北京一零一中 2019-2020 学年度第一学期高三数学统练八

班级：________ 学号：________ 姓名：________ 成绩：________

一、选择题共 10 小题。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $M=\{x\mid -4<x<2\}$, $N=\{x\mid x^2-x-6<0\}$, 则 $M\cap N=$ (　　)

(A) $\{x\mid -4<x<3\}$ (B) $\{x\mid -4<x<-2\}$ (C) $\{x\mid -2<x<2\}$ (D) $\{x\mid 2<x<3\}$

2. 下列函数中, 在区间 $(1,+\infty)$ 上为增函数的是 (　　)

(A) $y=-3x-1$ (B) $y=\frac{2}{x}$ (C) $y=x^2-4x+5$ (D) $y=|x-1|+2$

3. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $S_4=0$, $a_5=5$, 则 (　　)

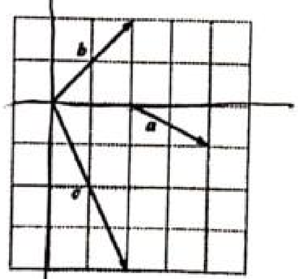
(A) $a_n=2n-5$ (B) $a_n=3n-10$ (C) $S_n=2n^2-8n$ (D) $S_n=\frac{1}{2}n^2-2n$

4. 若 $a>0$, $b>0$, 则 “$a+b\leqslant 4$” 是 “$ab\leqslant 4$” 的 (　　)

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

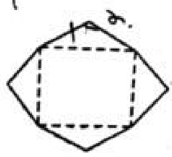
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

5. 如图, 在 6×6 的方格中, 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的起点和终点均在格点, 且满足向量 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{b}+y\boldsymbol{c}$ $(x,y\in\mathbf{R})$, 那么 $x-y=$ (　　)



(A) -2 (B) 0 (C) 1 (D) 2

6. 某班设计了一个八边形的班徽如图所示, 它由腰长为 1, 顶角为 α 的四个等腰三角形, 及其底边构成的正方形所组成, 该八边形的面积为 (　　)



(A) $2\sin\alpha-2\cos\alpha+2$ (B) $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha+3$

(C) $3\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha+1$ (D) $2\sin\alpha-\cos\alpha+1$

7. 偶函数 $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 单调递减. 若 A, B 是锐角三角形的两个内角, 则 (　　)

(A) $f(\sin A) > f(\cos B)$　　(B) $f(\sin A) > f(\sin B)$

(C) $f(\cos A) > f(\sin B)$　　(D) $f(\cos A) > f(\cos B)$

8. 设 F 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a > 0, b > 0)$ 的右焦点, O 为坐标原点, 以 OF 为直径的圆与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 交于 P, Q 两点. 若 $|PQ| = |OF|$, 则 C 的离心率为 (　　)

(A) $\sqrt{2}$　　(B) $\sqrt{3}$　　(C) 2　　(D) $\sqrt{5}$

9. 已知当 $x \in [0,1]$ 时, 函数 $y = (mx-1)^2$ 的图象与 $y = \sqrt{x} + m$ 的图象有且只有一个交点, 则正实数 m 的取值范围是 (　　)

(A) $(0, 1] \cup [2\sqrt{3}, +\infty)$　　(B) $(0, 1] \cup [3, +\infty)$

(C) $(0, \sqrt{2}) \cup [2\sqrt{3}, +\infty)$　　(D) $(0, \sqrt{2}] \cup [3, +\infty)$

10. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 A, 如果对于任意的 $x_1 \in A$, 都存在 $x_2 \in A$, 使得 $f(x_1) + f(x_2) = 2m$ (其中 m 为常数) 成立, 则称函数 $f(x)$ 在 A 上"与常数 m 相关联". 给定函数① $y = \frac{1}{x}$; ② $y = x^3$; ③ $y = (\frac{1}{2})^x$; ④ $y = \ln x$; ⑤ $y = \cos x + 1$. 则在其定义域上与常数 1 相关联的所有函数是 (　　)

(A) ①②⑤　　(B) ①③　　(C) ②④⑤　　(D) ②④

二、填空题共 6 小题。

11. 若复数 $(a+i)(3+4i)$ 的对应点在复平面的一、三象限角平分线上, 则实数 $a =$ ______.

12. 若角 α 的终边过点 $(1, -2)$, 则 $\sin 2\alpha =$ ______.

13. 直线 l 与抛物线 $y = \frac{x^2}{2}$ 交于 A, B 两点, 且抛物线在 A, B 两点处的切线互相垂直, 其中 A 点坐标为 $(2, 2)$, 则直线 l 的斜率等于 ______.

14. 一人用一小时将一条信息传达给两人, 这两人每人又用一小时将信息传给不知此信息的两人, 如此下去 (每人仅传一次), 要传遍 55 个不同的人至少需要 ______ 小时.

15. 已知 P 是直线 $x + y + 3 = 0$ 上的动点, PA, PB 是圆 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 的切线, A, B 是切点, C 是圆心, 则四边形 $PACB$ 的面积的最小值是 ______.

16. 将正整数 12 分解成两个正整数的乘积有 1×12, 2×6, 3×4 三种, 其中 3×4 是这三种分解中两数差的绝对值最小的, 我们称 3×4 为 12 的最佳分解. 当 $p \times q$ ($p \leqslant q$ 且 $p, q \in \mathbf{N}^*$) 是正整数 n 的最佳分解时, 我们定义函数 $f(n) = q - p$, 例如 $f(12) = 4 - 3 = 1$. 则 $f(81) =$ ______, 数列 $\{f(3^n)\}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$ 的前 100 项和为 ______

11. -1　12. $-\frac{1}{3}$　13. $\frac{\pi}{6}$

14. 5　15. $\sqrt{17}$　16. 0，$3^{\circ}-1$

三、解答题共 4 小题。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

17. 在 $\triangle ABC$，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c，已知 $B = 45^{\circ}$，$b = \sqrt{10}$，$\tan C = \frac{1}{2}$.

(1) 求边 a;

(2) 求 $\sin(2A - B)$.

1) $\tan C = \frac{\sin C}{\cos C} = \frac{1}{2}$

$2\sin C = \cos C$

$\cos^2 C = 4\sin^2 C + \sin^2 C = 1$

$\sin^2 C = \frac{1}{5}$

$\because \triangle ABC$ 中 $C \in (0,\pi)$

$\therefore \sin C = \frac{1}{\sqrt{5}}$ 或 $-\frac{1}{\sqrt{5}}$(舍)

正弦定理得：$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$\sin A = \sin(B+C) = \sin B\cos C + \sin C\cos B =$

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$，$a = 1.5\sqrt{2}$.

(2). $\cos A = -\cos(B+C) = -(\cos B\cos C$

$\sin 2A = 2\sin A\cos A = -\frac{3}{5}$，$\cos$

$\sin(2A-B) = \sin 2A\cos B - \cos 2A\sin B$

$= \frac{\sqrt{2}}{10}$.

18. 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2，M 在椭圆上，$\triangle MF_1F_2$ 的周长为 $2\sqrt{5} + 4$，面积的最大值为 2.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 直线 $y = kx\ (k > 0)$ 与椭圆 C 交于 A, B，连接 AF_2, BF_2 并延长分别交椭圆 C 于点 D, E，连接 DE. 探索 AB 与 DE 的斜率之比是否为定值，并说明理由.

19. 设函数 $f(x)=\ln x-a(x-1)e^{x}$, 其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1) 若 $a\leqslant 0$, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $0<a<\frac{1}{e}$,

①证明 $f(x)$ 恰有两个零点;

②设 x_0 为 $f(x)$ 的极值点, x_1 为 $f(x)$ 的零点, 且 $x_1>x_0$, 证明 $3x_0-x_1>2$.

20. 对于项数为 $m\ (m\geqslant 3)$ 的有穷数列 $\{a_n\}$, 若存在项数为 $m+1$, 公差为 d 的等差数列 $\{b_n\}$, 使得 $b_k<a_k<b_{k+1}$, 其中 $k=1,2,\cdots,m$, 则称数列 $\{a_n\}$ 为"等差分割数列".

(1) 判断数列 $\{a_n\}$: 1, 4, 8, 13 是否为"等差分割数列", 并说明理由;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^n\ (n=1,2,\cdots,m)$, 求证: 当 $m\geqslant 5$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 不是"等差分割数列";

(3) 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=4n+3\ (n=1,2,\cdots,m)$, 且数列 $\{a_n\}$ 为"等差分割数列", 若数列 $\{b_n\}$ 的首项 $b_1=3$, 求数列 $\{b_n\}$ 的公差 d 的取值范围 (用 m 表示).

√ $f(x)=\ln x-a(x-1)e^x$，其中 $a\in R$

① $a\le 0$，讨论 $f(x)$ 单调性

② (1) 若 $0<a<\frac{1}{e}$，证明 $f(x)$ 有2个零点.

(2) x_0 为 $f(x)$ 极值点，x_1 为 $f(x)$ 零点.

证明 $3x_0-x_1>2$.

解：① $f'(x)=\frac{1}{x}-axe^x>0$ 小

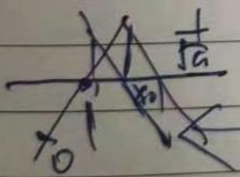
② $f'(x)=\frac{1-ax^2e^x}{x}$ 令 $g(x)=1-ax^2e^x$

$g'(x)=-a(2x+x^2)e^x<0$

$g(x)\downarrow$

又 $g(1)=1-ea>0$ $g(\frac{1}{\sqrt{a}})=1-e^{\frac{1}{\sqrt{a}}}<0$

$g(x)$ 在 $(1,\frac{1}{\sqrt{a}})$ 有 x_0 零点



为 $f(x)$ 图象的图 且 $f(1)=0$

$\therefore f(x_0)>0$

$\ln x-a(x-1)e^x$ 取 $x=\frac{1}{a}+1$

则 $\ln x-a(x-1)e^x=\ln(\frac{1}{a}+1)-e^{\frac{1}{a}+1}$

令 $\frac{1}{a}+1=t>1$

$h(t)=\ln t-e^t$ $h'(t)=\frac{1}{t}-e^t<0\ (t>1)$

$h(t)\downarrow$ $h(t)<h(1)=-e$. $h(t)<0$

故在 $(x_0,\frac{1}{a}+1)$ 处 $f(x)$ 又有一个零点.

Memo No.
Date / /

③ $\begin{cases} \ln x_1 - a(x_1-1)e^{x_1}=0 \\ \dfrac{1}{x_0} - a x_0 e^{x_0} = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \dfrac{1}{x_0^2 e^{x_0}}$

$\Rightarrow$ 代入上式 $\ln x_1 - \dfrac{x_1-1}{x_0^2 e^{x_0}} \cdot e^{x_1}$

$= \ln x_1 - \dfrac{x_1-1}{x_0^2} \cdot e^{x_1-x_0} = 0$

$e^{x_1-x_0} = \dfrac{\ln x_1 \cdot x_0^2}{x_1-1}$

欲证 $3x_0 - x_1 > 2$

即 $x_1 - x_0 < 2x_0 - 2$

$e^{x_1-x_0} < e^{2x_0-2}$

而 $\dfrac{\ln x_1}{x_1-1} < 1$ （即证 $\ln x < x-1$ $(x>1)$ 易证

故 $e^{x_1-x_0} < x_0^2$.

下证 $x_0^2 < e^{2x_0-2}$

令 $h(x) = e^{2x-2} - x^2$ 　 $h'(x) = 2e^{2x-2} - 2x$ $(x>1)$

$h''(x) = 4e^{2x-2} - 2$ $(x>1)$ >0

$h'(x)\uparrow$ 　 $h'(x)_{min} = h'(1) = 0$

$h(x)\uparrow$ 　 $h(x)_{min} = h(1) = 0$

$\therefore e^{2x-2} > x^2$ 　 $\therefore e^{2x_0-2} > x_0^2 > e^{x_1-x_0}$

$\therefore 2x_0 - 2 > x_1 - x_0$

$\therefore 3x_0 - x_1 > 2$

※ 注意放缩与巧凑！