宜宾市普通高中 2016 级

理科数学

（考试时间 120 分钟　总分：150 分）

注意事项：

1. 答卷前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在答题卡上，并认真核准条形码上的准考证号、姓名、考场号、座位号及科目，在规定的位置贴好条形码.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将答题卡交回.

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的.

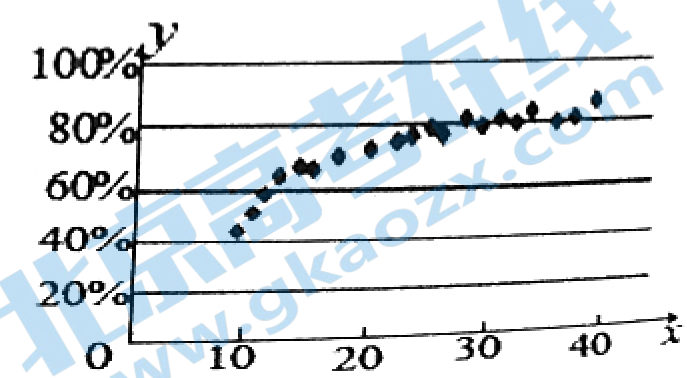
1. 已知集合 $U=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，$A=\{-2,-1,0,1\}$，$B=\{0,1,2\}$，则 $A\cap(\complement_U B)=$

A. $\{-2,-1\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{0,3\}$　　D. $\{-2,-1,3\}$

2. 已知 i 为虚数单位，且 $(1-i)z=i^3$，则复数 z 的虚部为

A. $-\frac{1}{2}i$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}i$

3. 某校课外学习小组为研究某作物种子的发芽率 y 和温度 x（单位：°C）的关系，由实验数据得到右面的散点图．由此散点图，最适宜作为发芽率 y 和温度 x 的回归方程类型的是



A. $y=a+bx$　　B. $y=a+b\ln x$

C. $y=a+be^x$　　D. $y=a+bx^2$

4. $(1-\frac{1}{x})(2+x)^5$ 展开式中 x^2 的系数为

A. 40　　B. 60　　C. 80　　D. 120

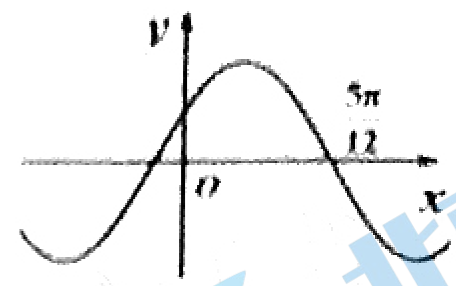
5. 五声音阶是中国古乐的基本音阶，故有成语“五音不全”，中国古乐中的五声音阶依次为：宫、商、角、徵、羽. 如果从这五个音阶中任取两个音阶，排成一个两个音阶的音序，则这个音序中不含宫和羽的概率为

A. $\frac{3}{10}$　　B. $\frac{7}{10}$　　C. $\frac{9}{20}$　　D. $\frac{11}{20}$

6. 牛顿曾经提出了常温环境下的温度冷却模型：$\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}$，（$t$ 为时间，单位分钟，θ_0 为环境温度，θ_1 为物体初始温度，θ 为冷却后温度），假设一杯开水温度 $\theta_1=100°C$，环境温度 $\theta_0=20°C$，常数 $k=0.2$，大约经过多少分钟水温降为 40°C？（结果保留整数，参考数据：$\ln 2\approx 0.7$）

A. 9　　B. 8

7. 函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 的图象如图，下列说法正确的是



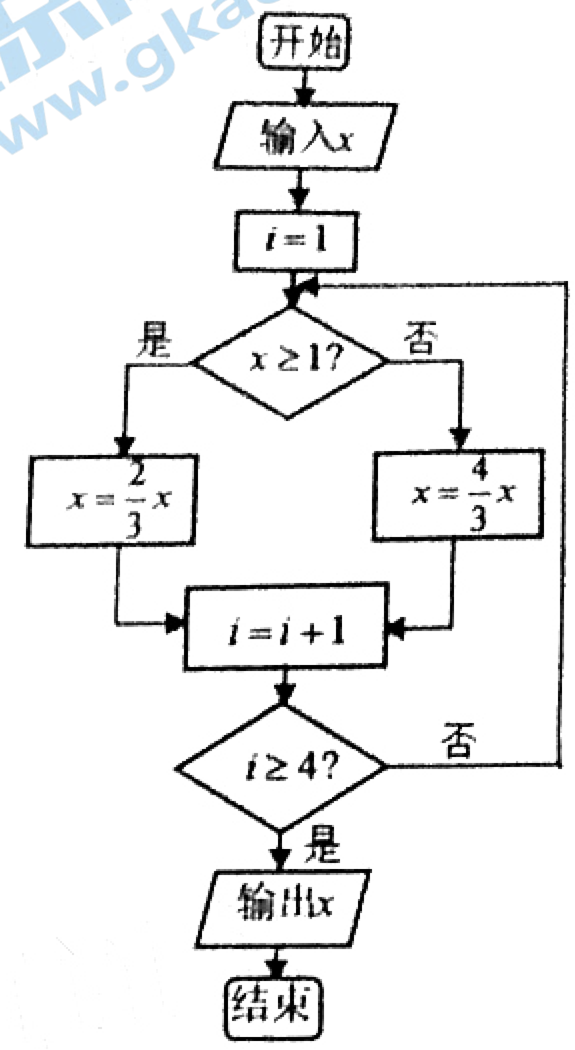
A. $f(x)$ 的周期为 2π

B. $f(x)$ 的图象关于 $(\frac{\pi}{6},0)$ 对称

C. $f(x)$ 的图象关于 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称

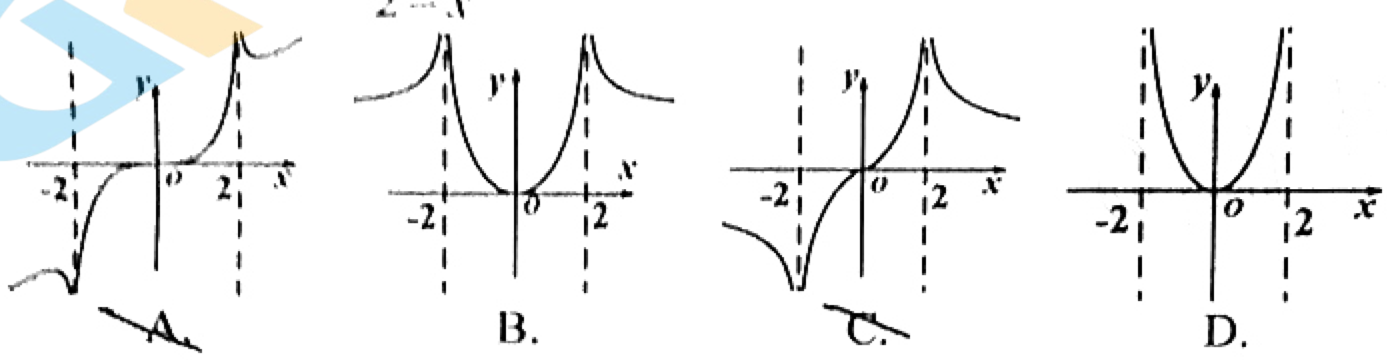
D. 把 $f(x)$ 图象上所有点向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到 $y=2\sin 2x$ 的图象

8. 相传黄帝在制定乐律时，用"三分损益"的方法得到不同的竹管，吹出不同的音调."三分损益"包含"三分损一"和"三分益一"，用现代数学的方法解释如下，"三分损一"是在原来的长度上减去三分之一，即变为原来的三分之二；"三分益一"是在原来的长度上增加三分之一，即变为原来的三分之四. 右图的程序框图算法思路源于"三分损益"，执行该程序框图，若输入 $x=2$，则输出 x 的值为

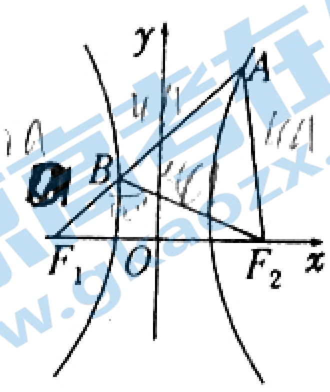


A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{8}{9}$　　C. $\frac{16}{27}$　　D. $\frac{32}{27}$

9. 函数 $f(x)=x\ln|\frac{2+x}{2-x}|$ 的大致图象为



10. 如图，F_1，F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，过 F_1 的直线 l 与双曲线分别交于 A，B 两点，若 $|AB|=2|F_1B|$，且 $|AF_2|=|BF_2|$，则双曲线的离心率为



A. $\sqrt{7}$　　B. 4　　C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{3}$

11. 已知 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，满足 $f(x+1)=f(x-2)$，下列说法：①$y=f(x)$ 的图象关于 $(\frac{3}{2},0)$ 对称；②$y=f(x)$ 的图象关于 $x=\frac{3}{2}$ 对称；③$y=f(x)$ 在 $[0,6]$ 内至少有5个零点；④若 $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，则它在 $[2021,2022]$ 上也是单调递增.其中正确的是

A.①④　　B.②③　　C.②③④　　D.①③④

12. 已知三棱锥 $A-BCD$ 的各个顶点都在球 O 的表面上，$AD\perp$ 平面 BCD，$BD\perp CD$，$BD=3$，$CD=3\sqrt{3}$，E 是线段 CD 上一点，且 $CD=3CE$．若球 O 的表面积为 40π，则过点 E 作球 O 的截面，所得截面圆面积的最小值为

A. 4π　　B. 6π　　C. 8π　　D. 10π

二、填空题：本大题共4个小题，每小题5分，共20分.

13. 函数 $y=\sin x+x$ 在 $x=0$ 处的切线方程为__________.

14. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,x)$，向量 $\boldsymbol{b}=(-1,x)$，若 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，则 $|\boldsymbol{a}|$ 等于__________.

15. 平面直角坐标系xOy中，点$P(4,-3)$是α终边上的一点，则$\cos(2\alpha+\frac{\pi}{3})=$________.

16. 若点M是直线$l:x-2y-2=0$上的动点，过点M作抛物线$C:y=\frac{1}{4}x^2$的两条切线，切点分别为A,B（A、B与坐标原点O不重合），当$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$时，则直线$AB$的方程为________.

三、解答题：共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17—21 题为必考题，每个试题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）

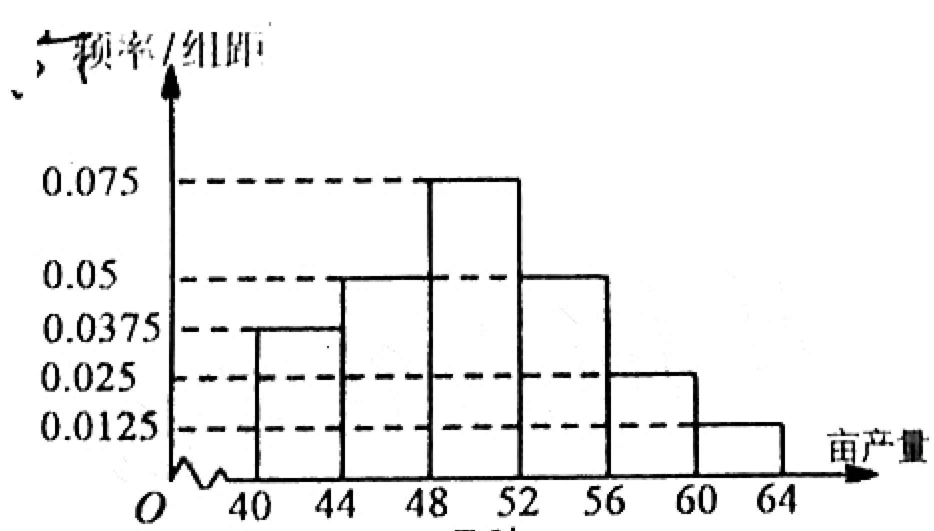
设$\{a_n\}$是等比数列，且$a_1=e$，$\ln a_2+\ln a_3=8$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

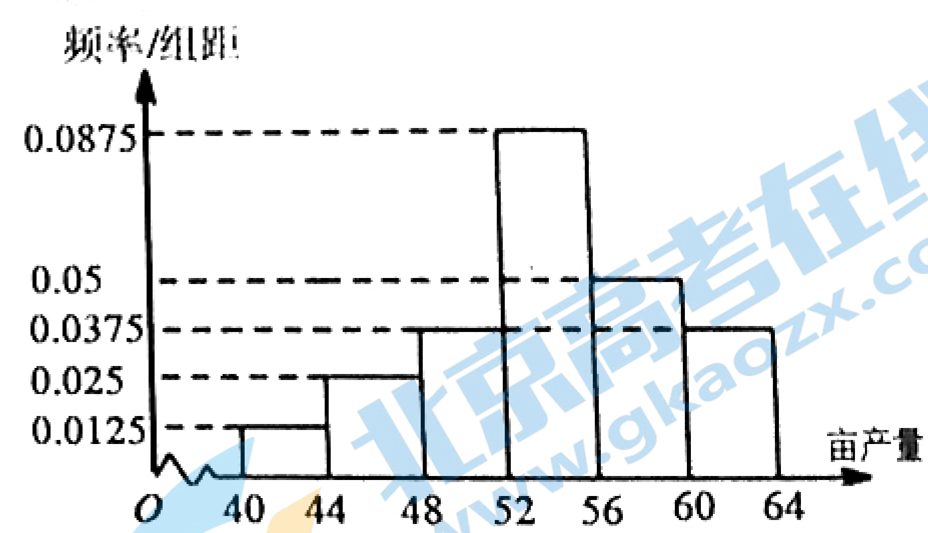
（2）记S_n是数列$\{\ln a_n\}$的前n项和，若$S_m+S_{m+2}=S_{m+4}$，求m.

18.（12 分）

某贫困县在政府“精准扶贫”的政策指引下，充分利用自身资源，大力发展茶叶种植. 该县农科所为了对比A,B两种不同品种茶叶的产量，在试验田上分别种植了A,B两种茶叶各 20 亩，所得亩产数据(单位:千克)都在$[40,64]$内，根据亩产数据得到频率分布直方图如下：



A品种



B品种

（1）从A种茶叶亩产的 20 个数据中任取两个，记这两个数据中不低于 56 千克的个数为X，求X的分布列及数学期望；

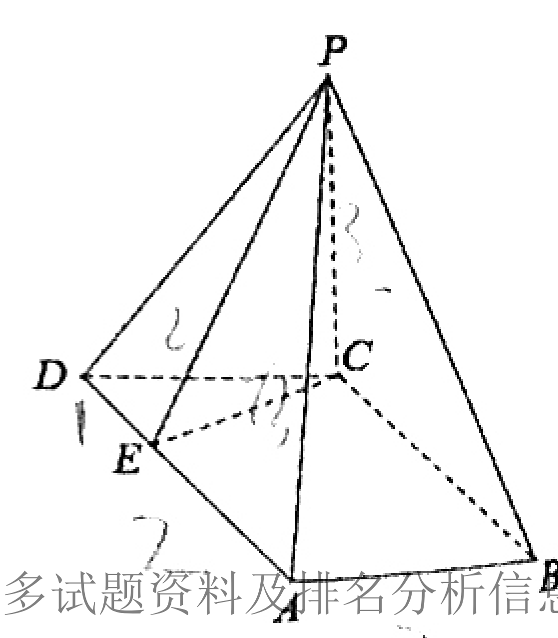
（2）根据频率分布直方图，用平均亩产来判断该县应选择种植A种茶叶还是B种茶叶，并说明理由.

19.（12 分）

已知四棱锥$P-ABCD$的底面为平行四边形，平面$PBC\perp$平面$ABCD$，点E在AD上，$AD\perp$平面PEC.

（1）求证：$PC\perp$平面$ABCD$；

（2）若$AB=AE=2DE=2$，$PC=3$，求平面PBC和平面PAD所成锐二面角的大小.



20.（12 分）

已知 F_1，F_2 分别为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点，焦距为 2，过 F_2 作斜率存在且不为零的直线 l 交 C 于 A，B 两点，且 ΔF_1AB 的周长为 8.

（1）求椭圆 C 的方程;

（2）已知弦 AB 的垂直平分线 m 交 x 轴于点 P，求证：$\dfrac{|PF_2|}{|AB|}$ 为定值.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=(a+1)x+\ln x\ (a\in R)$.

（1）求 $f(x)$ 的单调区间;

（2）当 $a=-2$ 时，若 x_1，x_2（$x_1<x_2$）是方程 $f(x)-m=0$ 的两根,求证：$x_2-x_1+em+e^m<0$.

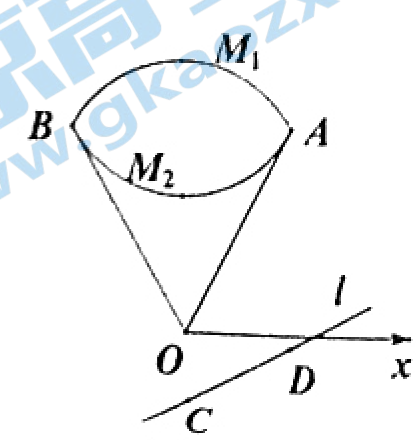
（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22、23 题中选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.

22.（10 分）[选修 4-4：坐标系与参数方程]

如图，在极坐标系 Ox 中，$A(2\sqrt{3},\dfrac{\pi}{3})$，$B(2\sqrt{3},\dfrac{2\pi}{3})$，弧 $\overset{\frown}{AM_1B}$ 和 $\overset{\frown}{AM_2B}$ 所在圆的圆心分别是 $(2,\dfrac{\pi}{2})$，$(4,\dfrac{\pi}{2})$，曲线 C_1 是弧 $\overset{\frown}{AM_1B}$，曲线 C_2 是弧 $\overset{\frown}{AM_2B}$.

（1）分别求出曲线 C_1，C_2 的极坐标方程;

（2）已知点 P 是曲线 C_1，C_2 上的动点，直线 $l:\rho(\cos\theta-2\sin\theta)=2$，$C,D$ 是直线 l 上的两点，且 $|CD|=2$，求 ΔPCD 面积的最大值.



23.（10 分）[选修 4-5：不等式选讲]

已知函数 $f(x)=|2x+1|+|x-2|$.

（1）解不等式 $f(x)\geq 3$;

（2）记函数 $f(x)$ 的最小值为 m.若 a,b,c 均为正实数,且 $a+b+2c=2m$,若 $(a-1)^2+(b-1)^2+(c-t)^2\geq\dfrac{1}{24}$ 成立，证明：$t\geq\dfrac{7}{4}$ 或 $t\leq\dfrac{5}{4}$.

宜宾市高 2018 级高三第三次诊断考试

理科数学参考答案

一．选择题：ABBAAC　CDBADB

二．填空题：13．$y=2x$　　14．2　　15．$\dfrac{7-24\sqrt{3}}{50}$　　16.$3x+y-4=0$

三．解答题

17.解:（1）设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，根据题意可得$a_2a_3=e^8$，

即$a_1^2q^6=e^2q^6=e^8$，解得$q=e^2$，　从而$a_n=a_1q^{n-1}=e^{2n-1}$．　----------（6 分）

（2）根据题意可得$\ln a_n=\ln e^{2n-1}=2n-1$，从而

$$S_n=\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n=1+3+\cdots+2n-1=\frac{(1+2n-1)n}{2}=n^2,$$

由$S_m+S_{m+2}=S_{m+4}$可得：$m^2+(m+2)^2=(m+4)^2$，解得$m=6$．　----------（12 分）

18.解:(1) X 的所有可能取值为 0,1,2,

$P(X=0)=\dfrac{C_3^0C_{17}^2}{C_{20}^2}=\dfrac{136}{190}$，$P(X=1)=\dfrac{C_3^1C_{17}^1}{C_{20}^2}=\dfrac{51}{190}$，$P(X=2)=\dfrac{C_3^2C_{17}^0}{C_{20}^2}=\dfrac{3}{190}$，

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2
P	$\dfrac{136}{190}$	$\dfrac{51}{190}$	$\dfrac{3}{190}$

$\therefore X$ 的数学期望$E(X)=0\times\dfrac{136}{190}+1\times\dfrac{51}{190}+2\times\dfrac{3}{190}=\dfrac{57}{190}=\dfrac{3}{10}$．　----------（6 分）

（2）根据以上直方图数据，

茶叶A的平均亩产为$42\times0.15+46\times0.2+50\times0.3+54\times0.2+58\times0.1+62\times0.05=50.2$，

茶叶B的平均亩产为$42\times0.05+46\times0.1+50\times0.15+54\times0.35+58\times0.2+62\times0.15=54$，

因为$54>50.2$，故选茶叶B种植．　----------（12 分）

19.解:(1)$\because ABCD$为平行四边形，$\therefore AD/\!/BC$

$\because AD\perp$平面PEC，$\therefore BC\perp$平面PEC　又$PC\subset$平面PEC　所以$BC\perp PC$

又$\because$平面$PBC\perp$平面$ABCD$，平面$PBC\cap$平面$ABCD=BC$

$\therefore PC\perp$平面$ABCD$　----------（6 分）

（2）由题知$AD\perp$平面PEC，从而$AD\perp EC$，

$\because AB=AE=2DE=2$　　$\therefore EC=\sqrt{3}$

由（1）知$PC\perp$平面$ABCD$，则$PC\perp CE$

$BC\perp$平面PEC，则$CE\perp BC$　　又$BC\cap PC=C$，从而$CE\perp$平面PBC

以C为坐标原点，CE、CB、CP所在直线分别为x,y,z轴建立如图所示空间直角坐标系，

得$E(\sqrt{3},0,0)$, $D(\sqrt{3},-1,0)$, $P(0,0,3)$，则$\overrightarrow{PE}=(\sqrt{3},0,-3)$, $\overrightarrow{PD}=(\sqrt{3},1,-3)$,

设平面 PAD 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$

则 $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PE}=0$，$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PD}=0$ 即 $\begin{cases}\sqrt{3}x-3z=0\\ \sqrt{3}x+y-3z=0\end{cases}$，令 $x=3$，则 $y=0$，$z=\sqrt{3}$，

从而 $\overrightarrow{n_1}=(3,0,\sqrt{3})$，

可取平面 PBC 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{CE}=(\sqrt{3},0,0)$，

所以平面 PBC 和平面 PAD 所成锐二面角的余弦值：$\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|n_1||n_2|}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以平面 PBC 和平面 PAD 所成锐二面角 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$.　　-----------（12 分）

（**另解**：可以几何法证明 $\angle EPC$ 就是平面 PBC 和平面 PAD 所成锐二面角的平面角）

20.解：（1）由题意得：$4a=8$，$2c=2$，$\therefore a=2$，$c=1$，$b=\sqrt{3}$

$\therefore$ 椭圆 C 的方程 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.　　-----------（5 分）

（2）①设 AB 的直线方程 为 $x=my+1$，代入 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 得：$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$

$\because\Delta=36m^2+36(3m^2+4)=144(m^2+1)>0$ 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

$y_1+y_2=-\dfrac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=-\dfrac{9}{3m^2+4}$，

$|AB|=\sqrt{1+m^2}\dfrac{12\sqrt{1+m^2}}{3m^2+4}=\dfrac{12(1+m^2)}{3m^2+4}$

$\because x_1+x_2=-\dfrac{6m^2}{3m^2+4}+2=\dfrac{8}{3m^2+4}$，　所以 AB 的中点为 $(\dfrac{4}{3m^2+4}，-\dfrac{3m}{3m^2+4})$

$\therefore$ 弦 AB 的垂直平分线 m 为：$y=-mx+\dfrac{m}{3m^2+4}$，　$\therefore P(\dfrac{1}{3m^2+4},0)$

$|PF_2|=1-\dfrac{1}{3m^2+4}=\dfrac{3(m^2+1)}{3m^2+4}$，所以 $\dfrac{|PF_2|}{|AB|}=\dfrac{3(m^2+1)}{12(m^2+1)}=\dfrac{1}{4}$.　　-----------（12 分）

21.解：（1）$f'(x)=a+1+\dfrac{1}{x}=\dfrac{(a+1)x+1}{x}$ $(x>0)$

①当 $a\geq-1$ 时，因 $a+1\geq0$ 所以 $f'(x)>0$ 恒成立，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

②当 $a<-1$ 时，$a+1<0$，若 $x\in(0,-\dfrac{1}{a+1})$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，若 $x\in(-\dfrac{1}{a+1},+\infty)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；　　-----------（5 分）

（2）由题可知 x_1，x_2 是函数 $g(x)=\ln x-x-m$ 的零点.

$g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$；当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

故函数 $g(x)$ 要有两个零点，必有 $g(1)=-1-m>0$，即 $m<-1$.

要证 $x_2-x_1+em+e^m<0$ 即证 $x_2-x_1<-em-e^m$，只需证 $e^m<x_1<1<x_2<-em$　①

由于 $m<-1$，$e^m\in(0,1)$，$g(e^m)=m-e^m-m<0$，$g(1)=-1+m>0$

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $(e^{-m},1)$ 上存在唯一零点 x_1，　即 $e^{-m}<x_1<1$.　②

又 $g(-em)=\ln(-em)+em-m(m<-1)$,

令 $t(m)=\ln(-em)+em-m(m<-1)$, $t'(m)=\frac{1}{m}+e-1=e-(1-\frac{1}{m})$,

因为 $m<-1$, 所以 $1-\frac{1}{m}\in(1,2)$，所以 $t'(m)>0$，

$t(m)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，所以 $t(m)<t(-1)=1-e+1=2-e<0$

$\therefore$ 函数 $h(x)$ 在 $(1,\ -em)$ 上存在唯一零点 x_2，　即 $1<x_2<em$.　③

由②③可知①成立，故 $x_2-x_1+em+e^m<0$.　----------（12 分）

22.解:（1）由题意可知: $A(\sqrt{3},3)$, $B(-\sqrt{3},3)$ $O_1(0,2)$, $O_2(0,4)$, $r_1=|O_1A|=2$, $r_2=|O_2A|=2$,

M_1 的直角坐标方程为:：$x^2+(y-2)^2=4$ ($-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}, 3\le y\le 4$);

M_2 的直角坐标方程为：$x^2+(y-4)^2=4$ ($-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}, 2\le y\le 3$),

所以 M_1 的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta(\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{2\pi}{3})$；

M_2 的极坐标方程为 $\rho^2-8\rho\sin\theta+12=0(\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{2\pi}{3}, 2\le\rho\le 2\sqrt{3})$. ----------（5 分）

（如果两个极坐标方程的范围不正确，只扣 1 分）

（2）直线 l: $\rho(\cos\theta-2\sin\theta)=2$ 的普通方程为：$x-2y-2=0$，$\because S_{\Delta PCD}=\frac{1}{2}|CD|h=h$，要使 ΔPCD 面积最大，只需点 P 到直线 l 的距离 h 最大即可.

由图可知当点 P 在曲线 M_1 上时，　h 才能取得最大值.

因为 $O_1(0,2)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|-4-2|}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$，$\therefore h_{\max}=\frac{6\sqrt{5}}{5}+2$.

$\therefore (S_{\Delta PCD})_{\max} = h = 2 + \frac{6\sqrt{5}}{5}$． 故$\Delta PCD$面积的最大值为$2+\frac{6\sqrt{5}}{5}$． ---------（10 分）

23.解：（1） $f(x)=\begin{cases} -3x+1, x\le -\frac{1}{2} \\ x+3, -\frac{1}{2}<x<2 \\ 3x-1, x\ge 2 \end{cases}$，

$\therefore \begin{cases} x\le -\frac{1}{2} \\ -3x+1\ge 3 \end{cases} \Rightarrow x\le -\frac{2}{3}$ 或 $\begin{cases} -\frac{1}{2}<x<2 \\ x+3\ge 3 \end{cases} \Rightarrow 0\le x<2$ 或 $\begin{cases} x\ge 2 \\ 3x-1\ge 3 \end{cases} \Rightarrow x\ge 2$

$\therefore x\le -\frac{2}{3}$ 或 $x\ge 0$

故不等式的解集为：$(-\infty,-\frac{2}{3}]\cup[0,+\infty)$ ------------------（5 分）

（2）由（1）可知，$f(x)$的最小值为$m=\frac{5}{2}$，$\therefore a+b+2c=5$，又a,b,c均为正实数，

由柯西不等式可知

$[(a-1)^2+(b-1)^2+(c-t)^2](1^2+1^2+2^2)\ge[(a-1)\times1+(b-1)\times1+(c-t)\times2]^2$

$=(a+b+2c-2-2t)^2=(5-2-2t)^2=(3-2t)^2$

$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-t)^2\ge\frac{1}{24}$恒成立，$\therefore (3-2t)^2\ge\frac{1}{24}\times6=\frac{1}{4}$

$\therefore 2t-3\ge\frac{1}{2}$或$2t-3\le-\frac{1}{2}$

$\therefore t\ge\frac{7}{4}$或$t\le\frac{5}{4}$． ------------------（10 分）

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。