通州区 2023—2024 学年第一学期高二年级期末质量检测

数学试卷

2024 年 1 月

本试卷共 4 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，请将答题卡交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知等差数列 $\{a_n\}$，$a_6=10$，$a_9=20$，则 a_1 等于

(A) -1　(B) 0　(C) 2　(D) 5

(2) 已知 P 为双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 右支上一点，F_1，F_2 为双曲线的左右焦点，$|PF_1|-|PF_2|$ 等于

(A) 8　(B) 6　(C) 4　(D) 3

(3) 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点为 F_1，F_2，上下顶点为 B_1，B_2，若四边形 $F_1B_1F_2B_2$ 为正方形，则椭圆 C 的离心率为

(A) $\sqrt{2}$　(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(D) $\frac{1}{2}$

(4) 已知点 $A(x_0,y_0)$ 在抛物线 $y^2=4x$ 上，且点 A 到抛物线准线的距离为 3，则 y_0 等于

(A) 1　(B) 2　(C) ± 2　(D) $\pm 2\sqrt{2}$

(5) 已知双曲线 C：$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，则 C 的渐近线方程为

(A) $y=\pm\sqrt{3}x$　(B) $y=\pm 3x$　(C) $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$　(D) $y=\pm\frac{1}{3}x$

(6) 已知数列 $\{a_n\}$，$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=2^n$，则 a_{10} 等于

(A) 511　(B) 1022　(C) 1023　(D) 2047

(7) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_1=10$，公差 $d=-2$，则

(A) S_n 有最大值为 $\frac{121}{4}$　(B) S_n 有最大值为 $\frac{81}{4}$

(C) S_n 有最大值为 30　(D) S_n 有最小值为 30

(8) 已知首项为 a_1，公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$，其前 n 项和为 S_n，则“$a_1>0$，$q>1$”是“S_n 单调递增”的

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

(9) 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，直线 $y=x+m$ 与 C 交于 A，B 两点，若 $\triangle F_1AB$ 面积是 $\triangle F_2AB$ 面积的 2 倍，则 m 等于

(A) 6　(B) $\frac{2}{3}$　(C) $-\frac{2}{3}$　(D) -6

(10)已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\dfrac{1-2n}{n+1}$,给出下列四个结论:

①数列$\{a_n\}$为单调递增数列,且存在常数$m\leqslant -2$,使得$a_n>m$恒成立;

②数列$\{a_n\}$为单调递减数列,且存在常数$m\leqslant -2$,使得$a_n>m$恒成立;

③数列$\{a_n\}$为单调递增数列,且存在常数$m<0$,使得$a_n\leqslant m$恒成立;

④数列$\{a_n\}$为单调递减数列,且存在常数$m<0$,使得$a_n\leqslant m$恒成立.

其中正确结论的个数有

(A)1个　　(B)2个　　(C)3个　　(D)4个

第二部分(非选择题　共110分)

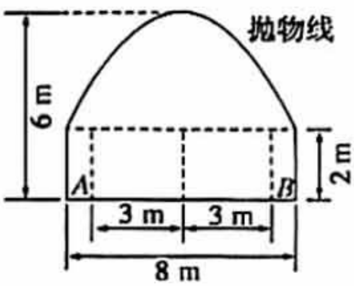
二、填空题共5小题,每小题5分,共25分。

(11)已知等比数列$\{a_n\}$,$a_2=1$,$a_3=3$,则$a_5=$________.

(12)若抛物线$y^2=2px(p>0)$的准线经过双曲线$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$的左焦点,则$p=$________.

(13)已知数列$\{b_n\}$的通项公式是$b_n=n^2-tn+4$,使数列中存在负数项的一个t的值为________.

(14)如图,一隧道内设双行线公路,其截面由一个长方形和抛物线构成.为保证安全,要求行使车辆顶部(设为平顶)与隧道顶部在竖直方向上高度之差不小于0.5 m,已知行车道AB总宽度$|AB|=6$(m),则车辆通过隧道的限制高度为________m.



(15)已知曲线W:$|x||y|=1$.关于曲线W有四个结论:

①曲线W既是轴对称图形又是中心对称图形;

②曲线W的渐近线方程为$x=0$,$y=0$;

③当$xy>0$时曲线W为双曲线,此时实轴长为2;

④当$xy>0$时曲线W为双曲线,此时离心率为$\sqrt{2}$.

则所有正确结论的序号为________.

三、解答题共6小题,共85分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(16)(本小题12分)

已知圆C:$x^2+y^2-4x-2y+4=0$,点$P(-1,0)$.

(Ⅰ)求圆C的圆心坐标及半径;

(Ⅱ)求过P点的圆C的切线方程.

(17)(本小题 14 分)

已知直线 $x+y-3=0$ 与抛物线 $C:y^2=8x$ 相交于 A,B 两点.

(Ⅰ)求弦长 $|AB|$ 及线段 AB 的中点坐标;

(Ⅱ)试判断以 AB 为直径的圆是否经过坐标原点 O? 并说明理由.

(18)(本小题 14 分)

设数列 $\{a_n\}$ 为公差不为零的等差数列,其前 n 项和为 S_n,再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个符合题目要求的条件作为已知,完成下列问题.

(Ⅰ)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(Ⅱ)设 $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$,求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

条件①: $a_1+a_2=4$ 且 $S_4=8$;

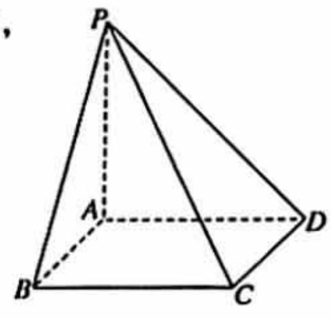
条件②: $a_1+a_2=3$ 且 $S_4=10$;

条件③: $S_4=8$ 且 $S_8=2S_6$.

注:如果选择的条件不符合要求,得 0 分;如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.

(19)(本小题 15 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为正方形,$PA\perp$ 平面 $ABCD$, $PA=AB=2$.



(Ⅰ)求证: $AD//$ 平面 PBC;

(Ⅱ)求平面 PAB 与平面 PCD 夹角的余弦值;

(Ⅲ)求点 B 到平面 PCD 的距离.

(20)(本小题 15 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,点 A,B 为椭圆 C 的左右顶点(A 点在左),$|AB|=4$,离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(Ⅰ)求椭圆 C 的标准方程;

(Ⅱ)过点$(-1,0)$的直线 l 与椭圆 C 交于 M,N(与 A,B 不重合)两点,直线 AM 与 BN 交于点 P,证明:点 P 在定直线上.

(21)(本小题 15 分)

已知数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$满足:$a_n>0$,$b_n>0$,$a_{n+1}=a_n-\dfrac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}}$,$b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{b_i}}$.

(注:$\sum\limits_{i=1}^{n}i=1+2+3+\cdots\cdots+n$)

(Ⅰ)若 $a_1=1$,求 a_2 及数列$\{a_n\}$的通项公式;

(Ⅱ)若 $a_{100}b_{100}=a_{101}b_{101}$,求 a_1-b_1 的值.

通州区 2023—2024 学年第一学期高二年级期末质量检测

数学参考答案及评分标准

2024 年 1 月

一、选择题(共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分)

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
答案	B	B	C	D	A	C	C	A	D	B

二、填空题(共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分)

(11)27　(12)4　(13)5(答案不唯一,$(4,+\infty)$中的一个值)　(14)3.25

(15)①②④

说明:(15)题全选对 5 分,漏选 3 分,其他情况 0 分。

三、解答题(共 6 小题,共 85 分)

(16)(本小题 12 分)

解:(Ⅰ)圆 C 的圆心坐标为$(2,1)$,半径为 1. ………… 4 分

(Ⅱ)设过 P 点的圆 C 的切线的斜率为 k,

则切线方程为 $y=k(x+1)$. ………… 6 分

圆心到直线 $y=k(x+1)$的距离为 $d=\dfrac{|2k-1+k|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{|3k-1|}{\sqrt{k^2+1}}$. ………… 8 分

因为直线 $y=k(x+1)$与圆 C 相切,

所以$\dfrac{|3k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$.

解得 $k=0,k=\dfrac{3}{4}$. ………… 10 分

所以过 P 点的圆 C 的切线方程为 $y=0,y=\dfrac{3}{4}(x+1)$. ………… 12 分

(17)(本小题 14 分)

解:(Ⅰ)设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$, ………… 1 分

联立直线与抛物线方程,可得方程组$\begin{cases}x+y-3=0,\\ y^2=8x,\end{cases}$ ………… 3 分

消去 y 整理得 $x^2-14x+9=0$,而且 x_1,x_2 是该方程的两个根, ………… 4 分

由韦达定理可知$\begin{cases}x_1+x_2=14,\\ x_1x_2=9,\end{cases}$ ………… 6 分

所以$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=8\sqrt{5}$, ………… 8 分

线段 AB 的中点坐标为$(7,-4)$. ………… 10 分

(Ⅱ)以 AB 为直径的圆不经过坐标原点 O. ………… 11 分

因为$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=-15\neq 0$, ………… 13 分

所以 OA 与 OB 不垂直,所以以 AB 为直径的圆不经过坐标原点 O. ………… 14 分

(18)(本小题 14 分)

解:设等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1,公差为d.

选择条件①:$a_1+a_2=4$ 且 $S_4=8$,

解得 $d=0$,不合题意.

选择条件②:$a_1+a_2=3$ 且 $S_4=10$,

(Ⅰ)因为 $a_1+a_2=3$,$S_4=10$,

由等差数列的通项公式及前 n 项和公式得$\begin{cases}2a_1+d=3,\\4a_1+6d=10.\end{cases}$ ………………………… 4 分

解得 $a_1=1$,$d=1$. ………………………………………………………………………… 6 分

所以等差数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=n$. ………………………………………………… 7 分

(Ⅱ)因为 $a_n=n$,

所以 $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ ………………………………………… 10 分

所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}$

$=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

$=1-\dfrac{1}{n+1}$

$=\dfrac{n}{n+1}$. ………………………………………………………………………………… 14 分

选择条件③:$S_4=8$ 且 $S_8=2S_6$.

(Ⅰ)因为 $S_4=8$,$S_8=2S_6$,

由等差数列前 n 项和公式得$\begin{cases}2a_1+3d=4,\\d=-2a_1,\end{cases}$ ………………………………………… 4 分

解得 $a_1=-1$,$d=2$. ………………………………………………………………………… 6 分

所以等差数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n-3$. ……………………………………………… 7 分

(Ⅱ)因为 $a_n=2n-3$,

所以 $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{(2n-3)(2n-1)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2n-3}-\dfrac{1}{2n-1})$. …………………………… 10 分

所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=\dfrac{1}{-1\times1}+\dfrac{1}{1\times3}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-3)(2n-1)}$

$=\dfrac{1}{2}(-1-1+1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-3}-\dfrac{1}{2n-1})$

$=\dfrac{1}{2}(-1-\dfrac{1}{2n-1})$

$=-\dfrac{n}{2n-1}$. ………………………………………………………………………………… 14 分

(19)(本小题 15 分)

(Ⅰ)证明:因为 $ABCD$ 为正方形,

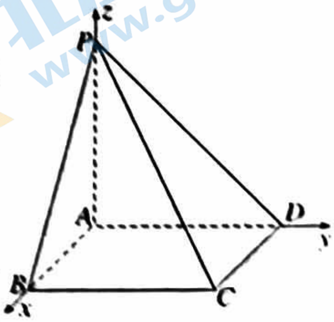
所以 $AD\,/\!/\,BC$.

因为 $BC\subset$ 平面 PBC, $AD\not\subset$ 平面 PBC,

所以 $AD\,/\!/$ 平面 PBC. ………………………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)解:依题意,AB, AD, AP 两两垂直.

以 A 为原点,AB, AD, AP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系.



因为 $PA=AB=2$,

则 $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(2,2,0)$, $D(0,2,0)$, $P(0,0,2)$.

$\overrightarrow{DC}=(2,0,0)$, $\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$, $\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$. ………… 5 分

设平面 PDC 的法向量为 $n=(x,y,z)$,平面 PAB 与平面 PCD 夹角为 θ,

则有 $\begin{cases} n\cdot\overrightarrow{DC}=0, \\ n\cdot\overrightarrow{PD}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x=0, \\ y-z=0. \end{cases}$

令 $y=1$,则得 $z=1$,此时 $n=(0,1,1)$. ………………………………………………… 7 分

又因为 $AD\perp$ 平面 PAB,

所以 $\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$ 为平面 PAB 的法向量.

所以 $\cos\theta=|\cos\langle n,\overrightarrow{AD}\rangle|=\dfrac{|n\cdot\overrightarrow{AD}|}{|n||\overrightarrow{AD}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

平面 PAB 与平面 PCD 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………………………… 10 分

(Ⅲ)解:因为平面 PDC 的法向量 $n=(0,1,1)$, $\overrightarrow{PB}=(2,0,-2)$,

又因为 $\left|\dfrac{n\cdot\overrightarrow{PB}}{n}\right|=\sqrt{2}$,

所以点 B 到平面 PDC 的距离为 $\sqrt{2}$. ………………………………………………… (15 分)

(20)(本小题 15 分)

解:由题意得 $\begin{cases} 2a=4, \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ a^2=b^2+c^2. \end{cases}$ ………………………………………………………… 2 分

解得 $\begin{cases} a=2, \\ b=1, \\ c=\sqrt{3}. \end{cases}$ ………………………………………………………………………… 4 分

所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………………… 5 分

（Ⅱ）当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=-1$，与椭圆 C 的交点坐标为 $M(-1,\frac{\sqrt{3}}{2})$，$N(-1,-\frac{\sqrt{3}}{2})$. ………………………………………… 6 分

直线 AM 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}(x+2)$，直线 BN 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{6}(x-2)$.

此时 P 点坐标为 $(-4,-\sqrt{3})$. ………………………………………… 7 分

当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的斜率为 k，直线 l 的方程为 $y=k(x+1)$，

$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

因为 M,N 与 A,B 不重合，所以 $k\neq 0$，

直线方程与椭圆方程联立得 $\begin{cases} y=k(x+1), \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$ ………………………………………… 8 分

消去 y 化简得 $(1+4k^2)x^2+8k^2x+4k^2-4=0$. ………………………………………… 9 分

因为 $\Delta>0$，

所以由韦达定理可知 $x_1+x_2=-\frac{8k^2}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-4}{1+4k^2}$. ………………………………………… 10 分

直线 AM 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线 BN 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$.

联立 $\begin{cases} y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2), \\ y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2), \end{cases}$ ………………………………………… 12 分

消去 y 化简得 $x=2\frac{y_2(x_1+2)+y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)-y_1(x_2-2)}$ ………………………………………… 13 分

$=2\frac{2x_1x_2+3x_2-x_1}{3x_1+x_2+4}$

$=2\frac{-\frac{16k^2+8}{1+4k^2}-4x_1}{\frac{8k^2+4}{1+4k^2}+2x_1}$ ………………………………………… 14 分

$=-4$

综上，点 P 在定直线 $x=-4$ 上. ………………………………………… 15 分

(21)（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）因为 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n-\frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}$，

所以 $a_2=a_1-\frac{1}{1+\frac{1}{a_1}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. ………………………………………… 2 分

因为 $a_n>0$，$a_{n+1}=a_n-\frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}$，

所以 $a_{n+1}<a_n$，$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}=\frac{1}{a_n-a_{n+1}}-1(n\in N^*)$ ………………………………………… 3 分

即 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n-a_{n+1}}-1(n\in N^*)$ ①

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_{n+1}-a_{n+2}}-1$ ②

①－②得 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_{n+1}-a_{n+2}}-\frac{1}{a_n-a_{n+1}}$， ………………………………………… 5 分

化简得 $a_{n+1}^2=a_na_{n+2}$.

即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$. ………………………………………… 6 分

所以数列 $\{a_n\}$ 成等比数列，公比为 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$. ………………………………………… 7 分

所以 $a_n=(\frac{1}{2})^{n-1}$. ………………………………………… 8 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知数列 $\{a_n\}$ 成等比数列，$a_n=a_1(\frac{a_1}{a_1+1})^{n-1}$.

因为 $b_n>0$，$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}}$，

所以 $b_{n+1}\neq b_n$，$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}=\frac{1}{b_{n+1}-b_n}-1$.

即 $\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b_{n+1}-b_n}-1(n\in N^*)$ ③

$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{1}{b_{n+2}-b_{n+1}}-1(n\in N^*)$ ④

④－③化简得 $\frac{1}{b_{n+2}-b_{n+1}}=\frac{1}{b_{n+1}-b_n}+\frac{1}{b_{n+1}}$. ………………………………………… 10 分

变形得 $\frac{b_{n+1}}{b_{n+2}-b_{n+1}}=\frac{b_{n+1}}{b_{n+1}-b_n}+1=\frac{b_{n+1}-b_n+b_n}{b_{n+1}-b_n}+1=\frac{b_n}{b_{n+1}-b_n}+2$.

即 $\frac{b_{n+1}}{b_{n+2}-b_{n+1}}-\frac{b_n}{b_{n+1}-b_n}=2(n\in N^*)$. ………………………………………… 12 分

所以 $\frac{b_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{b_1}{b_2-b_1}+2(n-1)=b_1+2n-1$.

所以 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{b_1+2n}{b_1+2n-1}$. ………………………………………… 13 分

因为 $a_{100}b_{100}=a_{101}b_{101}$，

所以 $\frac{a_{100}}{a_{101}}=\frac{b_{101}}{b_{100}}$.

即 $\frac{a_1+1}{a_1}=\frac{b_1+200}{b_1+199}$. ………………………………………… 14 分

即 $a_1=b_1+199$.

所以 $a_1-b_1=199$. ………………………………………… 15 分