2022 北京五十七中高一 12 月月考

数　　学

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题（共 10 个题，每题 4 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.）

1. 设 $A=\left\{x\left|\frac{1}{9}<3^x<27\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|x^2+2x-8<0\right.\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $(-4,3)$　　B. $(-3,2)$　　C. $(-2,2)$　　D. $(-2,3)$

2. 下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是.

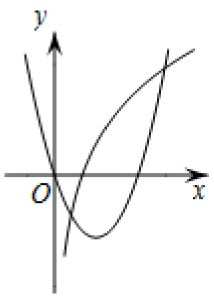
A. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$　　B. $y=-x^2$　　C. $y=\log_2 x$　　D. $y=|x|+1$

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^{x+2}-e^2\left(x\le 2\right)\\3\ln x+3\left(x>2\right)\end{cases}$，那么 $f\left(\ln 3\right)$ 值是（　　）

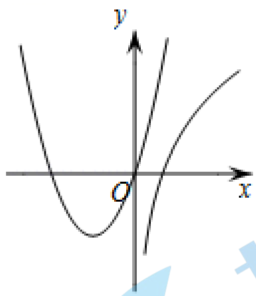
A. 0　　B. 1　　C. $2e^2$　　D. $3e^2$

4. 对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）与二次函数 $y=$（$a-1$）x^2-x 在同一坐标系内的图象可能是（　　）

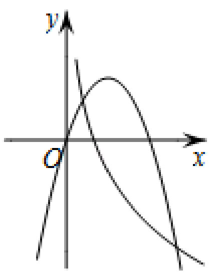
A



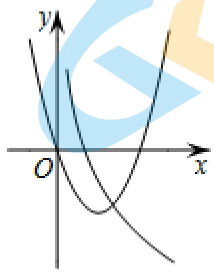
B.



C.



D.



5. 已知函数 $f\left(x\right)=\frac{6}{x}-\log_2 x$，在下列区间中，包含 $f\left(x\right)$ 零点的区间是

A. $0,1$　　B. $1,2$　　C. $\left(2,4\right)$　　D. $\left(4,+\infty\right)$

6. 已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$，则“$\log_a\left(a-b\right)>1$”是“$\left(a-1\right)\cdot b<0$”成立的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 已知函数 $f\left(x\right)=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)-5, x\in\left[-2020,2020\right]$ 的最大值为 M，最小值为 m，则 $M+m=$（　）

A. -5　　B. -10　　C. 5　　D. 10

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+4ax, & x\le 1\\ (2a+3)x-4a+5, & x>1\end{cases}$，若 $f(x)$ 在 R 上是增函数，则实数 a 的取值范围是（　）

A. $(\frac{1}{2}$，$1]$　　B. $[\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}]$　　C. $(\frac{1}{2}$，$+\infty)$　　D. $[1$，$2]$

9. 函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 单调递增，且 $f\left(x+3\right)$ 关于 $x=-3$ 对称，若 $f\left(-2\right)=1$，则 $f\left(x-2\right)\le 1$ 的 x 的取值范围是（　）

A. $\left[-2,2\right]$　　B. $\left(-\infty,-2\right]\cup\left[2,+\infty\right)$

C. $\left(-\infty,0\right]\cup\left[4,+\infty\right)$　　D. $\left[0,4\right]$

10. 重庆有一玻璃加工厂，当太阳通过该厂生产的某型防紫外线玻璃时，紫外线将被过滤为原来的 $\frac{1}{3}$，而太阳通过一块普通的玻璃时，紫外线只会损失 10%，设太阳光原来的紫外线为 $k\left(k>0\right)$，通过 x 块这样的普通玻璃后紫外线为 y，则 $y=k\cdot 0.9^x\left(x\in N^*\right)$，那么要达到该厂生产的防紫外线玻璃同样的效果，至少通过这样的普通玻璃块数为（　）（参考数据：$\lg 3\approx 0.477$）

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题（共 8 题，每题 4 分，共 32 分）

11. 函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-2, & x\leqslant 0\\ \ln x, & x>0\end{cases}$ 的零点个数是__________.

12. 函数 $y=\lg x+\frac{1}{x-1}$ 的定义域是__________.

13. 已知 $a=\log_2\frac{1}{3}, b=2^{\frac{1}{3}}, c=\left(\frac{1}{3}\right)^2$，则 a,b,c 的大小关系是____________________.(用“<”连结)

14. 已知函数 $y=a^{x+2}-2\ \left(a>0,a\ne 1\right)$ 的图象恒过定点 A，则定点 A 的坐标为______.

15. 若函数 f（x）$=\sqrt{x^2+ax+a}$ 的定义域为 R，则实数 a 的取值范围是：______________.

16. 对任意正实数 x,y，不等式 $x+4y\ge m\sqrt{xy}$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是__________.

17. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 R　奇函数，且当 $x>0$ 时，$f\left(x\right)=\begin{cases}\left|\log_2 x\right|, 0<x\leqslant 2\\ \frac{1}{2}x^2-4x+7, x>2\end{cases}$，若函数

$y=f(x)-a(0<a<1)$ 有六个零点，分别记为 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6，则 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$ 的取值范围是______________.

18. 若函数 $f(x)$ 满足对于定义域 D 内的任意一个自变量 x_0，都有 $f\left(x_0\right)\in D$，则称 $f(x)$ 在 D 上封闭. 若定义域 $D=(0,1)$，则函数① $f_1(x)=3x-1$；② $f_2(x)=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1$；③ $f_3(x)=\frac{1}{2^x}$；④ $f_4(x)=x^{\frac{1}{2}}$，其中在 D 上封闭的是_______.（填序号）

三、解答题（共 6 个解答题，满分 78 分）

19. 已知函数 $f(x)=x-\frac{1}{x}$.

（1）用函数单调性的定义证明 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是增函数；

（2）解不等式 $f\left(2^{x+1}\right)>f\left(4^x\right)$.

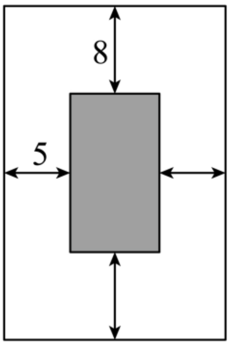
20. 已知函数 $f(x)=\frac{2^x-a}{2^x+1}$ 为奇函数.

（1）函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）若 $f(x)<0.5$，求 x　范围；

（3）求函数 $f(x)$ 的值域.

21. 设计一幅宣传画，要求画面面积为 400cm^2，面的上下各 8cm 空白，左右各留 5cm 空白，怎样设计画面的高与宽，才能使宣传画所用纸张的面积最小，最小面积是多少？



22. 已知函数 $f\left(x\right)=2^x\left(x\in\mathbf{R}\right)$.

（1）解不等式 $f\left(x\right)-f\left(2x\right)>16-9\times2^x$；

（2）若函数 $f\left(x\right)=g\left(x\right)+h\left(x\right)$，其中 $g\left(x\right)$ 为奇函数，$h\left(x\right)$ 为偶函数，解不等式 $g\left(x^2-2x+4\right)+g\left(-4\right)\le0$.

23. 已知函数 $f(x)=\log_a(1+ax)(a>0,a\neq1)$.

（1）设 $g(x)=f(x)-\log_2(1-2x)$，当 $a=2$ 时，求函数 $g(x)$ 的定义域，判断并证明函数 $g(x)$ 的奇偶性；

（2）是否存在实数 a，使函数 $f(x)$ 在 $[-4,-2]$ 上单调递减，且最小值为 1？若存在，求出 a 的值；若不存在，请说明理由.

24. 若函数 $f(x)$满足：对于 s，$t\in[0,+\infty)$，都有 $f(s)\geq 0$，$f(t)\geq 0$，且 $f(s)+f(t)\leq f(s+t)$，则称函数 $f(x)$为"T 函数".

(I)试判断函数 $f_1(x)=x^2$ 与 $f_2(x)=\lg(x+1)$ 否是"T 函数"，并说明理由；

(II)设 $f(x)$为"T 函数"，且存在 $x_0\in[0,+\infty)$，使 $f(f(x_0))=x_0$.求证：$f(x_0)=x_0$；

(III)试写出一个"T 函数" $f(x)$，满足 $f(1)=1$，且使集合$\{y|y=f(x),0\leq x\leq 1\}$中元素的个数最少.（只需写出结论）

参考答案

一、选择题（共 10 个题，每题 4 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.）

1. 【答案】C

【解析】

【分析】

求得两集合，再利用交集运算得解

【详解】$A=\left\{x\left|\frac{1}{9}<3^x<27\right.\right\}=\left\{x\left|3^{-2}<3^x<3^3\right.\right\}=\left\{x\left|-2<x<3\right.\right\}$

$B=\left\{x\left|x^2+2x-8<0\right.\right\}=\left\{x\left|(x+4)(x-2)<0\right.\right\}=\left\{x\left|-4<x<2\right.\right\}$

$A\cap B=(-2,2)$

故选：C

【点睛】利用指数单调性求得集合 A ，交集运算口诀"越交越少、公共部分"

2. 【答案】D

【解析】

【详解】选项 A 中，函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是非奇非偶函数，故 A 错误；

选项 B 中，函数 $y=-x^2$ 是偶函数，在 $(-\infty,0)$ 上是增函数，在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，故 B 错误；

选项 C 中，函数 $y=\log_2 x$ 是非奇非偶函数，故 C 错误；

选项 D 中，函数 $y=|x|+1$ 偶函数，当 $x>0$ 时，$y=x+1$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 D 正确．综上选 D .

3. 【答案】C

【解析】

【分析】利用解析式直接计算即可.

【详解】由题意，$\ln 3<\ln e^2=2$，$\therefore f(\ln 3)=e^{2+\ln 3}-e^2=e^2\cdot e^{\ln 3}-e^2=2e^2$.

故选：C.

4. 【答案】A

【解析】

【分析】①当 $0<a<1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 为减函数，二次函数开口向下，且其对称轴为 $x=\frac{1}{2(a-1)}<0$，故排除 C 与 D；②当 $a>1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 为增函数，二次函数开口向上，且其对称轴为 $x=\frac{1}{2(a-1)}>0$，故 B 错误.

【详解】解：由对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）与二次函数 $y=(a-1)x^2-x$ 可知，

①当 $0<a<1$ 时，此时 $a-1<0$，对数函数 $y=\log_a x$ 为减函数，

而二次函数 $y=(a-1)x^2-x$ 开口向下，且其对称轴 $x=\dfrac{1}{2(a-1)}<0$，故排除 C 与 D；

②当 $a>1$ 时，此时 $a-1>0$，对数函数 $y=\log_a x$ 为增函数，

而二次函数 $y=(a-1)x^2-x$ 开口向上，且其对称轴为 $x=\dfrac{1}{2(a-1)}>0$，故 B 错误，而 A 符合题意.

故选：A.

5. 【答案】C

【解析】

【详解】因为 $f(2)=3-1>0$，$f(4)=\dfrac{3}{2}-2<0$，所以由根的存在性定理可知：选 C.

考点：本小题主要考查函数的零点知识，正确理解零点定义及根的存在性定理是解答好本类题目的关键.

6. 【答案】A

【解析】

【分析】

$\log_a(a-b)>1\Leftrightarrow\begin{cases}0<a<1\\0<a-b<a\end{cases}$，或$\begin{cases}a>1\\a-b>a\end{cases}$. 化简即可判断出结论.

【详解】解：由 $\log_a(a-b)>1$

当 $a>1$ 时，$a-b>a$ 得 $b<0$，推出 $(a-1)b<0$，

当 $0<a<1$ 时，$0<a-b<a$ 得 $b>0$，推出 $(a-1)b<0$，

则 $\log_a(a-b)>1$ 是 $(a-1)b<0$ 的充分条件，

但当 $(a-1)b<0$ 时不一定能推出 $\log_a(a-b)>1$（比如：$0<a<1$，$b>1$，这时 $a-b<0$ 无意义）

则 $\log_a(a-b)>1$ 是 $(a-1)b<0$ 的不必要条件，

故选：A.

【点睛】本题考查了函数的单调性、不等式的解法、简易逻辑的判定方法，考查了推理能力与计算能力，属于基础题.

7. 【答案】B

【解析】

【分析】构造新函数 $g(x)=f(x)+5$，证明它是奇函数，然后利用奇函数的性质求值.

【详解】设 $g(x)=f(x)+5=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$，

则

$g(x)+g(-x)=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)=\ln\left[\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\right]=\ln 1=0$，

$\therefore g(-x)=-g(x)$，$g(x)$是奇函数，

又$g(x)_{\min}=f(x)_{\min}+5=m+5$，$g(x)_{\max}=f(x)_{\max}+5=M+5$，

$\therefore g(x)_{\min}+g(x)_{\max}=M+5+m+5=0$，$M+m=-10$.

故选：B.

8. 【答案】B

【解析】

【分析】

根据函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+4ax, & x\le 1\\ (2a+3)x-4a+5, & x>1\end{cases}$，$f(x)$在 R 上是增函数，则每一段都为增函数，且 $x=1$ 左侧的函数值不大于右侧的函数值求解.

【详解】因为函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+4ax, & x\le 1\\ (2a+3)x-4a+5, & x>1\end{cases}$，$f(x)$在 R 上是增函数，

所以$\begin{cases}2a\ge 1\\ 2a+3>0\\ -1+4a\le(2a+3)\times 1-4a+5\end{cases}$，

解得$\frac{1}{2}\le a\le\frac{3}{2}$，

故选：B

9. 【答案】D

【解析】

【分析】由函数的对称性可求出函数关于 y 轴对称，再由单调性将 $f(x-2)\le 1$转化成不等式求解即可.

【详解】解：因为 $f(x+3)$ 的图像关于直线 $x=-3$ 对称，

所以 $f(x)$ 图像关于 y 轴对称，则有 $f(-2)=f(2)=1$，

又 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上单调递增，

所以由 $f(x-2)\le 1$ 可得 $-2\leqslant x-2\leqslant 2$，

解得 $0\le x\le 4$，

故选：D.

10. 【答案】C

【解析】

【分析】

由题意得 $k\cdot 0.9^x<\frac{k}{3}(k>0)$，化简得 $0.9^x<\frac{1}{3}$，两边同时取常用对数得 $x\lg 0.9<\lg\frac{1}{3}$，利用对数的运算

性质可得选项.

【详解】由题意得 $k\cdot 0.9^{x}<\frac{k}{3}(k>0)$，化简得 $0.9^{x}<\frac{1}{3}$，两边同时取常用对数得 $x\lg 0.9<\lg\frac{1}{3}$，因为

$\lg 0.9<0$，所以 $x>\frac{\lg\frac{1}{3}}{\lg 0.9}=\frac{-\lg 3}{2\lg 3-1}\approx\frac{-0.477}{-0.046}\approx 10.37$，则至少通过 11 块玻璃.

故选：C.

第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题（共 8 题，每题 4 分，共 32 分）

11. 【答案】2

【解析】

【分析】根据 $f\left(x\right)=\begin{cases}x^{2}-2,x\le 0\\ \ln x,x>0\end{cases}$，分 $x\le 0$ 和 $x>0$ 时，令 $f\left(x\right)=0$ 即可求解.

【详解】当 $x\le 0$ 时，由 $x^{2}-2=0$ 解得 $x=-\sqrt{2}$，

当 $x>0$ 时，由 $\ln x=0$ 解得 $x=1$，

所以函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x^{2}-2,x\le 0\\ \ln x,x>0\end{cases}$ 的零点个数是 2 个

故答案为：2.

12. 【答案】$\left(0,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$

【解析】

【分析】根据函数表达式, 列出不等式组即可解得其定义域.

【详解】因为函数 $y=\lg x+\frac{1}{x-1}$,

所以 $\begin{cases}x>0\\ x-1\ne 0\end{cases}$ 解得 $x>0$ 且 $x\ne 1$，即函数的定义域为 $\left(0,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$.

故答案为：$\left(0,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$.

13. 【答案】$a<c<b$

【解析】

【分析】

利用特殊值即可比较大小.

【详解】解：$\because a=\log_{2}\frac{1}{3}<\log_{2}1<0$，

$b=2^{\frac{1}{3}}>2^{0}=1$，

$c=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$，

故 $a<c<b$.

故答案为：$a<c<b$.

14. 【答案】$(-2,-1)$

【解析】

【分析】

根据指数函数图象恒过$(0,1)$，利用平移变换即可求解.

【详解】因为 $y=a^x$ 恒过点$(0,1)$，将 $y=a^x$ 图象向左平移2个单位，再向下平移2个单位，即可得 $y=a^{x+2}-2$ 的图象，则$(0,1)$点平移后得到$(-2,-1)$点，

所以 $y=a^{x+2}-2$ 恒过点$(-2,-1)$，

故答案为：$(-2,-1)$

【点睛】关键点点睛：本题的关键点是熟记指数函数的图象恒过点$(0,1)$，平移变换左加右减，上加下减即可求出平移后的定点.

15. 【答案】$[0,4]$

【解析】

【分析】

根据题意，有 $x^2+ax+a\geq 0$ 在 R 上恒成立，则 $\Delta=a^2-4a\leq 0$，即可得解.

【详解】若函数 $f(x)=\sqrt{x^2+ax+a}$ 的定义域为 R，

则 $x^2+ax+a\geq 0$ 在 R 上恒成立，

则 $\Delta=a^2-4a\leq 0$，

解得：$0\leq a\leq 4$，

故答案为：$[0,4]$.

16. 【答案】$(-\infty,4]$

【解析】

【分析】采用常数分离法转化为 $\frac{x+4y}{\sqrt{xy}}\geq m$ 恒成立，只需求 $\frac{x+4y}{\sqrt{xy}}$ 的最小值即可.

【详解】对任意正实数 x,y，不等式 $x+4y\geq m\sqrt{xy}$ 恒成立，即 $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{4\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\geq m$ 恒成立，

因为 $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{4\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\geq 2\sqrt{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\times\frac{4\sqrt{y}}{\sqrt{x}}}=4$，当且仅当 $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\frac{4\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ 即 $x=4y$ 时取“=”.

所以 $m \le 4$

故答案为：$(-\infty,4]$

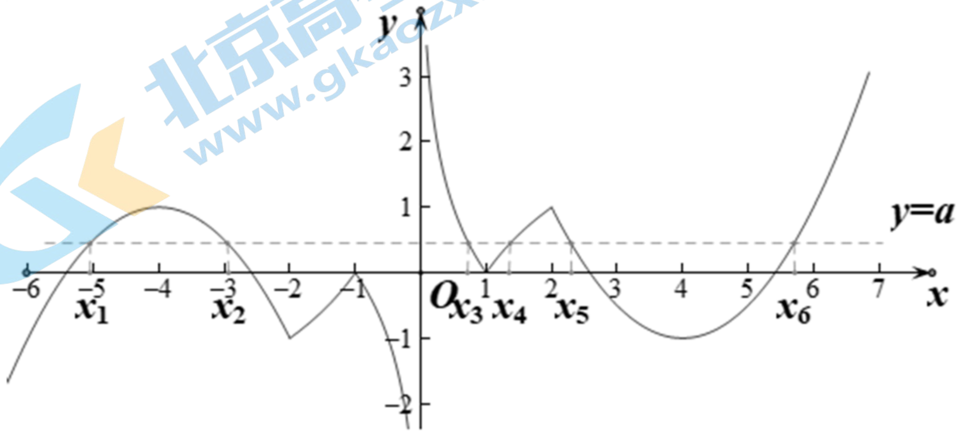
17. 【答案】$\left(2,\dfrac{5}{2}\right)$

【解析】

【分析】

根据函数的解析式可知函数再定义域内是基函数,由图象可知若函数 $y=f(x)-a(0<a<1)$ 有六个零点，$y=a\in(0,1)$,根据二次函数可知 $x_1+x_2=-8$，$x_5+x_6=8$，$-\log_2 x_3=\log_2 x_4$，即 $\log_2(x_3x_4)=0$,最后整理可得 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=x_3+x_4=x_3+\dfrac{1}{x_3}$,结合 $x_3\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 即可求出取值范围.

【详解】解:因为函数为奇函数，根据解析式作出函数在 R 上的图象如图：



由图可知 $x_1+x_2=-8$，$x_5+x_6=8$，且 $-\log_2 x_3=\log_2 x_4$，即 $\log_2(x_3x_4)=0$，所以是 $x_3x_4=1$，

因为 $0<a<1$，故 $0<-\log_2 x_3<1$，即 $x_3\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，

故 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=x_3+x_4=x_3+\dfrac{1}{x_3}$，

根据对勾函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上单调减，在 $(1,+\infty)$ 上单调增，

故而 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=x_3+x_4=x_3+\dfrac{1}{x_3}$ 在 $x_3\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 上单调减，

则 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=x_3+x_4=x_3+\dfrac{1}{x_3}\in\left(2,\dfrac{5}{2}\right)$，

故答案为：$\left(2,\dfrac{5}{2}\right)$.

【点睛】1.确定函数 $f(x)$ 的零点所在区间的常用方法：

①利用函数零点的存在性定理：首先看函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a，b]$ 上的图象是否连续，再看是否有

$f(a)\cdot f(b)<0$.若有，则函数 $y=f(x)$在区间(a，b)内必有零点．需要注意的是，满足条件的零点可能不惟一；不满足条件时也可能有零点．

②数形结合法：通过画函数图象，观察图象在给定区间上是否有交点来判断．

2.函数图象应用广泛，是研究函数性质不可或缺的工具．数形结合应以快、准为前提，充分利用"数"的严谨和"形"的直观，互为补充，互相渗透，以开阔解题思路，提升解题效率．

18. 【答案】②③④

【解析】

【分析】

求出各函数的值域可判断，得出结论．

详解】$x\in(0,1)$ 时，

$f_1(x)=3x-1\in(-1,2)$；

$f_2(x)=-\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2})^2+\frac{9}{8}\in(0,1)$；

$f_3(x)=\frac{1}{2^x}\in\left(\frac{1}{2},1\right)$；

$f_4(x)=x^{\frac{1}{2}}\in(0,1)$．

②③④满足题意．

故答案为：②③④

三、解答题（共 6 个解答题，满分 78 分）

19. 【答案】(1）见解析；(2）$\{x|x<1\}$

【解析】

【分析】

（1）利用函数单调性的定义证明即可；

（2）根据 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，得到 $2^{x+1}>4^x$，即可解出 x 的集合.

【详解】解：(1）设任意的 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)$

$=\left(x_1-\frac{1}{x_1}\right)-\left(x_2-\frac{1}{x_2}\right)$

$=x_1-x_2-\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$

$=(x_1-x_2)+\frac{(x_1-x_2)}{x_1x_2}$

$=\left(x_1-x_2\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x_1x_2}\right)$，

$\because x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right)$ 且 $x_1<x_2$，

$\therefore x_1-x_2<0$，$1+\frac{1}{x_1x_2}>0$，

即 $\left(x_1-x_2\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x_1x_2}\right)<0$，

即 $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$，

即对任意的 $x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right)$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$，

$\therefore f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是增函数；

（2）由（1）知：$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是增函数；

又 $\because 2^{x+1}>0,4^x>0$，

$\therefore f\left(2^{x+1}\right)>f\left(4^x\right)$，

即 $2^{x+1}>4^x=2^{2x}$，

即 $x+1>2x$，

解得：$x<1$，

即 $f\left(2^{x+1}\right)>f\left(4^x\right)$ 的解集为：$\left\{x\middle|x<1\right\}$.

【点睛】方法点睛：

定义法判定函数 $f\left(x\right)$ 在区间 D 上的单调性的一般步骤：

1.取值：任取 x_1，$x_2\in D$，规定 $x_1<x_2$，

2.作差：计算 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)$，

3.定号：确定 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)$ 的正负，

4.得出结论：根据同增异减得出结论.

20. 【答案】（1）$f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$；（2）$\left(-\infty,\log_2 3\right)$；（3）$\left(-1,1\right)$.

【解析】

【分析】

（1）先利用奇函数性质知 $f(0)=0$，求出参数 a，再验证此时 $f(x)$ 确实是奇函数；

（2）直接代入函数解不等式得 $2^x<3$，再利用指数函数性质解不等式即可.

（3）对函数分离常数，再利用 $2^x>0$，逐步计算 $-\frac{2}{2^x+1}$ 的范围，即得 $f(x)$ 值域.

【详解】解：（1）易见，$f(x)$的定义域为R，故$f(x)$在原点处有定义，

又由$f(x)$是奇函数知，$f(0)=0$，即$\dfrac{1-a}{2}=0$，故$a=1$，此时，$f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$，

对$x\in R$，有$f(-x)=\dfrac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\dfrac{\left(2^{-x}-1\right)\cdot 2^x}{\left(2^{-x}+1\right)\cdot 2^x}=\dfrac{1-2^x}{1+2^x}=-f(x)$，故$f(x)$是奇函数.

故函数$f(x)$的解析式为$f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$；

（2）由$f(x)<0.5$，得$\dfrac{2^x-1}{2^x+1}<\dfrac{1}{2}$，解得$2^x<3$，又$3=2^{\log_2 3}$，故$x<\log_2 3$，

x的范围为$\left(-\infty,\log_2 3\right)$；

（3）$f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}=1-\dfrac{2}{2^x+1}$，因为$2^x>0$，$2^x+1>1$，则$0<\dfrac{1}{2^x+1}<1$，即$0<\dfrac{2}{2^x+1}<2$，

$-2<-\dfrac{2}{2^x+1}<0$，故$-1<1-\dfrac{2}{2^x+1}<1$，

所以函数$f(x)$的值域为$\left(-1,1\right)$.

【点睛】方法点睛：

已知函数奇偶性求参数常见方法：

（1）直接利用定义使$f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$（或$f\left(-x\right)=f\left(x\right)$）恒成立，系数对应相等解得参数即可；

（2）利用特殊值代入$f\left(-x_0\right)=-f\left(x_0\right)$（或$f\left(-x_0\right)=f\left(x_0\right)$）计算参数，再将参数代入验证函数是奇（或偶）函数即可.

21. 【答案】画面的高为$8\sqrt{10}\text{cm}$，宽为$5\sqrt{10}\text{cm}$时可使宣传画所用纸张的面积最小，最小面积是$\left(560+160\sqrt{10}\right)\text{cm}^2$.

【解析】

【分析】设画面的高为x厘米，宽为y厘米，根据题干条件得到$xy=400\text{cm}^2$，然后列出纸张的面积的表达式$S=\left(x+16\right)\left(y+10\right)$，再利用换元转化成只含一个未知量的表达式，利用基本不等式即可求解.

【详解】设画面的高为x厘米，宽为y厘米，

因为画面面积为400cm^2，所以$xy=400\text{cm}^2$，所以$y=\dfrac{400}{x}\text{cm}$，

纸张的面积的表达式$S=\left(x+16\right)\left(y+10\right)=\left(x+16\right)\left(\dfrac{400}{x}+10\right)=\dfrac{6400}{x}+10x+560$，

所以$S=\dfrac{6400}{x}+10x+560\ge 2\sqrt{\dfrac{6400}{x}\cdot 10x}+560=560+160\sqrt{10}$，

当且仅当$\frac{6400}{x}=10x$，即$x=8\sqrt{10}$，且$y=5\sqrt{10}$时等号成立，

所以画面的高为$8\sqrt{10}$cm，宽为$5\sqrt{10}$cm时可使宣传画所用纸张的面积最小，最小面积是

$\left(560+160\sqrt{10}\right)\text{cm}^2$

22 【答案】(1) $(1,3)$

(2) $[0,2]$

【解析】

【分析】(1) 先将不等式化简为$2^{2x}-10\times2^x+16<0$，再令$t=2^x$，通过换元转化成一元二次不等式即可求解.

(2) 先结合题干条件利用方程组法求出函数$g(x)$的解析式，并判断其单调性，然后将不等式$g\left(x^2-2x+4\right)+g(-4)\le0$利用函数$g(x)$的奇偶性转化为$g\left(x^2-2x+4\right)\le g(4)$，再利用函数的单调性解不等式即可.

【小问1详解】

因为$f(x)=2^x(x\in\mathbf{R})$，所以$f(2x)=2^{2x}$，

所以$f(x)-f(2x)>16-9\times2^x$可化为$2^x-2^{2x}>16-9\times2^x$，即$2^{2x}-10\times2^x+16<0$，

令$t=2^x(t>0)$，$2^{2x}-10\times2^x+16<0$可化为$t^2-10t+16<0$，

即$(t-2)(t-8)<0$，解得$2<t<8$，所以$2<2^x<8$，解得$1<x<3$，

所以不等式$f(x)-f(2x)>16-9\times2^x$的解集为$(1,3)$.

【小问2详解】

因为$g(x)$为奇函数，所以$g(-x)=-g(x)$，

$h(x)$为偶函数，所以$h(-x)=h(x)$，

又因为$f(x)=g(x)+h(x)=2^x$，所以$f(-x)=g(-x)+h(-x)=-g(x)+h(x)=2^{-x}$，

即$\begin{cases}g(x)+h(x)=2^x\\-g(x)+h(x)=2^{-x}\end{cases}$，解得$g(x)=\frac{2^x-2^{-x}}{2}$，

对于$\forall x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且$x_1<x_2$，

有$g(x_1)-g(x_2)=\frac{2^{x_1}-2^{-x_1}}{2}-\frac{2^{x_2}-2^{-x_2}}{2}=\frac{2^{x_1}-2^{x_2}}{2}-\frac{2^{-x_1}-2^{-x_2}}{2}=\frac{1}{2}\left(2^{x_1}-2^{x_2}\right)\left(1+\frac{1}{2^{x_1+x_2}}\right)$，

又因为$x_1<x_2$，所以$0<2^{x_1}<2^{x_2}$，$2^{x_1+x_2}>0$，

所以$g(x_1)-g(x_2)<0$，即$g(x_1)<g(x_2)$，所以$g(x)$为增函数.

又因为不等式 $g\left(x^2-2x+4\right)+g\left(-4\right)\le 0$ 可化为 $g\left(x^2-2x+4\right)\le -g\left(-4\right)$，

且 $g\left(x\right)$ 为奇函数，$g\left(-4\right)=-g\left(4\right)$，所以 $g\left(x^2-2x+4\right)\le g\left(4\right)$，

因为 $g\left(x\right)$ 为增函数，所以 $x^2-2x+4\le 4$，即 $x^2-2x\le 0$，解得 $0\le x\le 2$，

所以不等式 $g\left(x^2-2x+4\right)+g\left(-4\right)\le 0$ 的解集为 $\left[0,2\right]$.

23. 【答案】（1）见解析（2）不存在

【解析】

【分析】（1）先求得 $g\left(x\right)$ 的表达式，根据对数真数大于零列不等式组，解不等式组求得 $g\left(x\right)$ 的定义域.利用 $g\left(-x\right)=-g\left(x\right)$ 证得 $g\left(x\right)$ 为奇函数.

（2）利用复合函数单调性同增异减求得 a 的取值范围，根据 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-4.-2\right]$ 上的最小值列式，由此判断出不存在满足要求的实数 a.

【详解】（1）$a=2$ 时，依题意 $g\left(x\right)=\log_2\left(1+2x\right)-\log_2\left(1-2x\right)$，所以 $\begin{cases}1+2x>0\\1-2x>0\end{cases}$，解得 $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$.

所以 $g(x)$ 的定义域为 $(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$.

$g\left(x\right)$ 定义域关于原点对称，且 $g\left(-x\right)=\log_2\left(1-2x\right)-\log_2\left(1+2x\right)=-g\left(x\right)$，所以 $g(x)$ 为奇函数.

（2）不存在

假设存在实数 a 满足条件，记 $u=1+ax$，因 $a>0$，

则 $u=1+ax$ 在 $[-4,-2]$ 上单调递增，使函数 $f(x)$ 在 $[-4,-2]$ 上单调递减，则 $0<a<1$，

由函数 $f(x)$ 在 $[-4,-2]$ 上最小值为 1，则有 $\begin{cases}0<a<1\\1-4a>0\\\log_2(1-2a)=1\end{cases}$，不等式组无解，

故不存在实数 a 满足题意.

【点睛】本小题主要考查函数定义域的求法，考查函数单调性的证明，考查根据函数的单调性和最值求参数，属于基础题.

24. 【答案】（I）见解析;(II) 见解析;（III）$f\left(x\right)=\begin{cases}0,x\in[0,1),\\x^2,x\in[1,+\infty).\end{cases}$（注：答案不唯一）

【解析】

【详解】试题分析：（Ⅰ）直接利用定义判断函数 $f_1(x)=x^2$ 与 $f_2(x)=lg(x+1)$ 是否是“T 函数” 即可；

（Ⅱ）设 x_1，$x_2\in[0,+\infty)$，$x_2>x_1$，$x_2=x_1+\vartriangle x,\vartriangle x>0$.

$f(x_2)-f(x_1)=f(x_1+\vartriangle x)-f(x_1)\ge f(x_1+\vartriangle x-x_1)=f(\vartriangle x)\ge 0$，所以，对于 x_1，$x_2\in[0,+\infty)$，$x_1<x_2$，一定有 $f(x_1)\le f(x_2)$．即可证明;

（III）根据 $f(1)=1$，且使集合$\{y\mid y=f(x)\ ,0\le x\le 1\}$ 中元素的个数最少，以及新定义即可确定.

试题解析：（I）对于函数 $f_1(x)=x^2$，当 $s,t\in[0,+\infty)$ 时，都有 $f_1(s)\ge 0$， $f_1(t)\ge 0$，

又 $f_1(s)+f_1(t)-f_1(s+t)=s^2+t^2-(s+t)^2=-2st\le 0$，所以 $f_1(s)+f_1(t)\le f_1(s+t)$.

所以 $f_1(x)=x^2$ 是“T 函数”.

对于函数 $f_2(x)=\lg(x+1)$，当 $s=t=2$ 时， $f_2(s)+f_2(t)=\lg 9$， $f_2(s+t)=\lg 5$，

因为 $\lg 9>\lg 5$，所以 $f_2(s)+f_2(t)>f_2(s+t)$.

所以 $f_2(x)=\lg(x+1)$ 不是“T 函数”.

(II) 设 $x_1x_2\in[0,+\infty)$， $x_2>x_1$， $x_2=x_1+\Delta x,\Delta x>0$.

则 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_1+\Delta x)-f(x_1)\ge f(x_1+\Delta x-x_1)=f(\Delta x)\ge 0$

所以，对于 $x_1x_2\in[0,+\infty)$， $x_1<x_2$，一定有 $f(x_1)\le f(x_2)$.

因为 $f(x)$ 是“T 函数”， $x_0\in[0,+\infty)$，所以 $f(x_0)\ge 0$.

若 $f(x_0)>x_0$，则 $f(f(x_0))\ge f(x_0)>x_0$，不符合题意.

若 $f(x_0)<x_0$，则 $f(f(x_0))\le f(x_0)<x_0$，不符合题意.

所以 $f(x_0)=x_0$.

（III） $f(x)=\begin{cases}0, x\in[0,1),\\ x^2, x\in[1,+\infty).\end{cases}$ （注：答案不唯一）

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 〃 精益求精、专业严谨 〃 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。