2018 北京昌平区高三（上）期末

数　　学(理)

2018.1

本试卷共 5 页，共 150 分．考试时长 120 分钟．考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效．

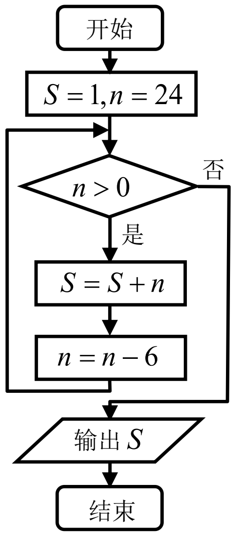
第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 若集合 $A=\{x\mid -2<x<1\}$，$B=\{x\mid x(x-3)>0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x\mid x<1或x>3\}$　　B. $\{x\mid -2<x<1\}$

C. $\{x\mid -2<x<0或x>3\}$　　D. $\{x\mid -2<x<0\}$



2. $\left|\dfrac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right|=$

A. $-\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. -1　　D. 1

3. 执行如图所示的程序框图，输出的 S 值为

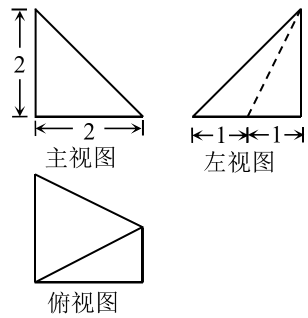
A. 43　　B. 55

C. 61　　D. 81

4. 设 x,y 满足 $\begin{cases}x+y\le 1,\\ x-y\le 1,\\ x\ge 0,\end{cases}$ 则 $z=2^{x+2y}$ 的最大值为

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. 2　　C. 4　　D. 16

5. 某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的四个侧面中，面积的最小值为



A. 1　　B. $\sqrt{2}$

C. 2　　D. $2\sqrt{2}$

6. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$，则函数 $f(x)$

A. 是偶函数，且在 $(-\infty,0)$ 上是增函数　　B. 是奇函数，且在 $(-\infty,0)$ 上是增函数

C. 是偶函数，且在 $(-\infty,0)$ 上是减函数　　D. 是奇函数，且在 $(-\infty,0)$ 上是减函数

7. 设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，则“$\cos x<x^2$”是“$\cos x<x$”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 四个足球队进行单循环比赛（每两队比赛一场），每场比赛胜者得 3 分，负者得 0 分，平局双方各得 1 分．比赛结束后发现没有足球队全胜，且四队得分各不相同，则所有比赛中可能出现的最少平局场数是

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

9. $(1+x)^7$ 的二项展开式中 x^2 的系数为__________.

10. 已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$，以极点为原点，极轴为 x 轴的正半轴，建立平面直角坐标系，那么曲线 C 的直角坐标方程为__________.

11. 已知直线 $l:4x+3y+5=0$，点 P 是圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 上的点，那么点 P 到直线 l 的距离的最小值是__________.

12. 已知 RtΔABC，$AB=AC=1$，点 E 是 AB 边上的动点，则 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的值为__________；$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CB}$ 的最大值为__________.

13. 某商业街的同侧有 4 块广告牌，牌的底色可选用红、蓝两种颜色，若要求任意相邻两块牌的底色不都为红色，则不同的配色方案有__________种.

14. 若函数 $f(x)=\begin{cases}-x+4, x\le 3,\\ \log_a x, x>3\end{cases}$（$a>0$ 且 $a\ne 1$），函数 $g(x)=f(x)-k$.

①若 $a=\dfrac{1}{3}$，函数 $g(x)$ 无零点，则实数 k 的取值范围是__________；

②若 $f(x)$ 有最小值，则实数 a 的取值范围是__________.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15. （本小题 13 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 为 1，且 a_1,a_3,a_4 成等比数列.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设数列 $b_n=2^{a_n+5}+n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

16. （本小题 13 分）

在 ΔABC 中，$\sqrt{3}a\sin C=c\cos A$.

（Ⅰ）求角 A 的大小；

（Ⅱ）若 $S_{\Delta ABC}=\sqrt{3}$，$b+c=2+2\sqrt{3}$，求 a 的值.

17. （本小题 13 分）

随着“中华好诗词”节目的播出，掀起了全民诵读传统诗词经典的热潮. 某社团为调查大学生对于“中华诗词”的喜好，从甲、乙两所大学各随机抽取了 40 名学生，记录他们每天学习“中华诗词”的时间，并整理得到如下频率分布直方图：

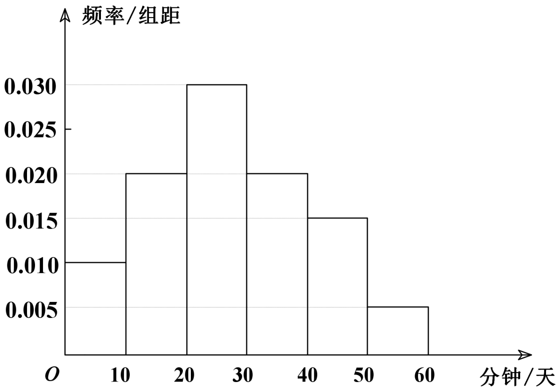


图 1：甲大学

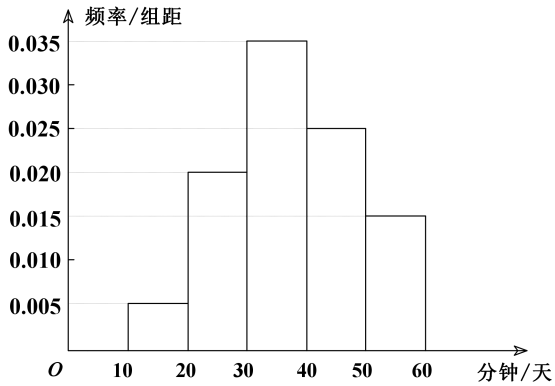


图 2：乙大学

根据学生每天学习“中华诗词”的时间，可以将学生对于“中华诗词”的喜好程度分为三个等级 ：

学习时间 t（分钟/天）	$t<20$	$20\le t<50$	$t\ge 50$
等级	一般	爱好	痴迷

(Ⅰ)从甲大学中随机选出一名学生，试估计其“爱好”中华诗词的概率；

(Ⅱ)从两组“痴迷”的同学中随机选出 2 人，记 ξ 为选出的两人中甲大学的人数，求 ξ 的分布列和数学期望 $E(\xi)$；

(Ⅲ)试判断选出的这两组学生每天学习“中华诗词”时间的平均值 $\overline{X}_{甲}$ 与 $\overline{X}_{乙}$ 的大小，及方差 $S^2_{甲}$ 与 $S^2_{乙}$ 的大小.（只需写出结论）

18.（本小题 14 分）

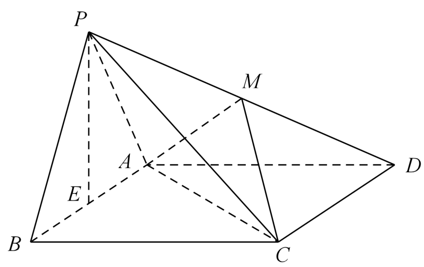
如图，在四棱锥 $P—ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\angle ABC=60^\circ$，ΔPAB 为正三角形，且侧面 $PAB\perp$ 底面 $ABCD$，E 为线段 AB 的中点，M 在线段 PD 上.

（I）当 M 是线段 PD 的中点时，

求证：PB // 平面 ACM;

（II）求证：$PE\perp AC$；

（III）是否存在点 M，使二面角 $M-EC-D$ 的大小为 60°，若存在，求出 $\dfrac{PM}{PD}$ 的值；若不存在，请说明理由.



19.（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=ax-\ln(x+1)$，$a\in\mathbf{R}$.

（I）当 $a=2$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点（0，f（0））处的切线方程；

（II）求函数 $f(x)$ 在区间[0，e −1]上的最小值.

20.（本小题 13 分）

已知数列 1，1，2，1，2，4，1，2，4，8，1，2，4，8，16，L ，其中第一项是 2^0，接下来的两项是 2^0，2^1，再接下来的三项是 2^0，2^1，2^2，依此类推. 设该数列的前 n 项和为 S_n，

规定：若 $\exists m\in \mathbf{N}^*$，使得 $S_m=2^p$（$p\in \mathbf{N}$），则称 m 为该数列的“佳幂数”.

（Ⅰ）将该数列的“佳幂数”从小到大排列，直接写出前 3 个“佳幂数”；

（Ⅱ）试判断 50 是否为“佳幂数”，并说明理由；

（III）（i）求满足 m>70 的最小的“佳幂数” m；

（ii）证明：该数列的“佳幂数”有无数个.

数学试题答案

一、选择题(共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	C	C	B	C	A	B

二、填空题(共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分)

9. 21　　10. $x^2+(y-1)^2=1$　　11. 2

12. -1 ； 2　　13. 6 ，7 ，8 答对一个即可给满分

14. $[-1,1)$ ； $(1,3]$

三、解答题(共 6 小题，共 80 分)

15.（共 13 分）

解：(Ⅰ) 在等差数列$\{a_n\}$中，因为a_1,a_3,a_4成等比数列，

所以 $a_3^2=a_1a_4$，

即 $(a_1+2d)^2=a_1^2+3a_1d$，

解得$a_1d+4d^2=0$.

因为$d=1$,

所以$a_1=-4$,

所以数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=n-5$.　　……………6 分

(Ⅱ) 由 (Ⅰ) 知$a_n=n-5$，

所以$b_n=2^{a_n+5}+n=2^n+n$. 得

$$\begin{aligned}S_n&=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n\\&=(2+2^2+2^3+\cdots+2^n)+(1+2+3+\cdots+n)\\&=\frac{2(1-2^n)}{1-2}+\frac{n(1+n)}{2}\\&=2^{n+1}+\frac{n(n+1)}{2}-2\end{aligned}$$

……………13 分

16.（共 13 分）

解：(I) 因为$\sqrt{3}a\sin C=c\cos A$，所以$\cos A\neq 0$，

由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，

得 $\sqrt{3}\sin A\cdot\sin C=\sin C\cdot\cos A$.

又因为 $C\in(0,\pi)$，$\sin C\neq 0$，

所以 $\tan A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

又因为 $A\in(0,\pi)$，

所以 $A=\dfrac{\pi}{6}$. ……………… 6 分

（II）由 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{4}bc=\sqrt{3}$，得 $bc=4\sqrt{3}$，

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\dfrac{\pi}{6}$，

即 $a^2=(b+c)^2-2bc-\sqrt{3}bc=(b+c)^2-8\sqrt{3}-12$，

因为 $b+c=2+2\sqrt{3}$，

解得 $a^2=4$.

因为 $a>0$，

所以 $a=2$. ………………13 分

17. （共 13 分）

解：（I）由图知，甲大学随机选取的 40 名学生中，“爱好”中华诗词的频率为 $(0.030+0.020+0.015)\times 10=0.65$，

所以从甲大学中随机选出一名学生，“爱好”中华诗词的概率为 0.65. ………3 分

（II）甲大学随机选取的 40 名学生中“痴迷”的学生有 $40\times 0.005\times 10=2$ 人，

乙大学随机选取的 40 名学生中“痴迷”的学生有 $40\times 0.015\times 10=6$ 人，

所以，随机变量 ξ 的取值为 $\xi=0,1,2$.

所以，$P(\xi=0)=\dfrac{C_2^0C_6^2}{C_8^2}=\dfrac{15}{28}$，

$P(\xi=1)=\dfrac{C_2^1C_6^1}{C_8^2}=\dfrac{12}{28}=\dfrac{3}{7}$，

$P(\xi=2)=\dfrac{C_2^2C_6^0}{C_8^2}=\dfrac{1}{28}$.

所以 ξ 的分布列为

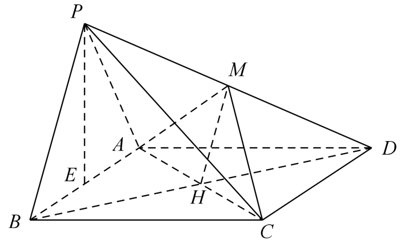
ξ	0	1	2
P	$\dfrac{15}{28}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{1}{28}$

ξ 的数学期望为 $E(\xi)=0\times\dfrac{15}{28}+1\times\dfrac{3}{7}+2\times\dfrac{1}{28}=\dfrac{1}{2}$. ………………10 分

(III) $\overline{X}_{甲} < \overline{X}_{乙}$；$s^2_{甲} > s^2_{乙}$．　　　　……………13 分

18. （共 14 分）

（I）证明：连接 BD 交 AC 于 H 点，连接 MH，



因为四边形 $ABCD$ 是菱形，

所以点 H 为 BD 的中点.

又因为 M 为 PD 的中点，

所以 MH // BP.

又因为 $BP \not\subset$ 平面 ACM，$MH \subset$ 平面 ACM.

所以 PB // 平面 ACM.　　　……………4 分

（II）证明：因为 ΔPAB 为正三角形，E 为 AB 的中点，

所以 $PE \perp AB$.

因为平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAB \cap$ 平面 $ABCD=AB$，$PE \subset$ 平面 PAB，

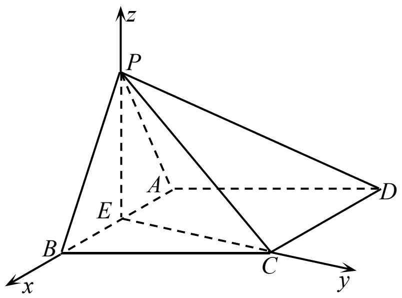
所以 $PE \perp$ 平面 $ABCD$.

又因为 $AC \subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PE \perp AC$.　　　……………8 分

(III) 因为 $ABCD$ 是菱形，$\angle ABC=60°$，E 是 AB 的中点，

所以 $CE \perp AB$.



又因为 $PE \perp$ 平面 $ABCD$，

以 E 为原点，分别以 EB, EC, EP 为 x, y, z 轴，

建立空间直角坐标系 $E-xyz$，

则 $E(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，

$P(0,0,\sqrt{3})$，$C(0,\sqrt{3},0)$，$D(-2,\sqrt{3},0)$．　………10 分

假设棱 PD 上存在点 M，设点 M 坐标为 (x,y,z)，$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PD}(0\le\lambda\le1)$，

则 $(x,y,z-\sqrt{3})=\lambda(-2,\sqrt{3},-\sqrt{3})$，

所以 $M(-2\lambda,\sqrt{3}\lambda,\sqrt{3}(1-\lambda))$，

所以 $\overrightarrow{EM}=(-2\lambda,\sqrt{3}\lambda,\sqrt{3}(1-\lambda))$，$\overrightarrow{EC}=(0,\sqrt{3},0)$，

设平面 CEM 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EM}=-2\lambda x+\sqrt{3}\lambda y+\sqrt{3}(1-\lambda)z=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EC}=\sqrt{3}y=0\end{cases}，解得\begin{cases}y=0\\ 2\lambda x=\sqrt{3}(1-\lambda)z\end{cases}.$$

令 $z=2\lambda$，则 $x=\sqrt{3}(1-\lambda)$，得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3}(1-\lambda),0,2\lambda)$.

因为 $PE \perp$ 平面 $ABCD$，

所以平面 $ABCD$ 的法向量 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{2\lambda}{\sqrt{4\lambda^2+3(1-\lambda)^2}}=\dfrac{2\lambda}{\sqrt{7\lambda^2-6\lambda+3}}$.

因为二面角 $M-EC-D$ 的大小为 $60°$，

所以 $\frac{2\lambda}{\sqrt{7\lambda^2-6\lambda+3}}=\frac{1}{2}$，

即 $3\lambda^2+2\lambda-1=0$，

解得 $\lambda=\frac{1}{3}$，或 $\lambda=-1$（舍去）

所以在棱 PD 上存在点 M，当 $\frac{PM}{PD}=\frac{1}{3}$ 时，二面角 $M-EC-D$ 的大小为 $60°$．

……………………14 分

19. （共 14 分）

解：（I）$f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$．　……………1 分

因为 $f'(x)=a-\frac{1}{x+1}$，$a=2$，

所以 $f'(0)=2-1=1$，$f(0)=0$．

所以 函数 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程是 $y=x$．　……………4 分

（II）由题意可得 $f'(x)=a-\frac{1}{x+1}$．

（1）当 $a\le 0$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上为减函数，

所以在区间 $[0,\mathrm{e}-1]$ 上，$f(x)_{\min}=f(\mathrm{e}-1)=a(\mathrm{e}-1)-1$．　……………6 分

（2）当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=a-\frac{1}{x+1}=0$，则 $x=\frac{1}{a}-1>-1$，

① 当 $\frac{1}{a}-1\le 0$，即 $a\ge 1$ 时，

对于 $x\in(0,\mathrm{e}-1)$，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e}-1)$ 上为增函数，

所以 $f(x)_{\min}=f(0)=0$．

② 当 $\frac{1}{a}-1\ge \mathrm{e}-1$，即 $0<a\le\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，

对于 $x\in(0,\mathrm{e}-1)$，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e}-1)$ 上为减函数，

所以 $f(x)_{\min}=f(\mathrm{e}-1)=a(\mathrm{e}-1)-1$．

③ 当 $0<\frac{1}{a}-1<\mathrm{e}-1$，即 $\frac{1}{\mathrm{e}}<a<1$ 时，

当 x 变化时，$f(x)$，$f'(x)$ 的变化情况如下表：

x	0	$(0,\frac{1}{a}-1)$	$\frac{1}{a}-1$	$(\frac{1}{a}-1,\mathrm{e}-1)$	$\mathrm{e}-1$

$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	极小值	↗	

所以 $f(x)_{\min}=f(\frac{1}{a}-1)=a(\frac{1}{a}-1)-\ln\frac{1}{a}=1-a+\ln a$． ………13 分

综上，

当 $a\le\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时， $f(x)_{\min}=a(\mathrm{e}-1)-1$；

当 $\frac{1}{\mathrm{e}}<a<1$ 时， $f(x)_{\min}=1-a+\ln a$；

当 $a\ge 1$ 时， $f(x)_{\min}=0$． ……………14 分

20. （共 13 分）

（Ⅰ）1，2，3； ……………3 分

（Ⅱ）由题意可得，数列如下：

第 1 组:1，第 2 组:1, 2；第 3 组：1, 2, 4； $\cdots$ 第 k 组：$1,2,4,\cdots,2^{k-1}$．

则该数列的前 $1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ 项的和为:

$S_{\frac{k(k+1)}{2}}=1+(1+2)+\cdots+(1+2+\cdots+2^{k-1})=2^{k+1}-k-2$，①

当 $\frac{k(k+1)}{2}\le 50$ 时， $k\le 9$，

则 $S_{50}=S_{45}+1+2+2^2+2^3+2^4=2^{10}-11+31=2^{10}+20$,

由于 $2^{10}<2^{10}+20<2^{11}$，对 $\forall p\in\mathbf{N}$， $S_{50}\ne 2^p$，故 50 不是“佳幂数”． ……………7 分

（III）（i）在①中，要使 $\frac{k(k+1)}{2}>70$，有 $k\ge 12$，

此时 $1+2+4+\cdots+2^k=2^{k+1}-1=(1+1)^{k+1}-1=1+C_{k+1}^{1}+\cdots+C_{k+1}^{k}+1-1>k+2$，

所以 $k+2$ 是第 $k+1$ 组等比数列 $1,2,4,\cdots,2^k$ 的部分项的和，

设 $k+2=1+2+\cdots+2^{t-1}=2^t-1,t\in\mathrm{N}^*$.

所以 $k=2^t-3\ge 12$，则 $t\ge 4$，此时 $k=2^4-3=13$，

所以对应满足条件的最小“佳幂数” $m=\frac{13\times 14}{2}+4=95$． ……………11 分

（ii）由（i）知： $k+2=1+2+\cdots+2^{t-1}=2^t-1,t\in\mathrm{N}^*$.

当 $t\ge 2$，且取任意整数时，可得“佳幂数” $m=\frac{k(k+1)}{2}+t$，

所以，该数列的“佳幂数”有无数个. ……………13 分