt}\triangle DNC$中，$CN=\dfrac{1}{2}$，$\angle NDC=\dfrac{\pi}{6}$，所以$CD=1$.（1分）

在$\triangle ABD$中，

$AB=AD=1$，$\angle BAD=\dfrac{2\pi}{3}$，由余弦定理可知，$BD=\sqrt{1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos\dfrac{2\pi}{3}}=\sqrt{3}$，（2分）

在$\triangle BDC$中，

$BD=\sqrt{3}$，$BC=2$，$CD=1$，满足$BD^2+CD^2=BC^2$，

所以$BD\perp CD$.（3分）

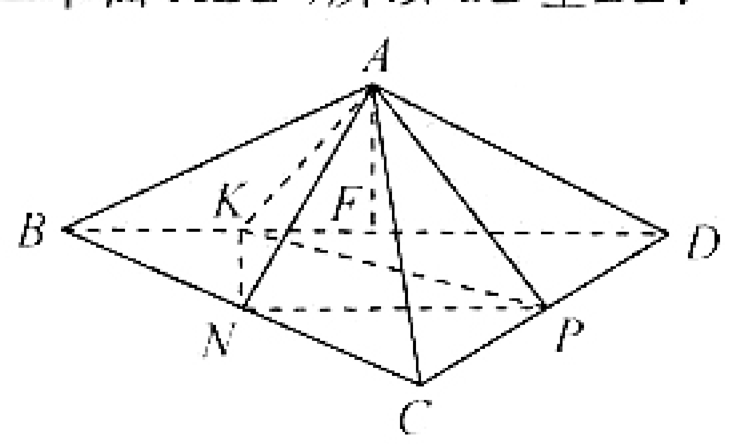
因为平面$ABD\perp$平面BCD，

且平面$BDC\cap$平面$ABD=BD$，$CD\subset$平面BDC，

所以$CD\perp$平面ABD.（5分）

又因为$BE\subset$平面ABD，所以$CD\perp BE$.（6分）

（2）**解**：



三棱锥$K\text{-}ANP$的体积是定值.（7分）

因为$CN=BN$，$CP=DP$，所以$NP\,/\!/\,BD$.

所以$S_{\triangle KPN}=S_{\triangle DPN}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.（8分）

取BD的中点F，连接AF，如图，

因为$AB=AD$，所以$AF\perp BD$.（9分）

因为平面$ABD\perp$平面BCD，且平面$BDC\cap$平面$ABD=BD$，$AF\subset$平面ABD，

所以$AF\perp$平面BCD.（10分）

又在$\triangle ABD$中，$AB=AD=1$，$\angle BAD=\dfrac{2\pi}{3}$，

所以$AF=\dfrac{1}{2}$，（11分）

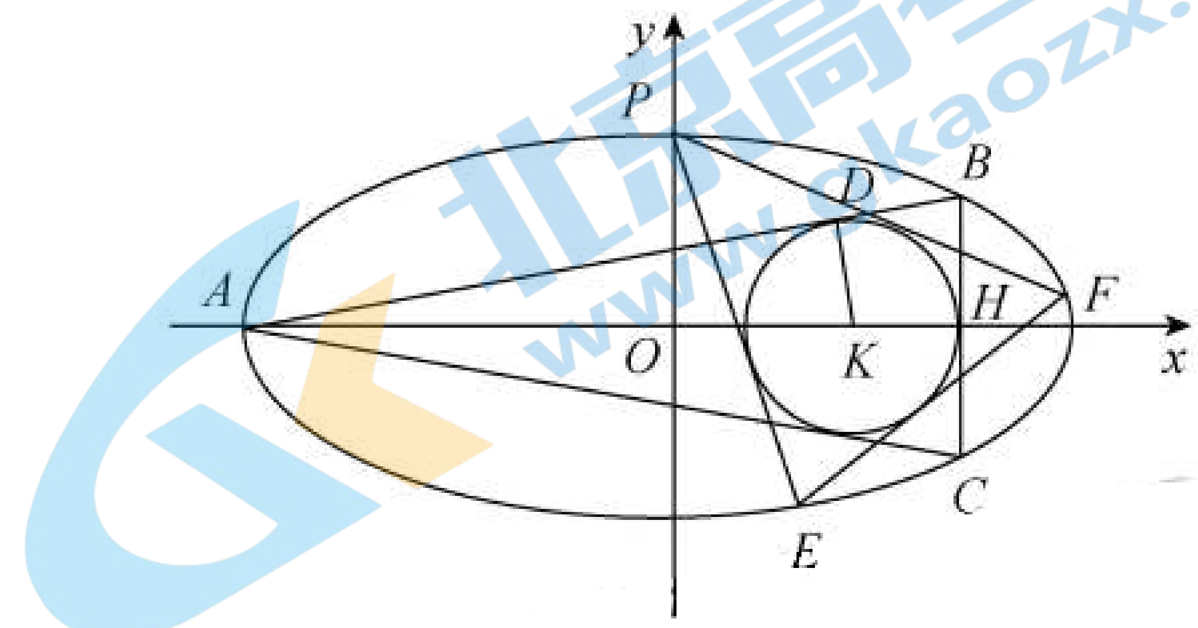
所以$V_{\text{三棱锥}K\text{-}ANP}=V_{\text{三棱锥}A\text{-}DNP}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle DNP}\cdot AF=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{8}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{48}$为定值.（12分）

20.**解**：（1）椭圆M的焦点和顶点均在坐标轴上，直线$x-\sqrt{15}y+\sqrt{15}=0$与坐标轴的交点坐标为$(-\sqrt{15},0)$，$(0,1)$，因而，椭圆M中$c=\sqrt{15}$，$b=1$，（2分）

所以$a=\sqrt{b^2+c^2}=4$，（3分）

所以椭圆M的方程为$\dfrac{x^2}{16}+y^2=1$.（4分）

（2）



（ⅰ）由题意知$x^2+y^2-4x+m=0$，即$(x-2)^2+y^2=4-m$.

如图，过圆心K作$KD\perp AB$，BC与x轴交于点H，则根据$\triangle DKA$与$\triangle HBA$相似，可得$\dfrac{DK}{DA}=\dfrac{BH}{AH}$，（5分）

为运算方便，设$\sqrt{4-m}=r$，$B(2+r,y_0)$，

则$\dfrac{r}{\sqrt{36-r^2}}=\dfrac{y_0}{6+r}$，解得$y_0=\dfrac{r\sqrt{6+r}}{\sqrt{6-r}}$.

又因为点$B(2+r,y_0)$在椭圆M上，代入椭圆方程，得$\dfrac{(2+r)^2}{16}+\dfrac{r^2(6+r)}{(6-r)}=1$，整理得$15r^3+98r^2+36r-72=0$，即$15r^3+90r^2+8r^2+36r-72=0$，因式分解得$15r^2(r+6)+(r+6)(8r-12)=0$，

即$(r+6)(15r^2+8r-12)=0$，$(r+6)(3r-2)(5r+6)=0$，解得$r=\dfrac{2}{3}$，即$m=\dfrac{32}{9}$.（6分）

（ⅱ）椭圆M上存在两点E,F，使得圆K是$\triangle PEF$的内切圆.

下面只需证明，当直线PE,PF与圆K相切时，直线EF与圆K相切即可.圆K：$(x-2)^2+y^2=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$，点$P(0,1)$，设过点$P$与圆$K$相切的直线方程为$y=kx+1$，

则$\dfrac{2}{3}=\dfrac{|2k+1|}{\sqrt{1+k^2}}$，即$32k^2+36k+5=0$，解得$k_1=\dfrac{-9+\sqrt{41}}{16}$，$k_2=\dfrac{-9-\sqrt{41}}{16}$.（7分）

将$y=kx+1$与椭圆方程联立，可得$(16k^2+1)x^2+32kx=0$，

则非零的解为$x=-\dfrac{32k}{16k^2+1}$.（8分）

设$F(x_1,k_1x_1+1)$，$E(x_2,k_2x_2+1)$，则$x_1=-\dfrac{32k_1}{16k_1^2+1}$，$x_2=-\dfrac{32k_2}{16k_2^2+1}$，

则直线EF的斜率为$k_{EF}=\dfrac{k_2x_2-k_1x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{k_1+k_2}{1-16k_1k_2}=\dfrac{3}{4}$，（9分）

于是直线EF的方程为$y+\dfrac{32k_1^2}{16k_1^2+1}-1=\dfrac{3}{4}\left(x+\dfrac{32k_1}{16k_1^2+1}\right)$，

即$y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{7}{3}$.（10分）

由 $\begin{cases} y=\frac{3}{4}x-\frac{7}{3}, \\ \frac{x^2}{16}+y^2=1, \end{cases}$ 得 $45x^2-252x+320=0$,

经验证 $\Delta>0$. (11 分)

则圆心(2,0)到直线 EF 的距离 $d=\frac{\left|\frac{3}{2}-\frac{7}{3}\right|}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}}=\frac{2}{3}$,

所以直线 EF 也与圆 K 相切,所以椭圆 M 上存在点 E,F,使得圆 K 是△PEF 的内切圆,直线 EF 的方程为 $y=\frac{3}{4}x-\frac{7}{3}$. (12 分)

21. (1)**解**: 由 $f(x)=e^x(1-x)$,则 $f'(x)=-xe^x$. (1 分)

令 $f'(x)>0$,解得 $x<0$;令 $f'(x)<0$,解得 $x>0$. (3 分)

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0)$,单调递减区间为 $(0,+\infty)$. (4 分)

(2)**证明**: 对等式 $e^b-e^a=be^a-ae^b$,左右两边同时除以 e^{a+b},可得 $\frac{1}{e^a}-\frac{1}{e^b}=\frac{b}{e^b}-\frac{a}{e^a}$,

所以 $\frac{1}{e^a}[1-(-a)]=\frac{1}{e^b}[1-(-b)]$,

即 $e^{-a}[1-(-a)]=e^{-b}[1-(-b)]$,

即 $f(-a)=f(-b)$. (6 分)

不妨设 $-a=x_1$,$-b=x_2$,且 $x_1<x_2$,即 $f(x_1)=f(x_2)$.由图象可知 $x_1<0$,$x_2>0$,

要证 $a+b>0$,即证 $(-a)+(-b)<0$,即 $x_1+x_2<0$,

即证 $x_1<-x_2$. (8 分)

因为 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增,所以即证 $f(x_1)<f(-x_2)$, (9 分)

又因为 $f(x_1)=f(x_2)$,所以即证 $f(x_2)<f(-x_2)$.

即证 $f(x_2)-f(-x_2)<0$. (10 分)

设 $g(x)=f(x)-f(-x)=e^x(1-x)-e^{-x}(1+x)$,$x>0$,

则 $g'(x)=-x\left(e^x-\frac{1}{e^x}\right)<0$ 在 $x>0$ 时恒成立,

所以 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减,所以 $g(x)<g(0)=0$,

所以 $g(x)=f(x)-f(-x)<0$,即 $a+b>0$ 得证. (12 分)

22. **解**: (1)由曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=t-2, \\ y=t+2 \end{cases}$ (t 为参数),可以消参得到直角坐标系下的普通方程为 $y=x+4$; (2 分)

由曲线 C_2 的极坐标方程为 $\frac{2a}{\rho}=\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta$,利用转化公式,可得到直角坐标方程为 $y^2=2ax(a>0,x\neq0)$. (4 分)

(2)由题意可知,直线与抛物线没有交点.因而,抛物线上的点到直线的距离的最小值,即两条平行线之间的距离.所求直线与已知直线平行,与抛物线相切.(5 分)

设所求直线方程为 $y=x+c(c<4)$,联立直线与抛物线的方程 $\begin{cases} y=x+c, \\ y^2=2ax, \end{cases}$ 得 $x^2+2(c-a)x+c^2=0$, (7 分)

令 $\Delta=0$,即 $4(c-a)^2-4c^2=0$,解得 $c=\frac{a}{2}$, (8 分)

此时两条平行线之间的距离为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{\left|\frac{a}{2}-4\right|}{\sqrt{2}}$, (9 分)

解得 $a=14$(舍去)或 $a=2$. (10 分)

23. **解**: (1) $f(x)=2x-1$,$g(x)=|f(x-1)|+\left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right|=|2x-3|+|x-1|$,

$g(x)=|2x-3|+|x-1|=\begin{cases} 3x-4, x\geqslant\frac{3}{2}, \\ 2-x, 1<x<\frac{3}{2}, \\ 4-3x, x\leqslant1, \end{cases}$ (2 分)

分类讨论解不等式 $g(x)>f(x)$,可得:

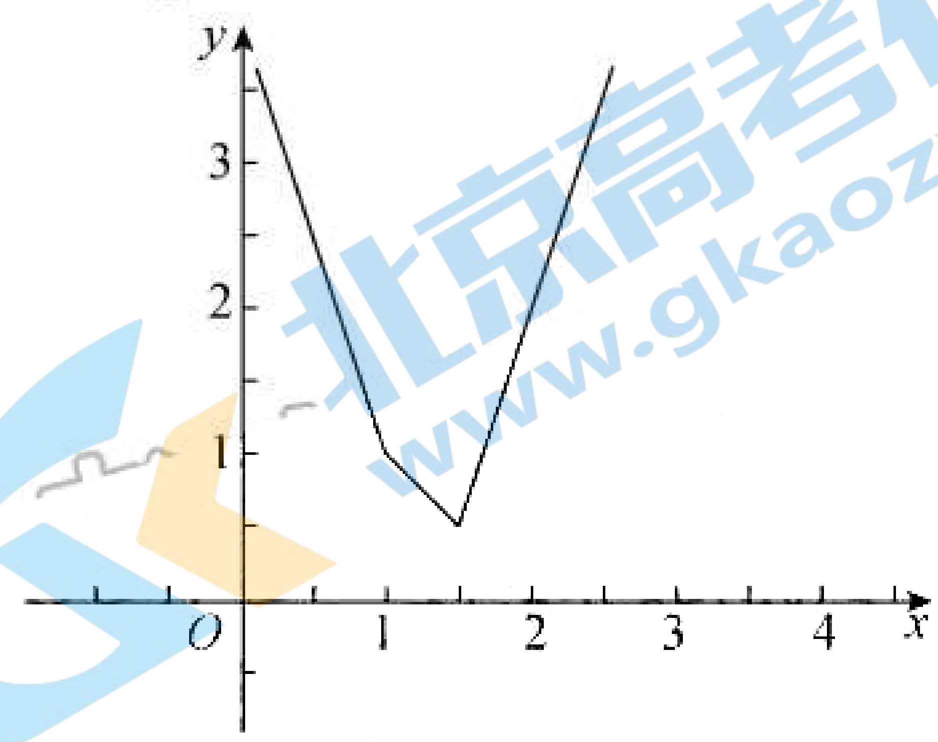
当 $x\geqslant\frac{3}{2}$ 时,$3x-4>2x-1$,解得 $x>3$;

当 $1<x<\frac{3}{2}$ 时,$2-x>2x-1$,无解;

当 $x\leqslant1$ 时,$4-3x>2x-1$,解得 $x<1$. (4 分)

综上所述,原不等式的解集为 $\{x|x<1$ 或 $x>3\}$. (5 分)

(2)作出函数 $g(x)$ 的图象如图,



由图象可知,$g(x)\geqslant\frac{1}{2}$ 恒成立, (7 分)

令 $h(t)=t^2-2t+m=(t-1)^2+m-1\geqslant m-1$, (8 分)

若对于任意的实数 t,关于 x 的方程 $g(x)-t^2+2t-m=0$ 恒有实数解,则只需 $m-1\geqslant\frac{1}{2}$,即 $m\geqslant\frac{3}{2}$. (10 分)