

河北省 2024 届高三年级测评

数 学

注意事项：

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、班级和考号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z = \frac{i-3}{i+1}$, 则 z 的虚部是

- A. -1 B. -i C. 2 D. 2i

2. 已知集合 $A = \{x \mid y = \ln(-x^2 + x + 2)\}$, $B = \{x \mid x^2 + 2x - 3 < 0\}$, 则 $A \cap B =$

- A. (-1, 2) B. (-3, 1) C. (-3, -1) D. (-1, 1)

3. 已知命题 $p: m = (a, a^2)$, $n = (1, 2)$, m 与 n 共线, 命题 $q: a = 2$, 则 p 是 q 的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 新高考在赋分时,先根据考生原始分划定等级,再根据该等级下考生原始分数的排名进行赋分(赋分均为整数),某校在高三年级某次化学模拟考试中,对全校 1 000 人进行赋分,一同学该科目全校排名 300 名,则其赋分为(保留整数)

等级	A	B	C	D	E
比例	15%	35%	35%	13%	2%
赋分区间	100—86	85—71	70—56	55—41	40—30

- A. 80 B. 79 C. 78 D. 77

5. 已知函数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后可以得到 $g(x)$ 的图象, 则 $f(x) + g(x)$ 的最大值为

- A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

6. 已知函数 $f(x)$ 满足: $\forall x, y \in \mathbb{Z}, f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy + 1$ 成立, 且 $f(-2) = 1$, 则 $f(2n) (n \in \mathbb{N}^+) =$

- A. $4n + 6$ B. $8n - 1$ C. $4n^2 + 2n - 1$ D. $8n^2 + 2n - 5$

7. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$, M 是直线 $y = x + 4$ 上的一个动点, 过 M 作抛物线 C 的两条切线, 切点分别为 A, B , 若 H 为圆 $N: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$ 上的动点, 则点 H 到直线 AB 距离的最大值为

- A. $\sqrt{5}$ B. 5 C. 2 D. $2\sqrt{5}$

8. 已知函数 $f(x) = e^x + a \ln \frac{1}{ax+a} - a (a > 0)$, 若 $f(x) > 0$ 恒成立, 则 a 的取值范围是

- A. $(0, 1)$ B. $(1, +\infty)$
C. $[1, +\infty)$ D. $(0, 1]$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{m^2+3} - \frac{y^2}{m^2} = 1 (m > 0)$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{1}{2}x$, 则下列结论正确的是

- A. $m = 1$ B. C 的离心率为 $\sqrt{5}$
C. 曲线 $y = \ln(x-1)$ 经过 C 的一个顶点 D. $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$ 与 C 有相同的渐近线

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 公差为 d ; 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 公比为 q , 则下列说法正确的是

- A. 存在 d 和 q , 使得 $a_n = b_n$
B. 若 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \dots$ 成等差数列
C. 若 T_n 为 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 则 $T_n, T_{2n} - T_n, T_{3n} - T_{2n}, \dots$ 成等比数列
D. 当 $b_n > 0$ 时, 存在实数 A, a 使得 $A \cdot a^n = b_n$

11. 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 已知 $AB = AC = 2, AB \perp AC$, 下列说法正确的是

- A. 平面 $A_1B_1C_1 \perp$ 平面 ACC_1A_1
B. 若 $AA_1 = 1$, 则 AA_1 与平面 ABC_1 所成角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
C. 若 $AA_1 = 2$, 设 K 为 BC_1 的中点, 则平面 $A_1B_1K \perp$ 平面 ABC_1
D. 无论 AA_1 取任何值, BC_1 不会垂直于 AC

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a = 2, \sin B = \sqrt{3} \sin C$, 则以下四个命题中正确的是

- A. 满足条件的 $\triangle ABC$ 不可能是直角三角形
B. $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$
C. 当 $A = C$ 时, $\triangle ABC$ 的内切圆的半径为 $2\sqrt{3} - 3$
D. 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 则 $c \in (1, \sqrt{3})$

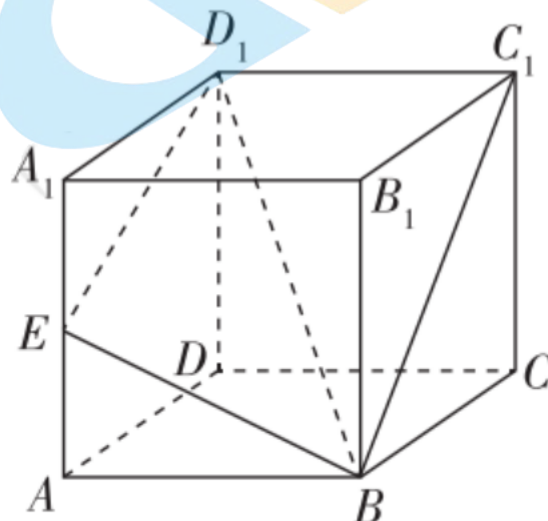
三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $(x^2 + 1)(2x + 1)^3$ 展开式中 x^3 项的系数为 _____.

14. 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -\frac{1}{3}$, 则 $\frac{\sin 2\alpha - 2\sin^2 \alpha}{\sqrt{1 - \cos 2\alpha}} =$ _____

15. 已知 $f_1(x) = f(x), f_2(x) = f'_1(x), f_3(x) = f'_2(x), \dots, f_{n+1}(x) = f'_n(x), n \in \mathbb{N}$, 例如 $f_1(x) = \sin x$, 则 $f_2(x) = \cos x, f_3(x) = -\sin x, f_4(x) = -\cos x, \dots$. 若 $f(x) = e^{\cos x} + e^{-\cos x}$, 则 $f_1(2\pi) =$ _____

16. 如图, 在棱长为 8 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是棱 AA_1 上的一个动点, 给出下列三个结论: ①若 F 为 BD_1 上的动点, 则 EF 的最小值为 $4\sqrt{2}$; ② D 到平面 BED_1 的距离的最大值为 $\frac{8\sqrt{6}}{3}$; ③ M 为 BC 的中点, P 为空间中一点, 且 PD 与平面 $ABCD$ 所成的角为 30° , PM 与平面 $ABCD$ 所成的角为 60° , 则 P 在平面 $ABCD$ 上射影的轨迹长度为 $3\sqrt{5}\pi$. 其中所有正确结论的序号是_____.



四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_5 = 5, S_7 = 28$.

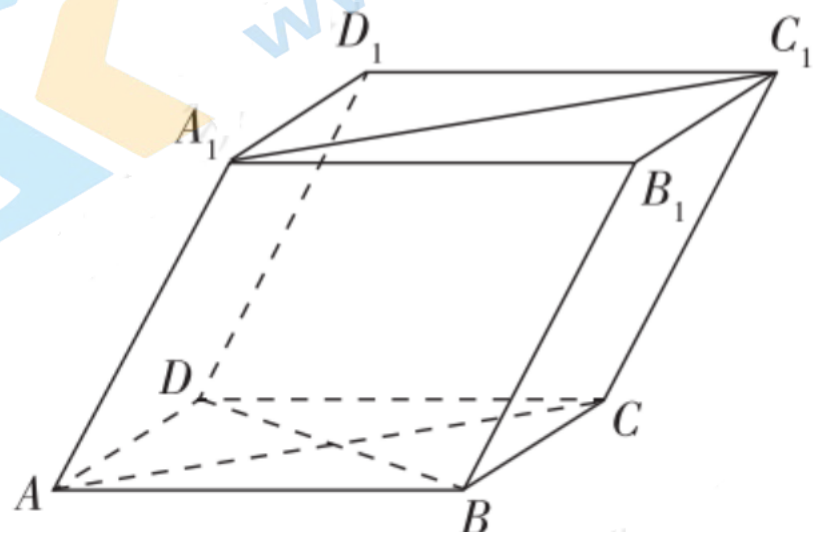
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = 2^n$, 求数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和.

18. (本小题满分 12 分) 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 $A_1A = AB = AD = 2$, $\angle A_1AB = \angle A_1AD$.

(1) 证明 $BD \perp$ 平面 A_1ACC_1 ;

(2) 当三棱锥 $A-B_1CD_1$ 体积最大时, 求二面角 D_1-AC-B_1 的余弦值.



19. (本小题满分 12 分) 2023 年第 19 届亚运会在中国浙江杭州举行, 杭州亚运会以“中国新时代 杭州新亚运”为定位、“中国特色、浙江风采、杭州韵味、精彩纷呈”为目标, 秉持“绿色、智能、节俭、文明”的办会理念, 坚持“以杭州为主、浙江全省共享”的办赛原则. 会前, 为喜迎亚运, 某商场组织了“文明迎亚运”知识竞赛活动. 每名参赛者需要回答 A、B、C 三道题目, 通过答题获得积分, 进而获得相应的礼品. 每题答错得 0 分, 答对 A 题目得 1 分, 答对 B、C 题目分别得 2 分.

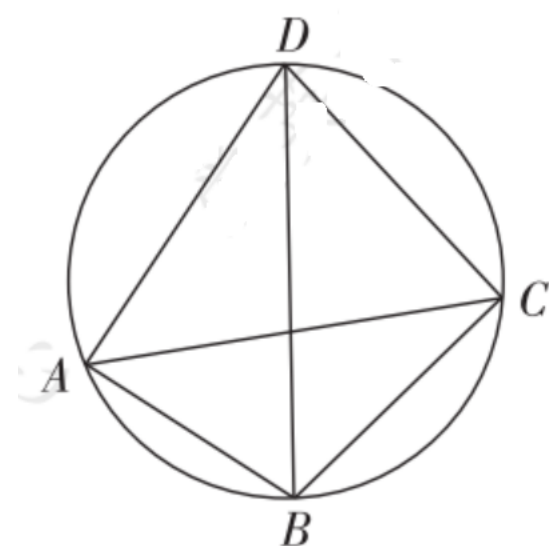
每名参赛者的最后得分为每题得分的累积得分. 已知一名参赛者答对 A 题目的概率为 $\frac{2}{3}$, 答

对 B、C 题目的概率均为 $\frac{1}{3}$ ，并且每题答对与否相互独立。

- (1) 求该名参赛者恰好答对两道题目的概率；
- (2) 求该名参赛者最终累积得分的分布列和数学期望。

20. (本小题满分 12 分) 在圆内接四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AB=2, AD=3, AC$ 平分 $\angle BAD$.

- (1) 若 $BC=2$, 求 BD 的长度;
- (2) 求 $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$ 的值.



21. (本小题满分 12 分) 已知动点 M 在 $x^2 + y^2 = 4$ 上, 过 M 作 x 轴的垂线, 垂足为 N , 若 H 为 MN 中点.

- (1) 求点 H 的轨迹方程;
- (2) 过 $A(0, \frac{1}{2})$ 作直线 l 交 H 的轨迹于 P, Q 两点, 并且交 x 轴于 B 点. 若 $\vec{PA} = \lambda \vec{PB}$,

$\vec{QA} = \mu \vec{QB}$, 求证: $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$ 为定值.

22. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = x \ln x + a(x^3 - x)$.

- (1) 讨论 $\frac{f(x)}{x}$ 的单调性;
- (2) 已知 $g(x) = 2x - e^{x-1} - 1$, 若 $f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 求 a 的值.