江苏省百校联考高三年级第二次考试
数学试卷参考答案

1.D 【解析】法一:因为 $z(1+\mathrm{i})=1-3\mathrm{i}$,

所以 $z=\frac{1-3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(1-3\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{1-3-4\mathrm{i}}{2}=-1-2\mathrm{i}$,所以 $|\bar{z}|=|z|=\sqrt{5}$,故选 D.

法二:两边取模 $|z(1+\mathrm{i})|=|1-3\mathrm{i}|$,得 $|z|\cdot|1+\mathrm{i}|=|1-3\mathrm{i}|$,所以 $|\bar{z}|=|z|=\sqrt{5}$,故选 D.

2.C 【解析】解不等式 $\frac{1}{x-1}<-1$,即 $\frac{x}{x-1}<0$,所以 $0<x<1$,即 $M=(0,1)$,由 $\ln x<1$,得 $0<x<\mathrm{e}$,所以 $N=(0,\mathrm{e})$,

所以 $M\cup N=(0,\mathrm{e})$,故选 C.

3.C 【解析】$a=(-2,1)$,$c=(2,t)$.
若 $a/\!/c$,$t\times(-2)=2\times1$,得 $t=-1$,此时 a 与 c 互为相反向量;
若 $a\cdot c=(-2)\times2+t=t-4>0$,得 $t>4$,此时向量 a 与 c 的夹角为锐角.
故“$t>4$”是“向量 a 与 c 的夹角为锐角”的充要条件,故选 C.

4.C 【解析】由图象知 $T=4\times(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3})=\pi$,故 $\omega=2$.

将 $(\frac{7\pi}{12},-1)$ 代入解析式,得 $\sin(\frac{7\pi}{6}+\phi)=-1$,所以 $\frac{7\pi}{6}+\phi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,

又 $|\phi|<\frac{\pi}{2}$,即 $\phi=\frac{\pi}{3}$,所以 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$.故选 C.

5.C 【解析】抛掷两次总的基本事件有 36 个.当 $x=1$ 时,没有满足条件的基本事件;
当 $x=2$ 时,$y=1$ 满足;当 $x=3$ 时,$y=1,2,6$ 满足;当 $x=4$ 时,$y=1,2,3,5,6$ 满足;

当 $x=5$ 时,$y=1,2,6$ 满足;当 $x=6$ 时,$y=1$ 满足.总共有 13 种满足题意,所以 $P(A)=\frac{13}{36}$,

故选 C.

6.B 【解析】设切点为 $(x_0,\ln x_0)$,$y'=\frac{1}{x}$,则 $\begin{cases}a=\frac{1}{x_0},\\ax_0+b=\ln x_0,\end{cases}$ 得 $b=\ln x_0-1$,$\therefore 2a+b=\frac{2}{x_0}+\ln x_0-1$.设

$f(x)=\frac{2}{x}+\ln x-1(x>0)$,$f'(x)=-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-2}{x^2}$,当 $x\in(0,2)$ 时,$f'(x)<0$,当 $x\in(2,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,

$\therefore f(x)_{\min}=f(2)=\ln 2$,$\therefore 2a+b$ 的最小值为 $\ln 2$.

7.C 【解析】因为抛物线 C 过点 $P(1,-2)$,所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$,线段 AB 长度的最小值为通径 $2p=4$,所以 A 错误;

由定义知 $AA_1=AF, AA_1 // x$ 轴,所以 $\angle AFA_1=\angle AA_1F=\angle A_1FO$,同理 $\angle BFB_1=\angle B_1FO$,所以 $\angle A_1FB_1=90°$,所以B错误;

设直线与抛物线 C 交于 AB: $x=my+1$,联立抛物线,得 $y^2-4my-4=0$,设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,则 $y_1\cdot y_2=-4$, $k_{OA}=\frac{y_1}{x_1}=\frac{4}{y_1}=-y_2$,因为 $B_1(-1,y_2)$,所以 $k_{OB_1}=-y_2=k_{OA}$, A,O,B_1 三点共线,所以C正确;

设 AB 的中点为 $M(x_0,y_0)$,则 $y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=2m$, $x_0=my_0+1=2m^2+1$,取 $m=-1$, $M(3,-2)$,所以D错误. 故选C.

8. D 【解析】当 $n=1$ 时, $a_1=\frac{1}{2}$,由 $S_{n+1}+a_{n+1}=1$,得 $2a_{n+1}-a_n=0$, ∴ $a_n=\frac{1}{2^n}$,显然 $\{a_n\}$ 递减,要使得 a_n 最小,即要使得 n 最大,令 $\frac{1}{2^n}\geq\frac{1}{2m+1}$,得 $2^n\leq 2m+1$. 若 $m=1$,则 $n\leq 1$, $b_1=a_1=\frac{1}{2}$;若 $2\leq m\leq 3$,则 $n\leq 2$, $b_m=a_2=\frac{1}{4}$;若 $4\leq m\leq 7$,则 $n\leq 3$, $b_m=a_3=\frac{1}{8}$;若 $8\leq m\leq 15$,则 $n\leq 4$, $b_m=a_4=\frac{1}{16}$;…;若 $1024\leq m\leq 2047$ 则 $n\leq 11$, $b_m=a_{11}=\frac{1}{2^{11}}$. ∴ $T_1=b_1=\frac{1}{2}$, $T_3=b_1+(b_2+b_3)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, $T_7=b_1+(b_2+b_3)+(b_4+b_5+b_6+b_7)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,…, ∴ $T_{2047}=11\times\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$, ∴ $T_{2023}=\frac{11}{2}-\frac{24}{2^{11}}=\frac{11}{2}-\frac{3}{2^8}$,故选D.

9. ABD 【解析】$f(x)$ 是R上的奇函数,因此 $f(0)=0$,A正确;
由 $f(x-1)=f(x+1)$ 得 $f(x)=f(x+2)$,所以2是它的一个周期,B正确;
$f(2023)=f(2\times 1011+1)=f(1)$,而 $f(1)=0$,C错误;
$f(4)=f(0)=0$, $f(5)=f(3)$,因此 $f(5)=f(4)+f(3)$,D正确. 故选ABD.

10. BD 【解析】A选项,与渐近线平行的直线不可能与双曲线有两个交点,故A错误;
B选项,易证明线段 PQ 与线段 RS 的中点重合,故B正确;
C选项,当 k 越来越接近渐近线的斜率时, $S_{\triangle ORB}$ 会趋向于无穷,不可能有最大值,故C错误;
D选项,联立直线 l 与渐近线 $y=\frac{b}{a}x$,解得 $S(\frac{a^2}{\sqrt{2}b+a},\frac{ab}{\sqrt{2}b+a})$,

联立直线 l 与渐近线 $y=-\frac{b}{a}x$,解得 $R(\frac{a^2}{-\sqrt{2}b+a},\frac{ab}{\sqrt{2}b-a})$,由题可知, $\overrightarrow{RS}=2\overrightarrow{SB}$,

所以 $y_S-y_R=2(y_B-y_S)$,即 $3y_S=y_R+2y_B$,

$\frac{3ab}{\sqrt{2}b+a}=\frac{ab}{\sqrt{2}b-a}$,解得 $b=\sqrt{2}a$,所以 $e=\sqrt{3}$,故D正确. 故选BD.

11. BCD 【解析】对于A,假设 $BD\perp AP$,则 $BD\perp$ 平面 ACD_1,因为 $AC\subset$ 平面 ACD_1,所以 $BD\perp AC$,则四边形 $ABCD$ 是菱形, $AB=AD$,A不正确;
对于B,由平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 得 $CD_1 //$ 平面 ABB_1A_1,所以四棱锥 $P-ABB_1A_1$ 的底面积和高都是定值,所以体积是定值,B正确;

对于C, $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,故 $2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{A_1B}$,故C正确;

对于 D,设 $\overrightarrow{PC}=\lambda\overrightarrow{D_1C}$,

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})\cdot\overrightarrow{PC}$

$=(\lambda\overrightarrow{D_1C}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})\cdot\lambda\overrightarrow{D_1C}=(\lambda\overrightarrow{A_1B}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})\cdot\lambda\overrightarrow{A_1B}$

$=(\lambda\overrightarrow{AB}-\lambda\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})\cdot(\lambda\overrightarrow{AB}-\lambda\overrightarrow{AA_1})$

$=\lambda(\lambda-1)|\overrightarrow{AB}|^2-\lambda^2\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}-\lambda\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}-\lambda(\lambda-1)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}+\lambda^2|\overrightarrow{AA_1}|^2+\lambda\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}$

$=\lambda(\lambda-1)|\overrightarrow{AB}|^2-(2\lambda^2-\lambda)\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}-\lambda\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\lambda^2|\overrightarrow{AA_1}|^2+\lambda\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}$

$=\lambda(\lambda-1)\times4-(2\lambda^2-\lambda)\times4\cos60°-\lambda\times2\cos60°+4\lambda^2+\lambda\cdot2\cos60°$

$=4\lambda^2-2\lambda=(2\lambda-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\geqslant-\frac{1}{4}$,

当且仅当 $\lambda=\frac{1}{4}$ 时,等号成立,所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的最小值为 $-\frac{1}{4}$,故 D 正确. 故选 BCD.

12. BD 【解析】对于 A,因为 $a=1$,所以方程 $f(x)=0$ 即 $e^x+1-x=0$,又 $e^x\geqslant x+1>x-1$,所以 $e^x+1-x>0$ 恒成立,所以方程 $f(x)=0$ 不存在实数根,所以 A 错误.

对于 B,因为 $f(x)=a(e^x+a)-x$,定义域为 R,所以 $f'(x)=ae^x-1$,

当 $a\leqslant0$ 时,由于 $e^x>0$,则 $ae^x\leqslant0$,故 $f'(x)=ae^x-1<0$ 恒成立,

所以 $f(x)$ 在 R 上单调递减,所以 B 正确.

对于 C,由上知,当 $a>0$ 时,令 $f'(x)=ae^x-1=0$,解得 $x=-\ln a$.

当 $x<-\ln a$ 时,$f'(x)<0$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减;

当 $x>-\ln a$ 时,$f'(x)>0$,则 $f(x)$ 在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增.

当 $a>0$ 时,$f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减,在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增.

所以函数 $f(x)$ 有最小值,即最小值在 $x=-\ln a$ 处取得,所以 C 错误.

对于 D,由上知 $f(x)_{\min}=f(-\ln a)=a(e^{-\ln a}+a)+\ln a=1+a^2+\ln a$,

要证 $f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$,即证 $1+a^2+\ln a>2\ln a+\frac{3}{2}$,即证 $a^2-\frac{1}{2}-\ln a>0$ 恒成立,

令 $g(a)=a^2-\frac{1}{2}-\ln a(a>0)$,则 $g'(a)=2a-\frac{1}{a}=\frac{2a^2-1}{a}$.

令 $g'(a)<0$,则 $0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$;令 $g'(a)>0$,则 $a>\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $g(a)$ 在 $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 上单调递减,在 $(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(a)_{\min}=g(\frac{\sqrt{2}}{2})=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2-\frac{1}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\ln\sqrt{2}>0$,则 $g(a)>0$ 恒成立,

所以当 $a>0$ 时,$f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$恒成立,D 正确.综上,故选 BD.

13.$(-\infty,1]$ 【解析】因为 $x\in[0,2]$,所以由 $ax^2-2x+a\leqslant 0$,得 $a\leqslant\frac{2x}{x^2+1}$,

因为关于 x 的不等式 $ax^2-2x+a\leqslant 0$ 在区间$[0,2]$上有解,所以只需 a 小于或等于$\frac{2x}{x^2+1}$的最大值,当 $x=0$ 时,$\frac{2x}{x^2+1}=0$,当 $x\neq 0$ 时,$\frac{2x}{x^2+1}=\frac{2}{x+\frac{1}{x}}\leqslant 1$,当且仅当 $x=1$ 时,等号成立,

所以$\frac{2x}{x^2+1}$的最大值为 1,故 $a\leqslant 1$,即实数 a 的取值范围是$(-\infty,1]$.故答案为$(-\infty,1]$.

14.273 【解析】设公比为 q,$a_1+a_3+a_5=\frac{a_3}{q^2}+a_3+a_3q^2=\frac{91}{9}$,解得 $q^2=9$ 或$\frac{1}{9}$,因为$\{a_n\}$递增,所以 $q=3$,则

$a_4+a_6+a_8=(a_1+a_3+a_5)q^3=\frac{91}{9}\times 3^3=273$.故答案为 273.

15.12π 【解析】设圆台上、下底面圆心分别为 O_1,O_2,则圆台内切球的球心 O 一定在 O_1O_2的中点处,设球 O 与母线 AB 切于 M 点,∴$OM\perp AB$,∴$OM=OO_1=OO_2=R$(R 为球 O 的半径),∴$\triangle AOO_1$与$\triangle AOM$ 全等,∴$AM=r_1$,同理 $BM=r_2$,

∴$AB=r_1+r_2$,∴$O_1O_2^2=(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2=4r_1r_2=12$,∴$O_1O_2=2\sqrt{3}$,

∴圆台的内切球半径 $R=\sqrt{3}$,∴内切球的表面积为 $4\pi R^2=12\pi$.故答案为 12π.

16.$\frac{e}{2}$ 【解析】$f(x)\geqslant 0\Leftrightarrow ax+e^x\geqslant a\ln(ax+b)+(ax+b)$,设 $g(x)=a\ln x+x$,易知 $g(x)$在$(0,+\infty)$上递增,

且 $g(e^x)=a\ln e^x+e^x=ax+e^x$,故 $f(x)\geqslant 0\Leftrightarrow g(e^x)\geqslant g(ax+b)\Leftrightarrow e^x\geqslant ax+b$.

法一:设 $y=e^x$在点 $P(x_0,e^{x_0})$处的切线斜率为 a,$e^{x_0}=a$,即 $x_0=\ln a$,

切线 l:$y=ax+a(1-\ln a)$,
由 $e^x\geqslant ax+b$ 恒成立,可得 $b\leqslant a(1-\ln a)$,∴$ab\leqslant a^2(1-\ln a)$,设 $h(a)=a^2(1-\ln a)$,$a>0$,

$h'(a)=2a(\frac{1}{2}-\ln a)$,当 $a\in(0,e^{\frac{1}{2}})$时,$h'(a)>0$,当 $a\in(e^{\frac{1}{2}},+\infty)$时,$h'(a)<0$,∴$h(a)_{\max}=h(e^{\frac{1}{2}})=\frac{e}{2}$,∴$ab$ 的最大值为$\frac{e}{2}$.故答案为$\frac{e}{2}$.

法二:设 $h(x)=e^x-ax-b$,$h'(x)=e^x-a$,
当 $x\in(-\infty,\ln a)$时,$h'(x)<0$,当 $x\in(\ln a,+\infty)$时,$h'(x)>0$,
∴$h(x)_{\min}=h(\ln a)=a(1-\ln a)-b\geqslant 0$,即有 $b\leqslant a(1-\ln a)$,∴$ab\leqslant a^2(1-\ln a)$,下同法一.

17.【解析】(1)证法一:因为$\frac{1-\cos A}{\sin A}=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}=\frac{2\sin B\cos B}{2\cos^2 B}=\frac{\sin B}{\cos B}$,

所以$(1-\cos A)\cdot\cos B=\sin A\cdot\sin B$,……………………………………………………………………2 分

所以 $\cos B=\cos A\cos B+\sin A\sin B$,即 $\cos(A-B)=\cos B$,

而$-\frac{\pi}{2}<A-B<\frac{\pi}{2}$,$0<B<\frac{\pi}{2}$,所以 $A-B=B$,即 $A=2B$,……………………………………………… 4 分

所以 $\sin A=\sin 2B=2\sin B\cos B$.

由正弦定理得 $a=2b\cos B$,即 $\cos B=\frac{a}{2b}$. ………………………………………………………………5 分

证法二:由$\frac{1-\cos A}{\sin A}=\frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$,所以$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$,

即 $\sin\frac{A}{2}\cdot(1+\cos 2B)=\cos\frac{A}{2}\cdot\sin 2B$,

所以 $\sin\frac{A}{2}=\sin 2B\cdot\cos\frac{A}{2}-\cos 2B\cdot\sin\frac{A}{2}=\sin(2B-\frac{A}{2})$,

又 $0<A<\frac{\pi}{2}$,$0<B<\frac{\pi}{2}$且 $A+B>\frac{\pi}{2}$,

所以$\frac{A}{2}=2B-\frac{A}{2}$或$\frac{A}{2}+(2B-\frac{A}{2})=2B=\pi$,所以 $A=2B$ 或 $B=\frac{\pi}{2}$(与锐角$\triangle ABC$不合,舍去).

综上知,$A=2B$. 所以 $\sin A=\sin 2B=2\sin B\cos B$,由正弦定理得 $a=2b\cos B$,即 $\cos B=\frac{a}{2b}$.

(2)由上知 $A=2B$,则 $C=\pi-A-B=\pi-3B$,在锐角$\triangle ABC$中,$\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{4}$,……………………………………………7 分

由正弦定理,得$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin 2B}{\sin B}=\frac{2\sin B\cos B}{\sin B}=2\cos B\in(\sqrt{2},\sqrt{3})$,……………………………………………………9 分

所以$\frac{a}{b}$的取值范围是$(\sqrt{2},\sqrt{3})$. ……………………………………………………………………10 分

18.【解析】(1)记事件 D:选取的这个人感染了支原体肺炎病毒,记事件 E:此人来自甲市,记事件 F:此人来自乙市,记事件 G:此人来自丙市. ………………………………………………………………………… 1 分

$\Omega=E\cup F\cup G$,且 E,F,G 彼此互斥,

由题意可得 $P(E)=\frac{4}{20}=0.2$,$P(F)=\frac{6}{20}=0.3$,$P(G)=\frac{10}{20}=0.5$,

$P(D/E)=0.08$,$P(D/F)=0.06$,$P(D/G)=0.04$,……………………………………………………………… 3 分

由全概率公式可得

$P(D)=P(E)\cdot P(D/E)+P(F)\cdot P(D/F)+P(G)\cdot P(D/G)=0.2\times0.08+0.3\times0.06+0.5\times0.04=0.054$,…..5 分

所以从三市中任取一人,这个人感染支原体肺炎病毒的概率为 0.054. ………………………………6 分

(2)由条件概率公式可得 $P(E/D)=\frac{P(DE)}{P(D)}=\frac{P(E)\cdot P(D|E)}{P(D)}=\frac{0.2\times0.08}{0.054}=\frac{8}{27}$. ………………………………………11 分

所以当此人感染支原体肺炎病毒时,他来自甲市的概率为$\frac{8}{27}$. ………………………………………12 分

19.【解析】(1)因为 $2S_n-3a_n+3=0$,①

当 $n\geqslant 2$ 时,$2S_{n-1}-3a_{n-1}+3=0$,②..2 分

①-②得 $a_n=3a_{n-1}(n\geqslant 2)$,即$\frac{a_n}{a_{n-1}}=3(n\geqslant 2)$,

所以数列$\{a_n\}$是首项为 3,公比为 3 的等比数列. ....4 分

(2)由(1)知 $a_n=3^n$,所以 $S_n=\frac{3(1-3^n)}{1-3}=\frac{3^{n+1}-3}{2}$,

$T_n=a_1a_2a_3\cdots a_n=3\times 3^2\times 3^3\times\cdots\times 3^n=3^{1+2+3+\cdots+n}=3^{\frac{n(n+1)}{2}}$,..6 分

所以 $\sum_{k=1}^{n}\frac{(1-2k)(S_k-2a_k+\frac{3}{2})}{\log_3 T_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(1-2k)(\frac{3^{k+1}-3}{2}-2\cdot 3^k+\frac{3}{2})}{\log_3 3^{\frac{k(k+1)}{2}}}$

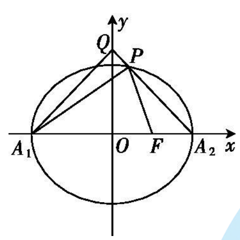
$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)3^k}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}(\frac{3^{k+1}}{k+1}-\frac{3^k}{k})=\frac{3^{n+1}}{n+1}-3>\frac{\lambda\cdot 3^n}{n+1}$对任意 $n\in\mathbf{N}^*$恒成立,..8 分

故 $\lambda<3-\frac{n+1}{3^{n-1}}$恒成立,..9 分

令 $f(n)=3-\frac{n+1}{3^{n-1}}$,则 $f(n+1)-f(n)=3-\frac{n+2}{3^n}-(3-\frac{n+1}{3^{n-1}})=\frac{2n+1}{3^n}>0$,..11 分

所以数列$\{f(n)\}$单调递增,所以 $f(n)_{\min}=f(1)=1$,所以 $\lambda<1$,故整数 λ 的最大值为 0. ....12 分

20.【解析】(1)由题可知,$|A_1A_2|=2a$,由$\overrightarrow{A_1F}=3\overrightarrow{FA_2}$,所以$|\overrightarrow{A_1F}|=3|\overrightarrow{FA_2}|$,所以$|\overrightarrow{A_1F}|=\frac{3}{4}|A_1A_2|=\frac{3}{2}a$,



即 $a+c=\frac{3}{2}a$,所以椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$. ....3 分

(2)法一:由题意知,$c=1,a=2$,所以椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,

直线 A_2P 的斜率存在,设直线 A_2P 的斜率为 k,

则直线方程为 $kx-y-2k=0$ 且 $k<0$,

设 A_1 到直线 A_2P 的距离为 h_1,F 到直线 A_2P 的距离为 h_2,

则 $h_1=\frac{|-4k|}{\sqrt{k^2+1}}$,$h_2=\frac{|-k|}{\sqrt{k^2+1}}$,..5 分

又$S_{\triangle A_1PQ}=\frac{1}{2}h_1\cdot|PQ|$,$S_{\triangle A_2FP}=\frac{1}{2}h_2\cdot|A_2P|$,$S_{\triangle A_1PQ}=S_{\triangle A_2FP}$,

所以$\frac{|PQ|}{|A_2P|}=\frac{h_2}{h_1}=\frac{1}{4}$,..8 分

由图可得$\overrightarrow{A_2P}=\frac{4}{5}\overrightarrow{A_2Q}$,又因为 $A_2(2,0)$,$Q(0,-2k)$,所以 $P(\frac{2}{5},-\frac{8}{5}k)$,... 10 分

又 P 在椭圆上,代入椭圆方程解得 $k^2=\frac{9}{8}$,因为 $k<0$,所以 $k=-\frac{3\sqrt{2}}{4}$. .... 12 分

法二:由题意知,直线 A_2P 的斜率存在,设直线 A_2P 的斜率为 k,则直线方程为 $kx-y-2k=0$ 且 $k<0$,

联立$\begin{cases}kx-y-2k=0,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消去 y 得到方程$(3+4k^2)x^2-16k^2x+16k^2-12=0$,

所以$x_{A_2}\cdot x_P=\frac{16k^2-12}{3+4k^2}$,所以 $x_P=\frac{8k^2-6}{3+4k^2}$,.. 5 分

代入直线方程得 $P(\frac{8k^2-6}{3+4k^2},\frac{-12k}{3+4k^2})$,$Q(0,-2k)$,..7 分

$S_{\triangle A_2FP}=\frac{1}{2}|A_2F|\cdot y_P=\frac{y_P}{2}$,$S_{\triangle A_1PQ}=S_{\triangle QA_1A_2}-S_{\triangle PA_1A_2}=\frac{1}{2}\cdot4\cdot(-2k)-\frac{1}{2}\cdot4\cdot y_P$,

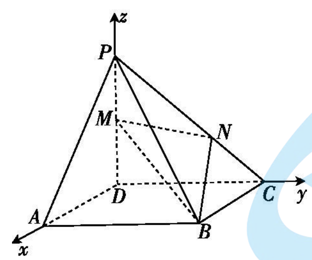
又因为$S_{\triangle A_1PQ}=S_{\triangle A_2FP}$,所以$\frac{5}{2}y_P=-4k$,..10 分

所以$\frac{5}{2}\cdot\frac{-12k}{3+4k^2}=-4k$,解得 $k^2=\frac{9}{8}$,因为 $k<0$,所以 $k=-\frac{3\sqrt{2}}{4}$. .... 12 分

21.【解析】(1)∵四边形 $ABCD$ 是正方形,∴$AD\perp CD$.

∵平面 $PCD\perp$平面 $ABCD$,平面 $PCD\cap$平面 $ABCD=CD$,$AD\subset$平面 $ABCD$,

∴$AD\perp$平面 PCD,



∵$PD\subset$平面 PCD,∴$AD\perp PD$,..2 分

同理 $CD\perp PD$.

∵$AD\cap CD=D$,$AD\subset$平面 $ABCD$,$CD\subset$平面 $ABCD$,

∴$PD\perp$平面 $ABCD$. ....4 分

(2)由(1)知 $AD\perp PD$,$CD\perp PD$,$AD\perp CD$,∴DA,DC,DP 两两垂直,如图,以 D 为原点,DA,DC,DP 所在直线分别为 x,y,z 轴,建立空间直角坐标系. 设 $PD=AD=2$,则 $D(0,0,0)$,$P(0,0,2)$,$B(2,2,0)$,$C(0,2,0)$,$M(0,0,1)$.

∵$PD\perp$平面 $ABCD$,

∴平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $m=(0,0,1)$,..5 分

$\overrightarrow{CN}=\lambda\overrightarrow{CP}(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$, ∴ $\overrightarrow{BM}=(-2,-2,1)$, $\overrightarrow{CP}=(0,-2,2)$,

∴ $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{BC}+\lambda\overrightarrow{CP}=(-2,0,0)+\lambda(0,-2,2)=(-2,-2\lambda,2\lambda)$,

设平面 BMN 的法向量为 $n=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BM}\cdot n=-2x-2y+z=0,\\ \overrightarrow{BN}\cdot n=-2x-2\lambda y+2\lambda z=0,\end{cases}$ 取 $x=\lambda$,则 $y=1-2\lambda$, $z=2-2\lambda$,

∴平面 BMN 的一个法向量为 $n=(\lambda,1-2\lambda,2-2\lambda)$. ....7 分

设平面 BMN 与平面 $ABCD$ 的夹角为 θ,

则 $\cos\theta=|\cos\langle n,m\rangle|=|\frac{n\cdot m}{|n||m|}|=\frac{|2-2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+(1-2\lambda)^2+(2-2\lambda)^2}}=\frac{|2-2\lambda|}{\sqrt{9\lambda^2-12\lambda+5}}$, ...8 分

设 $t=1-\lambda$,则 $0\leqslant t\leqslant 1$.

①当 $t=0$ 时, $\cos\theta=0$. ....9 分

②当 $t\neq 0$ 时, $\cos\theta=\frac{2|t|}{\sqrt{9t^2-6t+2}}=2\sqrt{\frac{t^2}{9t^2-6t+2}}=2\sqrt{\frac{1}{2(\frac{1}{t})^2-6\times\frac{1}{t}+9}}$

$=2\sqrt{\frac{1}{2[(\frac{1}{t}-\frac{3}{2})^2+\frac{9}{2}]}}$,

当 $t=\frac{2}{3}$ 时, $\cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, ∴ $0<\cos\theta\leqslant\frac{2\sqrt{2}}{3}$. ....11 分

综上, $0\leqslant\cos\theta\leqslant\frac{2\sqrt{2}}{3}$. ∴平面 BMN 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值的取值范围为 $[0,\frac{2\sqrt{2}}{3}]$. ....12 分

22.【解析】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, $f'(x)=\ln x-ax+1$, ...1 分

由题意, $f'(x)\leqslant 0$ 恒成立,即 $a\geqslant\frac{\ln x+1}{x}$ 恒成立, ...2 分

设 $h(x)=\frac{\ln x+1}{x}$, $h'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$,

当 $x\in(0,1)$ 时, $h'(x)>0$, $h(x)$ 递增,当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $h'(x)<0$, $h(x)$ 递减, ...3 分

∴ $h(x)_{\max}=h(1)=1$, ∴ $a\geqslant 1$. ....4 分

(2)证法一: ∵函数 $f(x)$ 有两个极值点,由(1)可知 $0<a<1$,

设 $g(x)=f'(x)=\ln x-ax+1$,则 x_1, x_2 是 $g(x)$ 的两个零点,

∵ $g'(x)=\frac{1}{x}-a$,当 $x\in(0,\frac{1}{a})$ 时, $g'(x)>0$,当 $x\in(\frac{1}{a},+\infty)$ 时, $g'(x)<0$,

∴ $g(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 上递增,在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上递减, ∴ $0<x_1<\frac{1}{a}<x_2$,又 ∵ $g(1)=1-a>0$,

∴ $0<x_1<1<\frac{1}{a}<x_2$, ...6 分

要证 $x_1x_2>\frac{1}{a}$,只需证 $x_2>\frac{1}{ax_1}(>\frac{1}{a})$,只需证 $g(x_2)<g(\frac{1}{ax_1})$,

即证 $g(\frac{1}{ax_1})=-\ln(ax_1)-\frac{1}{x_1}+1>0$,即证 $\ln(ax_1)+\frac{1}{x_1}-1<0$,(*)……8 分

由 $g(x_1)=\ln x_1-ax_1+1=0$,设 $ax_1=t\in(0,1)$,则 $\ln x_1=t-1$,$x_1=e^{t-1}$,则(*)$\Leftrightarrow\ln t+e^{1-t}-1<0$,……10 分

设 $G(t)=\ln t+e^{1-t}-1(0<t<1)$,$G'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{e^{t-1}}=\frac{e^{t-1}-t}{te^{t-1}}$,由(1)知 $\ln x\leqslant x-1$,$\therefore e^{x-1}\geqslant x$,$\therefore e^{t-1}-t\geqslant0$,即

$G'(t)\geqslant0$,$G(t)$在$(0,1)$上递增,$G(t)<G(1)=0$,故(*)成立,即 $x_1x_2>\frac{1}{a}$.……12 分

证法二:

先证明引理:当 $0<t<1$ 时,$\ln t<\frac{2(t-1)}{t+1}$,当 $t>1$ 时,$\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}$.

设 $G(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}(t>0)$,$G'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}\geqslant0$,$\therefore G(t)$在$(0,+\infty)$上递增,又 $G(1)=0$,当 $0<t<1$

时,$G(t)<G(1)=0$,当 $t>1$ 时,$G(t)>G(1)=0$,$\therefore$引理得证.……5 分

$\because$函数 $f(x)$有两个极值点,由(1)可知 $0<a<1$,设 $g(x)=f'(x)=\ln x-ax+1$,则 x_1,x_2是 $g(x)$的两个零点,

$\because g'(x)=\frac{1}{x}-a$,当 $x\in(0,\frac{1}{a})$时,$g'(x)>0$,当 $x\in(\frac{1}{a},+\infty)$时,$g'(x)<0$,

$\therefore g(x)$在$(0,\frac{1}{a})$上递增,在$(\frac{1}{a},+\infty)$上递减,$\therefore 0<x_1<\frac{1}{a}<x_2$,即 $0<ax_1<1<ax_2$.……6 分

要证 $x_1x_2>\frac{1}{a}$,只需证 $\ln x_1+\ln x_2>-\ln a$,即证 $a(x_2+x_1)>2-\ln a$,(*)……7 分

由引理可得 $ax_2+\ln a-1=\ln(ax_2)>\frac{2(ax_2-1)}{ax_2+1}$,化简可得 $a^2x_2^2+a(\ln a-2)x_2+\ln a+1>0$,①……9 分

同理 $ax_1+\ln a-1=\ln(ax_1)<\frac{2(ax_1-1)}{ax_1+1}$,即有 $a^2x_1^2+a(\ln a-2)x_1+\ln a+1<0$. ②……10 分

由①-②可得,$a^2(x_2+x_1)(x_2-x_1)+a(\ln a-2)(x_2-x_1)>0$,即 $a^2(x_2+x_1)+a(\ln a-2)>0$,即 $a(x_2+x_1)>2-\ln a$,故

(*)得证,从而 $x_1x_2>\frac{1}{a}$.……12 分