后期复习参考资料

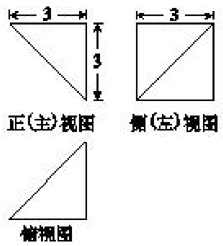
2018.5

一、选择题：

1．已知a，b是实数，使$a>b$成立的一个充分而不必要的条件是（　）

（A）$a>b-1$	（B）$a>b+1$
（C）$a^2>b^2$	（D）$a^3>b^3$

2．从一个正方体中截取部分几何体，得到一个以原正方体的部分顶点为顶点的凸多面体，其三视图如图所示．该几何体的表面积为（　）



（A）$9+9\sqrt{2}$	（B）$18+9\sqrt{2}$
（C）$9+9\sqrt{3}$	（D）$18+9\sqrt{3}$

3．[理科] 椭圆 $\begin{cases} x=3\cos\varphi \\ y=5\sin\varphi \end{cases}$ (φ是参数)的离心率是（　）

（A）$\dfrac{3}{5}$	（B）$\dfrac{4}{5}$	（C）$\dfrac{9}{25}$	（D）$\dfrac{16}{25}$

4．[理科] 从集合$\{1,2,3,\cdots,10\}$中取3个不同的元素，使其和能被3整除，则不同取法的种数是（　）

（A）36	（B）38	（C）40	（D）42

5．设$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$是平面上的三个单位向量．若$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则$(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$的最大值是（　）

（A）$\sqrt{2}+1$	（B）$\sqrt{3}+1$
（C）$\sqrt{2}-1$	（D）$\sqrt{3}-1$

6．已知点$A(-1,-1)$，$B(1,1)$．若点C在函数$y=-3x^2+2$的图象上，则使得△ABC为直角三角形的点C的个数为（　）

（A）4	（B）5	（C）6	（D）7

7．已知 F 是抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，点 A,B 在抛物线 C 上．设 O 为原点，$\overline{OA}\cdot\overline{OB}=-4$．记△$OFA$的面积是 S_1，△OFB 的面积是 S_2，则 $S_1\cdot S_2=$（　）

（A）1	（B）2
（C）3	（D）4

8．$a_1,a_2,\cdots,a_{2017}$ 是一列互不相等的正整数．任意改变这 2017 个数的顺序，得到的一列新的数字记为 $b_1,b_2,\cdots,b_{2017}$．令 $M=(a_1-b_1)(a_2-b_2)\cdots(a_{2017}-b_{2017})$，则 M 必是（　）

（A）正数	（B）负数	（C）奇数	（D）偶数

二、填空题：

9．设集合 $A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{x\,|-x\in A,且2-x^2\notin A\}$．则集合 B 中所有元素之和是____．

10．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\leqslant 0,\\ |\log_2 x|, & x>0,\end{cases}$ 则不等式 $f(x)<2$ 的解集是____．

11．能够使得 $y=\sin^2\omega x$ 在区间 $(0,\frac{2\pi}{3})$ 上为增函数的一个 ω 的值是____．

12．已知 P 是△ABC 所在平面内一点，且 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AC}$．若 $\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，其中 λ，$\mu\in\mathbf{R}$，则 $\frac{\lambda}{\mu}=$____．

13．函数 $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ 的值域是____．

14．设 $a,b>0$，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leqslant 2\sqrt{2}$，$(a-b)^2=4(ab)^3$，则 $a+b=$____．

15．函数 $y=\cos 2x+2\sin x\ \ (x\in(0,2\pi))$ 的单调递减区间为____．

16．若函数 $f(x)$ 的图象上任意一点 $M(x,y)$ 的坐标满足条件 $|x|\geqslant|y|$，则称函数 $f(x)$ 具有性质 P．给定下列五个函数：

① $f(x)=x+1$；　　② $f(x)=x^2$；　　③ $f(x)=e^x-1$；

④ $f(x)=\sin x$；　　⑤ $f(x)=\ln(x+1)$．

其中具有性质 P 的函数的序号是_____．

三、解答题：

17．已知△ ABC 的三个内角满足 $4\sin^2\dfrac{A+B}{2}-\cos 2C=\dfrac{7}{2}$．

（Ⅰ）求角 C；

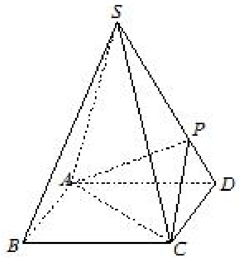
（Ⅱ）求 $\cos^2 A+\cos^2 B$ 的取值范围．

18．如图，正四棱锥 $S-ABCD$ 的侧棱长是底面边长的 $\sqrt{2}$ 倍，P 为侧棱 SD 上的点．

（Ⅰ）求证：$AC\perp SD$；

（Ⅱ）若 $SD\perp$ 平面 PAC，求二面角 $P-AC-D$ 的大小；

（Ⅲ）在（Ⅱ）的条件下，侧棱 SC 上是否存在一点 E，使得 $BE\parallel$ 平面 PAC．若存在，求 $SE:EC$ 的值；若不存在，请说明理由．



19．已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，过椭圆任意三个顶点的三角形的面积为 $2\sqrt{2}$．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）点 A,B,C 是椭圆 C 上三点，若四边形 $OABC$ 是平行四边形，求证：该四边形的面积为定值．

20．已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的离心率是$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且经过点$M(2,1)$．

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）设直线$y=\dfrac{1}{2}x+m\,(m<0)$与椭圆C相交于A，B两点，记△MAB的内切圆的圆心为$I(x_0,y_0)$，求x_0的值．

21．已知函数$f(x)=a\ln(x+1)+\dfrac{1}{x+1}+3x-1$，其中$a\in\mathbf{R}$．

（Ⅰ）当$a=1$时，求曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程；

（Ⅱ）若对任意$x\geqslant 0$，都有$f(x)\geqslant 0$，求实数a的取值范围．

22．设L为曲线$C:y=\mathrm{e}^x$在点$(0,1)$处的切线．

（Ⅰ）证明：除切点$(0,1)$之外，曲线C在直线L的上方；

（Ⅱ）设$h(x)=\mathrm{e}^x-ax+\ln(x+1)$，其中$a\in\mathbf{R}$．若$h(x)\geqslant 1$对$x\in[0,+\infty)$恒成立，求$a$的取值范围．

23．设函数$f(x)=x\ln(1+\dfrac{1}{x})$，$g(x)=\ln(1+x)-cx$，$x\in(0,+\infty)$．

（Ⅰ）若曲线$y=f(x)$在点(x_0,y_0)处的切线l过点$(-1,0)$，求l的方程；

（Ⅱ）求$g(x)$的单调区间；

（Ⅲ）若对任意$x\in(0,+\infty)$，$a<f(x)<b$恒成立，求$b-a$的最小值．

24．设集合$A_1,A_2,\cdots,A_n$是集合$\{1,2,3,4,5,6,7\}$的n个不同子集，同时满足下列2个条件：对于任意$k,l\in\mathbf{N}^*$，且$k,l\leq n$，

① 集合A_k中至少含有3个元素，且$k\notin A_k$；

② $k\in A_l$的充要条件是$l\notin A_k$（$k\neq l$）．

如图，作n行n列数表，定义数表中位于第k行第l列的数为$a_{kl}=\begin{cases}0, & k\notin A_l,\\ -1, & k\in A_l.\end{cases}$

a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
a_{n1}	a_{n2}	$\cdots$	a_{nn}

（Ⅰ）判断该数表中每一列至少有多少个-1；

（Ⅱ）证明：$n\geqslant 7$．

后期复习参考资料　　2018. 5

一、选择题：

1．B；　2．B；　3．B；　4．D；　5．A；　6．C；　7．B；　8．D．

提示：

4．将集合$\{1,2,3,\cdots,10\}$中的元素按被 3 除的余数划分成如下三个集合：

$A=\{1,4,7,10\},B=\{2,5,8\},C=\{3,6,9\}$．

从集合A,B,C中取 3 个不同的元素，其和能被 3 整除，不同取法的种数是

$C_4^3+C_3^3+C_3^3+C_4^1C_3^1C_3^1=42$．

7．易知$F(1,0)$．设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$．

于是$-4=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{16}(y_1y_2)^2+y_1y_2$，

所以$\frac{1}{16}(y_1y_2+8)^2=0$，解得$y_1y_2=-8$．

所以$S_1\cdot S_2=[\frac{1}{2}|OF||y_1|]\cdot[\frac{1}{2}|OF||y_2|]=\frac{1}{4}|OF|^2\cdot|y_1y_2|=2$．

8．显然排除（A）和（B）．

假设M是奇数，则a_k-b_k　$(k=1,2,\cdots,2017)$必定都是奇数，其和也是奇数；

但$(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots+(a_{2017}-b_{2017})=\sum_{k=1}^{2017}a_k-\sum_{k=1}^{2017}b_k=0$，为偶数，矛盾！

二、填空题：

9．-5；　10．$(-\infty,0]\cup(\frac{1}{2},4)$；

11．答案不唯一，如$\frac{1}{2}$；　12．$-\frac{1}{3}$；

13．$(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}]\cup(1,+\infty)$；　14．$2\sqrt{2}$；

15．$(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}),(\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2})$；　16．④．

提示：

13．设$t=x-1$，则原式化为$g(t)=\frac{\sqrt{t^2+2t+2}}{t}$．

当$t>0$时，$g(t)=\sqrt{1+\frac{2}{t}+\frac{2}{t^2}}\in(1,+\infty)$；

当$t<0$时，$g(t)=-\sqrt{1+\frac{2}{t}+\frac{2}{t^2}}=-\sqrt{2(\frac{1}{t}+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}}\in(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}]$．

14．由 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leqslant 2\sqrt{2}$，得 $a+b\leqslant 2\sqrt{2}ab$．

又 $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab=4(ab)^3+4ab\geqslant 4\times 2\sqrt{ab(ab)^3}=8(ab)^2$，　①

所以 $a+b\geqslant 2\sqrt{2}ab$，从而 $a+b=2\sqrt{2}ab$．

①中等号成立为条件 $ab=1$，所以 $a+b=2\sqrt{2}$．

15．$y'=-2\sin 2x+2\cos x=-2\cos x\cdot(2\sin x-1)$．

令 $y'<0$，得

$\begin{cases}\cos x>0,\\2\sin x-1>0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\cos x<0,\\2\sin x-1<0.\end{cases}$

解得 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$，或 $\frac{5\pi}{6}<x<\frac{3\pi}{2}$．

三、解答题：

17．（Ⅰ）由 $A+B+C=\pi$ 及已知条件，

得 $4\cos^2\frac{C}{2}-\cos 2C=\frac{7}{2}$，

即 $4\cdot\frac{1+\cos C}{2}-(2\cos^2 C-1)=\frac{7}{2}$，

整理得 $2\cos^2 C-2\cos C+\frac{1}{2}=0$．

解得 $\cos C=\frac{1}{2}$．

由 $0<C<\pi$，

得 $C=\frac{\pi}{3}$．

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $A+B=\frac{2\pi}{3}$，所以 $2A+2B=\frac{4\pi}{3}$．

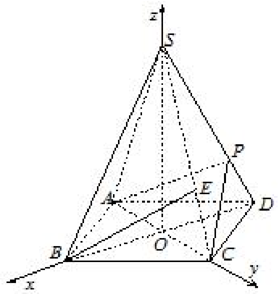
所以 $\cos^2 A+\cos^2 B=1+\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)=1+\frac{1}{2}[\cos 2A+\cos(\frac{4\pi}{3}-2A)]$

$$=1+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\cos 2A-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2A)=1+\frac{1}{2}\cos(2A+\frac{\pi}{3})．$$

由 $0 < A < \frac{2\pi}{3}$，得 $\frac{\pi}{3} < 2A + \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{3}$.

所以 $\cos^2 A + \cos^2 B$ 的取值范围是 $[\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$.

18．连接 BD，设 $AC \cap BD = O$，如图建立空间直角坐标系.



（Ⅰ）设 $AB = a$，则 $SB = \sqrt{2}a$，$SO = \frac{\sqrt{6}}{2}a$，

$\therefore$ $S(0, 0, \frac{\sqrt{6}a}{2})$，$D(-\frac{\sqrt{2}a}{2}, 0, 0)$，$C(0, \frac{\sqrt{2}a}{2}, 0)$，

$\therefore$ $\overrightarrow{OC} = (0, \frac{\sqrt{2}a}{2}, 0)$，$\overrightarrow{SD} = (-\frac{\sqrt{2}a}{2}, 0, -\frac{\sqrt{6}a}{2})$.

$\because$ $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{SD} = 0$，

$\therefore$ $AC \perp SD$.

（Ⅱ）平面 PAC 的一个法向量 $\overrightarrow{DS} = (\frac{\sqrt{2}a}{2}, 0, \frac{\sqrt{6}a}{2})$，平面 DAC 的一个法向量 $\overrightarrow{OS} = (0, 0, \frac{\sqrt{6}a}{2})$.

设二面角 $P-AC-D$ 的平面角为 θ，

$\because$ $\cos\theta = \frac{\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{DS}}{|\overrightarrow{OS}||\overrightarrow{DS}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore$ 二面角 $P-AC-D$ 的大小为 30°.

（Ⅲ）侧棱 SC 上存在一点 E，使得 $BE \parallel$ 平面 PAC .

由（Ⅱ）得 $\overrightarrow{DS}$ 是平面 PAC 的一个法向量，$\overrightarrow{DS} = (\frac{\sqrt{2}a}{2}, 0, \frac{\sqrt{6}a}{2})$，$\overrightarrow{CS} = (0, -\frac{\sqrt{2}a}{2}, \frac{\sqrt{6}a}{2})$.

设 $\overrightarrow{CE} = \lambda\overrightarrow{CS}$，

则 $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BC} + \lambda\overrightarrow{CS} = (-\frac{\sqrt{2}a}{2}, \frac{\sqrt{2}a}{2}(1-\lambda), \frac{\sqrt{6}\lambda a}{2})$，

而 $\overrightarrow{DS} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$，解得 $\lambda = \frac{1}{3}$.

即当 $SE : EC = 2:1$ 时，$\overrightarrow{DS} \perp \overrightarrow{BE}$，

$\because$ $BE \not\subset$ 平面 PAC，

$\therefore$ $BE \parallel$ 平面 PAC .

19．（Ⅰ）设椭圆C的半焦距为c．依题意，得

$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$ab=2\sqrt{2}$，且$a^2=b^2+c^2$．

解得 $a=2$，$b=\sqrt{2}$．

所以椭圆C的方程是 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$．

（Ⅱ）①当AC斜率不存在时，因为四边形$OABC$是平行四边形，

所以显然B在椭圆的左右顶点处，不妨设为右顶点，则$B(2,0)$，

此时显然可求$A(1,-\frac{\sqrt{6}}{2})$，$B(1,\frac{\sqrt{6}}{2})$，得$|AC|=\sqrt{6}$，

所以四边形$OABC$的面积等于$\frac{1}{2}\times|AC|\times|OB|=\sqrt{6}$．

②若B不在椭圆的左右顶点处，设$AC:y=kx+m$，

由$\begin{cases}y=kx+m\\x^2+2y^2=4\end{cases}$ 得$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-4=0$，

设$A(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-4}{1+2k^2}$，

所以$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=\frac{2m}{1+2k^2}$，

因为$OABC$为平行四边形，所以$\overline{OB}=\overline{OA}+\overline{OC}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$，

所以$B(-\frac{4km}{1+2k^2},\frac{2m}{1+2k^2})$，

代入椭圆方程，化简得$2m^2=1+2k^2$．

所以 $x_1+x_2=-\frac{2k}{m}$，$x_1x_2=\frac{m^2-2}{m^2}$．

因为 $|AC|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{\frac{6(1+k^2)}{m^2}}$．

因为点O到AC的距离为$d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$．

所以，四边形$OABC$的面积等于$2S_{\Delta OAC}=2\times\frac{1}{2}\times|AC|\times d=\sqrt{6}$．

综合①②，四边形$OABC$的面积为定值$\sqrt{6}$．

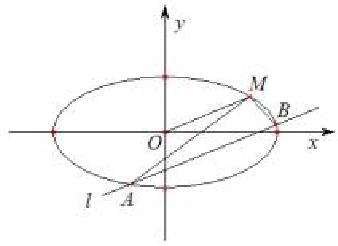
20.（Ⅰ）设椭圆C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$的半焦距为c.

因为椭圆C的离心率是$\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{4}$， 即$a=2b$.

由$\begin{cases} a=2b, \\ \frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a^2=8, \\ b^2=2. \end{cases}$

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$.



（Ⅱ）将$y=\frac{1}{2}x+m$代入$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$，

消去y整理得 $x^2+2mx+2m^2-4=0$.

令$\Delta=4m^2-4(2m^2-4)>0$，解得$-2<m<0$.

设点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

则$x_1+x_2=-2m$， $x_1x_2=2m^2-4$.

设直线MA，MB的斜率分别是k_1，k_2，

则$k_1+k_2=\frac{y_1-1}{x_1-2}+\frac{y_2-1}{x_2-2}=\frac{(y_1-1)(x_2-2)+(y_2-1)(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}$，

因为 $(y_1-1)(x_2-2)+(y_2-1)(x_1-2)$

$=(\frac{1}{2}x_1+m-1)(x_2-2)+(\frac{1}{2}x_2+m-1)(x_1-2)$

$=x_1x_2+(m-2)(x_1+x_2)-4(m-1)$

$=2m^2-4+(m-2)(-2m)-4(m-1)$

$=0$，

又 $m<0$，

所以 $\angle AMB$的平分线MI垂直于x轴，

因此 $x_0=2$.

21.（Ⅰ）当$a=1$时，$f(x)=\ln(x+1)+\dfrac{1}{x+1}+3x-1$，

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(1+x)^2}+3.$$

由于$f(0)=0$，$f'(0)=3$，

所以曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程是$3x-y=0$.

（Ⅱ）$f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$.

所以$f'(x)=\dfrac{a}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}+3=\dfrac{3x^2+(a+6)x+a+2}{(x+1)^2}$.

① 若$a\geqslant -2$，则当$x>0$时，$f'(x)>0$恒成立，所以$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增.

所以，当$x\geqslant 0$时，$f(x)\geqslant f(0)=0$.

所以$a\geqslant -2$符合要求.

② 若$a<-2$，则方程$3x^2+(a+6)x+a+2=0$必有两个异号的实数根.

设这两个实根为x_1,x_2，且$x_1<0<x_2$.

所以，当$0<x<x_2$时，$f'(x)<0$，此时$f(x)$在$[0,x_2]$上单调递减，

即 $f(x_2)<f(0)=0$.

故 $a<-2$不符合要求.

综上，a的取值范围是$[-2,+\infty)$.

22.（Ⅰ）设$f(x)=e^x$，则$f'(x)=e^x$，所以$f'(0)=1$.

所以L的方程为$y=x+1$.

令$g(x)=f(x)-(x+1)$，则除切点之外，曲线C在直线L的上方等价于

$g(x)>0$（$\forall x\in\mathbf{R}$，$x\neq 0$）.

$g(x)$满足$g(0)=0$，且$g'(x)=f'(x)-1=e^x-1$.

当 $x<0$ 时，$g'(x)<0$，故 $g(x)$ 单调递减；

当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，故 $g(x)$ 单调递增．

所以，$g(x)>g(0)=0$（$\forall x\in\mathbf{R}$，$x\neq 0$）．

所以除切点之外，曲线 C 在直线 L 的上方．

（II）$h(x)$ 的定义域是 $\{x\mid x>-1\}$，且 $h'(x)=\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{x+1}-a$．

① 当 $a\leqslant 2$ 时，由（I）得 $\mathrm{e}^x\geqslant x+1$，

所以 $h'(x)=\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{x+1}-a\geqslant x+1+\dfrac{1}{x+1}-a\geqslant 2-a\geqslant 0$．

所以 $h(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x)\geqslant h(0)=1$ 恒成立，符合题意．

② 当 $a>2$ 时，由 $x\in[0,+\infty)$，

且 $h'(x)$ 的导数 $h''(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)^2\cdot\mathrm{e}^x-1}{(x+1)^2}\geqslant 0$，

所以 $h'(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增．

因为 $h'(0)=2-a<0$，$h'(\ln a)=\dfrac{1}{1+\ln a}>0$，

于是存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $h'(x_0)=0$．

所以 $h(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 上单调递减，在区间 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x_0)<h(0)=1$，此时 $h(x)\geq 1$ 不会恒成立，不符合题意．

综上，a 的取值范围是 $(-\infty,2]$．

23．（Ⅰ）$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，故点$(-1,0)$不在$y=f(x)$图像上.

$$f'(x)=\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x+1}$$

由$\begin{cases}\dfrac{y_0}{x_0+1}=f'(x_0),\\ f'(x_0)=\ln(1+\dfrac{1}{x_0})-\dfrac{1}{x_0+1},\\ y_0=x_0\ln(1+\dfrac{1}{x_0}),\end{cases}$ 可解得：$x_0=\dfrac{1}{e-1}$.

所以$y_0=x_0\ln(1+\dfrac{1}{x_0})=\dfrac{1}{e-1}$，$f'(x_0)=\dfrac{1}{e}$，

故l的方程为$y-\dfrac{1}{e-1}=\dfrac{1}{e}(x-\dfrac{1}{e-1})$，即$y=\dfrac{1}{e}x+\dfrac{1}{e}$.

（Ⅱ）由$g(x)=\ln(1+x)-cx$，$x\in(0,+\infty)$，得：$g'(x)=\dfrac{1}{1+x}-c$.

注意到$0<\dfrac{1}{1+x}<1$，

①当$c\leqslant 0$时，$g'(x)>0$，所以$g(x)$在$(0,+\infty)$递增;

②当$c\geqslant 1$时，$g'(x)<0$，所以$g(x)$在$(0,+\infty)$递减;

③当$0<c<1$时，令$g'(x)=0$得：$x=\dfrac{1}{c}-1$.

x	$(0,\frac{1}{c}-1)$	$\frac{1}{c}-1$	$(\frac{1}{c}-1,+\infty)$
$g'(x)$	+	0	−
$g(x)$	↗	极大值	↘

综上，当$c\leqslant 0$时，$g(x)$的单调增区间是$(0,+\infty)$，无单调减区间;

当$c\geqslant 1$时，$g(x)$的单调减区间是$(0,+\infty)$，无单调增区间;

当$0<c<1$时，$g(x)$的单调增区间是$(0,\dfrac{1}{c}-1)$，单调减区间是$(\dfrac{1}{c}-1,+\infty)$.

（Ⅲ）对任意 $x\in(0,+\infty)$，$a<f(x)<b$ 等价于 $\frac{a}{x}<\ln(1+\frac{1}{x})<\frac{b}{x}$.

设 $u=\frac{1}{x}\in(0,+\infty)$，则 $\frac{a}{x}<\ln(1+\frac{1}{x})<\frac{b}{x}$ 等价于 $au<\ln(1+u)<bu$，

即 $\ln(1+u)-au>0$，且 $\ln(1+u)-bu<0$.

由（Ⅱ）知：

当 $c\leqslant 0$ 时，$g(u)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 单调递增，故 $g(u)>g(0)=0$，

即对任意 $a\leqslant 0$，$\ln(1+u)>au$；

当 $c\geqslant 1$ 时，$g(u)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 单调递减，故 $g(u)<g(0)=0$，

即对任意 $b\geqslant 1$，$\ln(1+u)<bu$.

当 $0<c<1$ 时，$g(u)$ 在区间 $(0,\frac{1}{c}-1)$ 单调递增，在区间 $(\frac{1}{c}-1,+\infty)$ 单调递减.

所以 $g(u)_{极大}=g(\frac{1}{c}-1)>g(0)=0$.

又可证得 $g(\frac{1}{c^2})<0\Leftrightarrow\ln(1+\frac{1}{c^2})<\frac{1}{c}\Leftrightarrow e^{\frac{1}{c}}-\frac{1}{c^2}-1>0$，当 $0<c<1$ 时成立，

所以存在 $u_0\in(\frac{1}{c}-1,\frac{1}{c^2})$，使得 $g(u_0)=0$，且当 $u\in(0,u_0)$ 时，$g(u)>0$；当 $u\in(u_0,+\infty)$ 时，$g(u)<0$，不合题意.

综上，b 的最小值为 1，a 的最大值为 0，故 $b-a$ 的最小值为 1.

24.（Ⅰ）证明：对于任意 $l\in\mathbf{N}^*$，且 $l\leq n$，

由 ① 知，集合 A_l 中至少含有三个元素，不妨设这三个元素为 p,q,r $(1\leq p,q,r\leq n)$，

所以数表的第 l 列至少存在 3 个数 a_{pl},a_{ql},a_{rl}，使得 $a_{pl}=a_{ql}=a_{rl}=-1$.

从而在数表的第 l 列至少有 3 个 -1，

由 l 的任意性知，该数表中每一列至少有 3 个 -1.

（Ⅱ）由 ① 知，$k\notin A_k$，从而 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=0$.

又对于任意 $k,l\in\mathbf{N}^*$，且 $k,l\leq n$，$k\in A_l$ 或 $k\notin A_l$ 二者必居其一，且仅居其一，

从而除去 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 外，a_{kl} 和 a_{lk} 二者必是一个为 0 而另一个为 -1，

故数表中共有$\dfrac{n^2-n}{2}$个-1.

另一方面，由 ① 得，该数表中至少有$3n$个-1，

所以有 $\dfrac{n^2-n}{2}\geqslant 3n$ 成立，

所以 $n\geqslant 7$.

北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生，助力千万学子，圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 10 万+。

北京高考在线_2018 年北京高考门户网站

http://www.gaokzx.com/

北京高考资讯微信：bj-gaokao

北京高考资讯

关于我们

北京高考资讯隶属于太星网络旗下，北京地区高考领域极具影响力的升学服务平台。

北京高考资讯团队一直致力于提供最专业、最权威、最及时、最全面的高考政策和资讯。期待与更多中学达成更广泛的合作和联系。

长按二维码 识别关注

微信公众号：bj-gaokao

官方网址：www.gaokzx.com

咨询热线：010-5751 5980