2023 北京朝阳高三二模

数　　学

2023. 5

（考试时间 120 分钟　满分 150 分）

本试卷分为选择题 40 分和非选择题 110 分

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\,|\,x\leqslant 5\}$，集合 $B=\{x\,|\,x(x-2)>0\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\{2,3,4\}$　（B）$\{3,4,5\}$　（C）$[2,5)$　（D）$(2,5]$

（2）若复数 $z=(m+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})\ (m\in\mathbf{R})$ 为纯虚数，则 $m=$

（A）-1　（B）0　（C）1　（D）2

（3）已知双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(b>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=\sqrt{3}x$，则 $b=$

（A）$\dfrac{1}{3}$　（B）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　（C）$\sqrt{3}$　（D）3

（4）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 2^n-1，则 $a_5=$

（A）9　（B）16　（C）31　（D）33

（5）已知 $a=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}},b=\ln\dfrac{1}{2},c=\sin\dfrac{1}{2}$，则

（A）$a>b>c$　（B）$b>c>a$　（C）$c>a>b$　（D）$a>c>b$

（6）已知 $a\in\mathbf{R}$，则“$a=0$”是“函数 $f(x)=|x-a|$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增”的

（A）充分而不必要条件　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　（D）既不充分也不必要条件

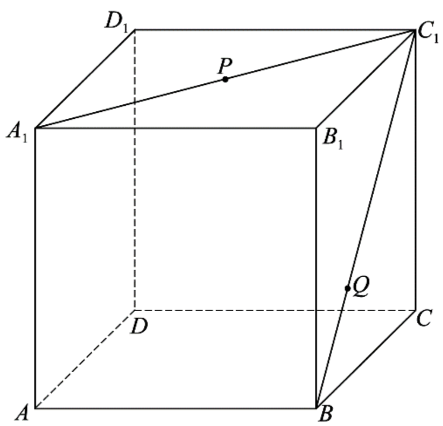
（7）在 $\triangle ABC$ 中，M,N 分别是 AB,AC 的中点，若 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CM}+\mu\overrightarrow{BN}\ (\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，则 $\lambda+\mu=$

（A）-2　（B）-1　（C）1　（D）2

（8）设函数 $f(x)=a\sin 2x+b\cos 2x$（$a,b\in\mathbf{R},ab\neq 0$），若 $f(x)\leqslant|f(\frac{\pi}{6})|$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则

（A）$f(x)-f(-x)=0$　（B）$f(x)+f(-x)=0$

（C）$f(-\frac{\pi}{6}-x)-f(x)=0$　（D）$f(-\frac{\pi}{6}-x)+f(x)=0$



（9）如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为线段 A_1C_1 的中点，Q 为线段 BC_1 上的动点，则下列结论正确的是

（A）存在点 Q，使得 $PQ\,//\,BD$

（B）存在点 Q，使得 $PQ\perp$ 平面 AB_1C_1D

（C）三棱锥 $Q-APD$ 的体积是定值

（D）存在点 Q，使得 PQ 与 AD 所成的角为 $\dfrac{\pi}{6}$

（10）已知函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=4-2^{-x}$．若关于 x 的方程 $f(f(x))=m$ 有且仅有两个不相等的实数解，则实数 m 的取值范围是

（A）$(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$　　（B）$[-3,0)\cup(0,3]$

（C）$(-4,-3]\cup[3,4)$　　（D）$(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+1}}$ 的定义域为____．

（12）已知 $(1+3x)^n\ (n\in\mathbf{N}^*)$ 的展开式中所有项的二项式系数的和为 64，则 $n=$_____，展开式中 x^3 的系数为____．

（13）将函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位得到函数 $g(x)$ 的图象，若 $g(x)$ 在区间 $[0,m]$ 上有且仅有一个零点，则实数 m 的一个取值为____．

（14）已知圆 $A:(x-3)^2+(y+2)^2=1$，抛物线 $C:y^2=4x$，则圆心 A 到抛物线 C 的准线的距离为____；过圆心 A 的直线与圆 A 相交于 P，Q 两点，与抛物线 C 相交于 M，N 两点，若 $|MP|=|QN|$，则 $|MN|=$____．

（15）斐波那契数列又称为黄金分割数列，在现代物理、化学等领域都有应用．斐波那契数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a_2=1$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\ (n\geqslant 3,n\in\mathbf{N}^*)$．给出下列四个结论：

① 存在 $m\in\mathbf{N}^*$，使得 a_m，a_{m+1}，a_{m+2} 成等差数列；

② 存在 $m\in\mathbf{N}^*$，使得 a_m，a_{m+1}，a_{m+2} 成等比数列；

③ 存在常数 t，使得对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 a_n，ta_{n+2}，a_{n+4} 成等差数列；

④ 存在正整数 $i_1,i_2,\cdots,i_m$，且 $i_1<i_2<\cdots<i_m$，使得 $a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_m}=2023$．

其中所有正确结论的序号是____．

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

在△ABC 中，$a=4$，$b=5$，$\cos C=\dfrac{1}{8}$．

（Ⅰ）求△ABC 的面积；

（Ⅱ）求 c 及 $\sin A$ 的值．

（17）（本小题 13 分）

果酒由水果本身的糖分被酵母菌发酵而成．研究表明，果酒中的芳香气味主要来自于酯类化合物．某学习小组在实验中使用了 3 种不同的酵母菌（A 型，B 型，C 型）分别对三组（每组 10 瓶）相同的水果原液进行发酵，一段时间后测定发酵液中某种酯类化合物的含量．实验过程中部分发酵液因被污染而废弃，最终得到数据如下（“X”表示该瓶发酵液因废弃造成空缺）：

酵母菌类型	该酯类化合物的含量($\mu g/L$)									
A 型	X	2747	2688	X	X	2817	2679	X	2692	2721
B 型	1151	X	1308	X	994	X	X	X	1002	X
C 型	2240	X	X	2340	2318	X	2519	2162	X	X

根据发酵液中该酯类化合物的含量 t ($\mu g/L$) 是否超过某一阈值来评定其品质，其标准如下：

酵母菌类型	品质高	品质普通
A 型	$t>2700$	$t\leqslant 2700$
B 型	$t>1000$	$t\leqslant 1000$
C 型	$t>2300$	$t\leqslant 2300$

假设用频率估计概率．

（Ⅰ）从样本未废弃的发酵液中随机抽取一瓶，求其品质高的概率；

（Ⅱ）设事件 D 为“从样本含 A 型，B 型，C 型酵母菌的未废弃的发酵液中各随机抽取一瓶，这三瓶中至少有一瓶品质高”，求事件 D 发生的概率 $P(D)$；

（Ⅲ）设事件 E 为“从样本未废弃的发酵液中不放回地随机抽取三瓶，这三瓶中至少有一瓶品质高”，试比较事件 E 发生的概率 $P(E)$ 与（Ⅱ）中事件 D 发生的概率 $P(D)$ 的大小．（结论不要求证明）

（18）（本小题 14 分）

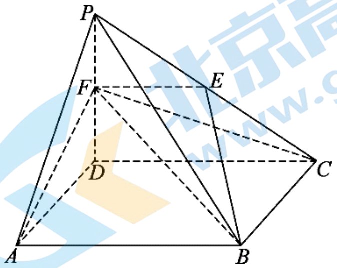
如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，$PD\perp$底面 $ABCD$，且 $PD=AD=2$，E 是 PC 的中点，平面 ABE 与线段 PD 交于点 F．

（Ⅰ）证明：F 为 PD 的中点；

（Ⅱ）再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求直线 BE 与平面 PAD 所成角的正弦值．

条件①：三角形 BCF 的面积为 $\sqrt{10}$；

条件②：三棱锥 $P-BCF$ 的体积为1．



注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分．

（19）（本小题 15 分）

已知点 $(1,\frac{3}{2})$ 在椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 上，且 E 的离心率为 $\frac{1}{2}$．

（Ⅰ）求 E 的方程；

（Ⅱ）设 F 为椭圆 E 的右焦点，点 $P(m,n)$ 是 E 上的任意一点，直线 PF 与直线 $3mx+4ny=0$ 相交于点 Q，求 $|PQ|$ 的值．

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\ln x+2a\sqrt{x}\ \ (a\in\mathbf{R})$．

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，

（ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（ⅱ）证明：$f(x)\leqslant 2x$；

（Ⅱ）若函数 $g(x)=f(x)-2x$ 的极大值大于 0，求 a 的取值范围．

（21）（本小题 15 分）

已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\max\{a_{n+1},a_{n+2}\}-\min\{a_{n+1},a_{n+2}\}\,(n=1,2,3\cdots)$，其中 $\max\{x,y\}$ 表示 x,y 中最大的数，$\min\{x,y\}$ 表示 x,y 中最小的数.

（Ⅰ）当 $a_1=1,a_2=2$ 时，写出 a_4 的所有可能值；

（Ⅱ）若数列 $\{a_n\}$ 中的项存在最大值，证明：0 为数列 $\{a_n\}$ 中的项；

（Ⅲ）若 $a_n>0\,(n=1,2,3\cdots)$，是否存在正实数 M，使得对任意的正整数 n，都有 $a_n\leqslant M$？如果存在，写出一个满足条件的 M；如果不存在，说明理由.

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）B　（2）C　（3）C　（4）B　（5）D

（6）A　（7）A　（8）D　（9）B　（10）C

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$[1,+\infty)$　（12）6　540　（13）$\frac{3\pi}{8}$（答案不唯一）

（14）4　8　（15）①③④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）因为在$\triangle ABC$中，$\cos C=\frac{1}{8}$，又$0<C<\pi$，

所以$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$.

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 4\times 5\times\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$.　………6 分

（Ⅱ）由余弦定理$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，得$c^2=16+25-2\times 4\times 5\times\frac{1}{8}=36$.

又$c>0$，所以$c=6$.

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，得

$$\sin A=\frac{a\sin C}{c}=\frac{4\times\frac{3\sqrt{7}}{8}}{6}=\frac{\sqrt{7}}{4}.$$　………13 分

（17）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）设事件F为“从样本未废弃的发酵液中随机抽取一瓶，其品质高”.

由题可知，未废弃的发酵液共$6+4+5=15$瓶，其中品质高的有9瓶，

则$P(F)=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$.　………4 分

（Ⅱ）设事件A为“从样本含 A 型酵母菌的未废弃的发酵液中随机抽取一瓶，其品质高”，

事件B为“从样本含 B 型酵母菌的未废弃的发酵液中随机抽取一瓶，其品质高”，

事件C为“从样本含 C 型酵母菌的未废弃的发酵液中随机抽取一瓶，其品质高”.

由题可知，$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{3}{4}$，$P(C)=\frac{3}{5}$.

则$P(D)=1-P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=1-P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})=1-(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{3}{4})\times(1-\frac{3}{5})=\frac{19}{20}$.　…10 分

（Ⅲ）$P(E)>P(D)$.　………13 分

（18）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）在矩形$ABCD$中，$AB//DC$，

又$AB\not\subset$平面DCP，$DC\subset$平面DCP，

所以$AB//$平面DCP.

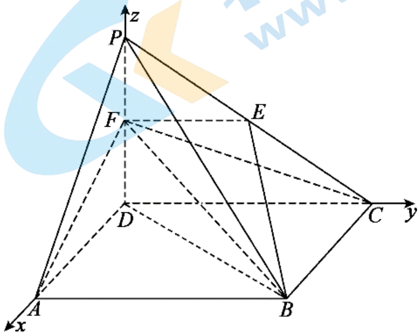
又因为$AB\subset$平面ABE，且平面$ABE\cap$平面$DCP=FE$，

所以$AB//FE$．故$FE//DC$.

又因为E是PC的中点，所以F是PD的中点.　………5 分

（Ⅱ）选择条件①：三角形BCF的面积为$\sqrt{10}$.

因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PD\perp BC$.
又 $DC\perp BC$，且 $DC\cap PD=D$，所以 $BC\perp$ 平面 DCP.
又 $CF\subset$ 平面 DCP，所以 $BC\perp CF$.
因此 $S_{\triangle BCF}=\dfrac{1}{2}BC\cdot CF=\sqrt{10}$. 所以 $CF=\sqrt{10}$，即 $\sqrt{CD^2+DF^2}=\sqrt{10}$.
故 $CD=3$.
因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，
所以 $PD\perp AD$，$PD\perp DC$.
又在矩形 $ABCD$ 中，$AD\perp DC$，
所以 DA，DC，DP 两两垂直.
如图建立空间直角坐标系 $D-xyz$，



则 $B(2,3,0),C(0,3,0),P(0,0,2),E(0,\dfrac{3}{2},1)$.
所以 $\overrightarrow{BE}=(-2,-\dfrac{3}{2},1)$.
平面 PAD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,1,0)$.
设直线 BE 与平面 PAD 所成角为 θ，
则 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{BE},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{BE}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{29}}{2}}=\dfrac{3}{29}\sqrt{29}$.
故直线 BE 与平面 PAD 所成角的正弦值为 $\dfrac{3}{29}\sqrt{29}$. ………14 分
选择条件②：三棱锥 $P-BCF$ 的体积为 1.
因为 F 为 PD 的中点，
所以 $V_{F-BCD}=V_{P-BCF}=1$，即 $\dfrac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot DF=1$，得 $CD=3$.
下同选择条件①.

（19）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）由题意得 $\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1,\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{3},\\ c=1.\end{cases}$

所以椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ………5 分

（Ⅱ）因为点 $P(m,n)$ 是椭圆 E 上的任意一点，所以 $3m^2+4n^2=12$.

①当 $m=1$ 时，点 $P(1,\dfrac{3}{2})$ 或 $P(1,-\dfrac{3}{2})$.

当点 P 为 $(1,\dfrac{3}{2})$ 时，直线 PF 与直线 $x+2y=0$ 相交于点 $Q(1,-\dfrac{1}{2})$. 此时 $|PQ|=2$.

当点 P 为 $(1,-\dfrac{3}{2})$ 时，直线 PF 与直线 $x-2y=0$ 相交于点 $Q(1,\dfrac{1}{2})$. 此时 $|PQ|=2$.

②当 $m\neq1$ 时，直线 PF 的方程为 $y=\dfrac{n}{m-1}(x-1)$.

由 $\begin{cases} y=\dfrac{n}{m-1}(x-1), \\ 3mx+4ny=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\dfrac{4n^2}{12-3m}, \\ y=\dfrac{-mn}{4-m}. \end{cases}$ 所以点 $Q(\dfrac{4n^2}{12-3m},\dfrac{-mn}{4-m})$.

所以 $|PQ|^2=(m-\dfrac{4n^2}{12-3m})^2+(n-\dfrac{-mn}{4-m})^2=(\dfrac{12m-3m^2-4n^2}{12-3m})^2+(\dfrac{4n-mn+mn}{4-m})^2$

$=(\dfrac{4m-4}{4-m})^2+(\dfrac{4n}{4-m})^2=\dfrac{(4m-4)^2+16n^2}{(4-m)^2}$

$=\dfrac{(4m-4)^2+4(12-3m^2)}{(4-m)^2}=\dfrac{4(m^2-8m+16)}{(4-m)^2}=\dfrac{4(m-4)^2}{(4-m)^2}=4$.

所以 $|PQ|=2$.

综上，$|PQ|=2$. ………15 分

（20）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）（ⅰ）当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln x+2\sqrt{x}$，

所以 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，则 $f'(1)=2$.

又 $f(1)=2$.

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为：$y-2=2(x-1)$，

即 $2x-y=0$. ………4 分

（ⅱ）设函数 $g(x)=f(x)-2x \ \ (a\in\mathbf{R})$，定义域为 $(0,+\infty)$，

当 $a=1$ 时，$g(x)=\ln x+2\sqrt{x}-2x$.

所以 $g'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-2=\dfrac{-(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{x}$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 的单调递减区间为 $(1,+\infty)$.

所以 $g(x)_{\max}=g(1)=0$.

所以 $g(x)\leqslant 0$.

故 $f(x)\leqslant 2x$. ………9 分

（Ⅱ）① 当 $a\leqslant 1$ 时，$f(x)\leqslant \ln x+2\sqrt{x}\leqslant 2x$，

所以 $g(x)\leqslant 0$，与 $g(x)$ 的极大值大于 0 矛盾，不符合题意.

② 当 $a>1$ 时，$g'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{\sqrt{x}}-2=\dfrac{-2x+a\sqrt{x}+1}{x}$，

令 $g'(x)=0$，得 $\sqrt{x}=\dfrac{a+\sqrt{a^2+8}}{4}$，或 $\dfrac{a-\sqrt{a^2+8}}{4}$（舍）.

设 $x_0=(\dfrac{a+\sqrt{a^2+8}}{4})^2$，则 $x_0>1$.

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 的单调递增区间为 $(0,x_0)$，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 的单调递减区间为 $(x_0,+\infty)$.

所以 x_0 为 $g(x)$ 的极大值点，且 $x_0>1$，$a\sqrt{x_0}=2x_0-1$.

此时极大值 $g(x_0)=\ln x_0+2a\sqrt{x_0}-2x_0=\ln x_0+2(2x_0-1)-2x_0=\ln x_0+2x_0-2$，

因为 $x_0>1$，所以 $\ln x_0>0$， $2x_0-2>0$．

所以 $g(x_0)>0$，符合题意．

综上，a 的取值范围为 $(1,+\infty)$．　　　　………15 分

（21）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）a_4 的所有可能值为 $1,3,5$．　　　　………4 分

（Ⅱ）因为 $\max\{a_{n+1},a_{n+2}\}\geqslant\min\{a_{n+1},a_{n+2}\}$，所以 $a_n\geqslant 0\ (n=1,2,\cdots)$．

所以 $\min\{a_n,a_{n+1}\}\geqslant 0\ (n=1,2,\cdots)$．

因为无穷数列 $\{a_n\}$ 中的项存在最大值，所以存在 $n_0\in\mathbf{N}^*$ 使得 $a_n\leqslant a_{n_0}\ (n=1,2,\cdots)$．

因为 $a_{n_0}=\max\{a_{n_0+1},a_{n_0+2}\}-\min\{a_{n_0+1},a_{n_0+2}\}\leqslant\max\{a_{n_0+1},a_{n_0+2}\}\leqslant a_{n_0}$，

所以 $\min\{a_{n_0+1},a_{n_0+2}\}=0$．

故存在 $m\in\{n_0+1,n_0+2\}$ 使得 $a_m=0$．

所以 0 为数列 $\{a_n\}$ 中的项．　　　　………9 分

（Ⅲ）不存在正实数 M，使得对任意的正整数 n，都有 $a_n\leqslant M$．理由如下．

因为 $a_n>0\ (n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $a_n\neq a_{n+1}\ (n=2,3,\cdots)$．

设集合 $S=\{n\,|\,a_n>a_{n+1},n\geqslant 1\}$．

（1）若 $S=\{n\,|\,a_n>a_{n+1},n\geqslant 1\}=\varnothing$，则 $a_1\leqslant a_2$，$a_i<a_{i+1}\ (i=2,3,\cdots)$．

对任意 $M>0$，取 $n_1=[\dfrac{M}{a_1}]+2$（其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数），

则当 $n>n_1$ 时，

$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_3-a_2)+a_2\ =a_{n-2}+a_{n-3}+\cdots+a_1+a_2\geqslant(n-1)a_1>M$．

（2）若 $S=\{n\,|\,a_n>a_{n+1},n\geqslant 1\}\neq\varnothing$，且 S 为有限集，

设 $m=\max\{n\,|\,a_n>a_{n+1},n\geqslant 1\}$，则 $a_{m+i}<a_{m+i+1}\ (i=1,2,\cdots)$．

对任意 $M>0$，取 $n_2=[\dfrac{M}{a_{m+1}}]+m+1$（其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数），

则当 $n>n_2$ 时，

$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_{m+2}-a_{m+1})+a_{m+1}$

$\quad=a_{n-2}+a_{n-3}+\cdots+a_m+a_{m+1}>(n-m)a_{m+1}>M$．

（3）若 $S=\{n\,|\,a_n>a_{n+1},n\geqslant 1\}\neq\varnothing$，且 S 为无限集，

设 $p_1=\min\{n\,|\,a_n>a_{n+1},n\geqslant 1\}$，$p_{i+1}=\min\{n\,|\,a_n>a_{n+1},n>p_i\}\ (i=1,2,\cdots)$．

若 $p_{i+1}-p_i=1$，则 $a_{p_i}>a_{p_i+1}>a_{p_i+2}$，又 $a_{p_i}<\max\{a_{p_i+1},a_{p_i+2}\}$，矛盾．

所以 $p_{i+1}-p_i\geqslant 2\ (i=1,2,\cdots)$．

记 $m_i=a_{p_i+1}\ (i=1,2,\cdots)$．

当 $p_{i+1}-p_i=2$ 时，$a_{p_i}>a_{p_i+1}$，$a_{p_i+1}<a_{p_i+2}$，$a_{p_i+2}>a_{p_i+3}$．

因为 $a_{p_i+1}=a_{p_i+2}-a_{p_i+3}$，所以 $m_{i+1}=a_{p_{i+1}+1}=a_{p_i+2}-a_{p_i+1}=a_{p_i}>a_{p_i+1}=m_i$．

当 $p_{i+1}-p_i\geqslant 3$ 时，$a_{p_i}>a_{p_i+1}$，$a_{p_i+1}<a_{p_i+2}<\cdots<a_{p_{i+1}}$，$a_{p_{i+1}}>a_{p_{i+1}+1}$．

因为 $a_{p_{i+1}-1}=a_{p_{i+1}}-a_{p_{i+1}+1}$，所以 $m_{i+1}=a_{p_{i+1}+1}=a_{p_{i+1}}-a_{p_{i+1}-1}=a_{p_{i+1}-2}\geqslant a_{p_i+1}=m_i$．

所以 $m_i\leqslant m_{i+1}\ (i=1,2,\cdots)$．

因为 $a_{p_{i+1}}=a_{p_{i+1}+2}-a_{p_{i+1}+1}$，

所以 $a_{p_{i+1}+2}=a_{p_{i+1}}+a_{p_{i+1}+1}=a_{p_{i+1}}+m_{i+1}\geqslant a_{p_{i+1}}+m_1\geqslant a_{p_i+2}+m_1\ (i=1,2,\cdots)$.

所以 $a_{p_{i+1}+2}-a_{p_i+2}\geqslant m_1\ (i=1,2,\cdots)$，且 $a_{p_1+2}>a_{p_1+1}=m_1$.

对任意 $M>0$，

取 $n_3=[\dfrac{M}{m_1}]+1$（其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数），则当 $k>n_3$ 时，

$$a_{p_k+2}=(a_{p_k+2}-a_{p_{k-1}+2})+(a_{p_{k-1}+2}-a_{p_{k-2}+2})+\cdots+(a_{p_2+2}-a_{p_1+2})+a_{p_1+2}$$
$$\geqslant(k-1)m_1+a_{p_1+2}>km_1>M.$$

综上，不存在正实数 M，使得对任意的正整数 n，都有 $a_n\leqslant M$. ………15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！

微信搜一搜

京考一点通