2019 北京一零一中学高一（上）期末

数　　学

一、选择题（本大题共 8 小题，共 40.0 分）

1. 若 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则 $\cos\alpha=(\quad)$

A. $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

2. 集合 $M=\{x|x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in Z\}$，$N=\{x|x=\frac{k\pi}{4},k\in Z\}$，则$(\quad)$

A. $M\subseteq N$ B. $N\subseteq M$ C. $M\cap N=\varnothing$ D. $M\cup N=R$

3. 下列命题中正确的是(　　)

A. 共线向量都相等　B. 单位向量都相等
C. 平行向量不一定是共线向量 D. 模为 0 的向量与任意一个向量平行

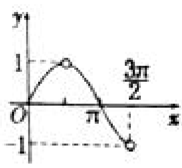
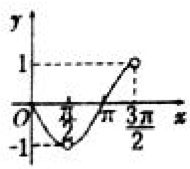
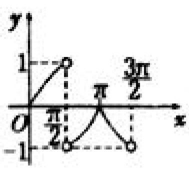
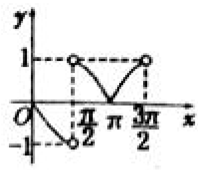
4. 下列函数为奇函数，且在$(-\infty,0)$上单调递减的是(　　)

A. $f(x)=x^{-2}$ B. $f(x)=x^{-1}$ C. $f(x)=\log_2 x$ D. $f(x)=3^x$

5. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})(x\in R,\omega>0)$的最小正周期为$\pi$，为了得到函数 $g(x)=\cos\omega x$ 的图象，只要将 $y=f(x)$的图象(　　)

A. 向左平移$\frac{\pi}{8}$个单位长度　B. 向右平移$\frac{\pi}{8}$个单位长度
C. 向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度　D. 向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度

6. 如图所示，函数 $y=\cos x|\tan x|(0\leqslant x<\frac{3\pi}{2}$且 $x\neq\frac{\pi}{2})$的图象是(　　)

A. 
B. 
C. 
D. 

7. 函数 $y=\sin\omega x(\omega>0)$在区间$[0,1]$上至少出现 10 次最大值，则ω的最小值是(　　)

A. 10π B. 20π C. $\frac{37\pi}{2}$ D. $\frac{39\pi}{2}$

8. 设偶函数 $f(x)=\log_a|x-b|$在$(-\infty,0)$上是增函数，则 $f(a+1)$与 $f(b+2)$的大小关系是(　　)

A. $f(a+1)=f(b+2)$ B. $f(a+1)>f(b+2)$
C. $f(a+1)<f(b+2)$ D. 不能确定

二、填空题（本大题共 6 小题，共 30.0 分）

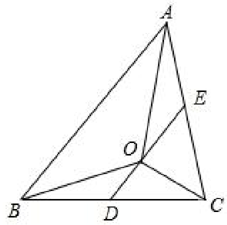
9. 求值：$2^{\log_2\frac{1}{4}}-(\frac{8}{27})^{-\frac{2}{3}}+\lg\frac{1}{100}+(\sqrt{2}-1)^{\lg 1}=$______.

10. 已知向量$\vec{a}=(1,1)$，$\vec{b}=(\sin x,-\cos x)$，$x\in(0,\pi)$，若$\vec{a}//\vec{b}$，则 x 的值是______.

11. 若 $\tan\theta=3$，则 $2\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta=$______.

12. 若函数 $y=\cos(\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega\in N^*)$的一个对称中心是$(\frac{\pi}{6},0)$，则$\omega$的最小值是______.

13. 函数 $y=\sqrt{\sin(\cos x)}$的值域是______.



14. 已知点 O 为三角形 ABC 内一点，$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AOC}}=$______.

三、解答题（本大题共 5 小题，共 50.0 分）

15. 求值：$\frac{\tan150^\circ\cos(-210^\circ)\sin(-420^\circ)}{\sin1050^\circ\cos(-600^\circ)}$.

16. 已知函数 $f(x)=\log_a(1-x)+\log_a(x+3)$，其中 $a>0$ 且 $a\neq1$.
(1)求函数 $f(x)$的定义域；
(2)若函数 $f(x)$有最小值而无最大值，求 $f(x)$的单调增区间.

17. 已知 $g(x)=-x^2-3$，$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$，函数 $h(x)=g(x)+f(x)$是奇函数.
(1)求 a，c 的值；
(2)当 $x\in[-1,2]$时，$f(x)$的最小值是 1，求 $f(x)$的解析式.

18. 设函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$(其中 $A>0$，$\omega>0$，$-\pi<\varphi\leqslant\pi$)在 $x=\frac{\pi}{6}$处取得最大值 2，其图象与 x 轴的相邻两个交点的距离为$\frac{\pi}{2}$.
(1)求 $f(x)$的解析式；
(2)求函数 $g(x)=\frac{6\cos^4x-\sin^2x-1}{[f(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6})]^2-2}$的值域.

19. 已知函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，若 $y=\frac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$上为增函数，则称 $f(x)$为“一阶比增函数”；若 $y=\frac{f(x)}{x^2}$在$(0,+\infty)$上为增函数，则称 $f(x)$为“二阶比增函数”.
我们把所有“一阶比增函数”组成的集合记为Ω_1，所有“二阶比增函数”组成的集合记为Ω_2.
(1)已知函数 $f(x)=x^3-2hx^2-hx$，若 $f(x)\in\Omega_1$且 $f(x)\notin\Omega_2$，求实数 h 的取值范围；
(2)已知 $0<a<b<c$，$f(x)\in\Omega_1$且 $f(x)$的部分函数值由下表给出，求证：$d(2d+t-4)>0$；

x	a	b	c	$a+b+c$
$f(x)$	d	d	t	4

(3)定义集合$\psi=\{f(x)|f(x)\in\Omega_2$，且存在常数 k，使得任取 $x\in(0,+\infty)$，$f(x)<k\}$，请问：是否存在常数 M，使得$\forall f(x)\in\psi$，$\forall x\in(0,+\infty)$，有 $f(x)<M$ 成立？若存在，求出 M 的最小值；若不存在，说明理由.

数学试题答案

1. 【答案】D

【解析】解：∵ $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，

∴ $\cos\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-(\frac{\sqrt{3}}{3})^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

故选：D.

由已知利用同角三角函数基本关系式即可计算得解.

本题主要考查了同角三角函数基本关系式在三角函数化简求值中的应用，属于基础题.

2. 【答案】A

【解析】解：∵ $k\in Z$；

∴ $k=2n$ 或 $2n+1$，$n\in Z$；

∴ $N=\{x|x=\frac{n\pi}{2}$,或 $x=\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4},n\in Z\}$；

又 $M=\{x|x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in Z\}$；

∴ $M\subseteq N$.

故选：A.

根据 $k\in Z$ 即可得出 $k=2n$ 或 $2n+1$，$n\in Z$，从而得出 $N=\{x|x=\frac{n\pi}{2}$,或 $x=\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4},n\in Z\}$，从而可得出 $M\subseteq N$，从而选 A.

考查描述法表示集合的定义，整数可分为奇数和偶数，奇数表示为 $x=2n+1$，$n\in Z$，偶数表示为 $x=2n$，$n\in Z$.

3. 【答案】*D*

【解析】解：对于 *A*，共线向量不一定相等，*A* 错误；

对于 *B*，单位向量的模长相等，但方向不一定相同，*B* 错误；

对于 *C*，平行向量一定是共线向量，*C* 错误；

对于 *D*，模为 0 的向量是零向量，它与任意一个向量是平行向量，*D* 正确.

故选：*D*.

根据平面向量的基本概念，对选项中的命题进行判断正误即可.

本题考查了平面向量的基本概念与应用问题，是基础题.

4. 【答案】B

【解析】解：$A.f(x)=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$是偶函数，不满足条件.

B. $f(x)=x^{-1}=\frac{1}{x}$是奇函数，则$(-\infty,0)$上是减函数，满足条件.

C. $f(x)$是非奇非偶函数，不满足条件.

D. $f(x)$是非奇非偶函数，不满足条件.

故选：B.

根据函数奇偶性和单调性的性质进行判断即可.

本题主要考查函数奇偶性和单调性的判断，要求熟练掌握常见的奇偶性和单调性.比较基础.

5.【答案】A

【解析】解：由题知$\omega=2$，

所以 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{4})=\cos[\frac{\pi}{2}-(2x+\frac{\pi}{4})]=\cos(2x-\frac{\pi}{4})=\cos2(x-\frac{\pi}{8})$，

故选：A.

由周期函数的周期计算公式：$T=\frac{2\pi}{\omega}$，算得$\omega=2$.接下来将 $f(x)$的表达式转化成与 $g(x)$同名的三角函数，再观察左右平移的长度即可.

本题考点定位：本小题考查诱导公式，函数图象的变换，基础题.

6. 【答案】C

【解析】解：∵ $y=\cos x|\tan x|=\begin{cases}\sin x, 0\leqslant x<\frac{\pi}{2}\\ -\sin x, \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi,\\ \sin x, \pi<x<\frac{3}{2}\pi\end{cases}$

∴函数 $y=\cos x|\tan x|(0\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$且 $x\neq\frac{\pi}{2})$的图象是 C.

故选：C.

根据 x 的取值情况分类讨论，去掉$|\tan x|$中的绝对值符号，转化为分段函数，再识图即可.

本题考查正切函数与正弦函数的图象，确定绝对值符号是关键，考查分类讨论思想与识图能力，属于中档题.

7. 【答案】C

【解析】解：函数 $y=\sin\omega x(\omega>0)$在区间$[0,1]$上至少出现 10 次最大值，

∴ $9T+\frac{T}{4}\leqslant 1<10T$，即 $9\cdot\frac{2\pi}{\omega}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega}\leqslant 1<10\cdot\frac{2\pi}{\omega}$，求得$\frac{37\pi}{2}\leqslant\omega<20\pi$，

故ω的最小值为$\frac{37\pi}{2}$，

故选：C.

由题意利用正弦函数的图象和性质可得 $9T+\frac{T}{4}\leqslant 1<10T$，即 $9\cdot\frac{2\pi}{\omega}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega}\leqslant 1<10\cdot\frac{2\pi}{\omega}$，由此求得$\omega$的最小值.

本题主要考查正弦函数的图象和性质，属于中档题.

8. 【答案】B

【解析】解：∵ $f(x)=\log_a|x-b|$为偶函数，∴ $b=0$

∵ $f(x)=\log_a|x-b|$在$(-\infty,0)$上是增函数，

∴ $0<a<1$

∴ $f(x)=\log_a|x-b|$在$(0,+\infty)$上单调递减，

∴ $0<a+1<b+2$

∴ $f(a+1)>f(b+2)$.

故选：B.

由 $f(x)=\log_a|x-b|$为偶函数，求出 $b=0$，由 $f(x)=\log_a|x-b|$在$(-\infty,0)$上是增函数，求出 $0<a<1$，从而 $f(x)=\log_a|x-b|$在$(0,+\infty)$上单调递减，由此能判断 $f(a+1)$与 $f(b+2)$的大小关系.

本题考查两个函数值的大小的判断，考查函数的单调性、函数的奇偶性等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力，考查化归与转化思想，是基础题.

9. 【答案】-3

【解析】解：$2^{\log_2\frac{1}{4}}-(\frac{8}{27})^{-\frac{2}{3}}+\lg\frac{1}{100}+(\sqrt{2}-1)^{\lg 1}$

$$=\frac{1}{4}-[(\frac{2}{3})^3]^{-\frac{2}{3}}-2+(\sqrt{2}-1)^0$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{9}{4}-2+1$$

$=-3$.

故答案为：-3.

由已知条件利用对数函数、指数函数的性质和运算法则求解.

本题考查对数式、指数式的化简求值，是基础题，解题时要认真审题，注意对数、指数的性质、运算法则的合理运用.

10. 【答案】$\frac{3\pi}{4}$

【解析】解：∵ $\vec{a}//\vec{b}$；

$-\cos x-\sin x=0$；

∴ $\sin x+\cos x=0$；

∴ $(\sin x+\cos x)^2=1+\sin 2x=0$；

∴ $\sin 2x=-1$；

∵ $x\in(0,\pi)$；

∴ $2x\in(0,2\pi)$；

$\therefore\ 2x=\frac{3\pi}{2}$;

$\therefore\ x=\frac{3\pi}{4}$.

故答案为：$\frac{3\pi}{4}$.

根据$\vec{a}//\vec{b}$即可得出 $\sin x+\cos x=0$，两边平方即可得出 $1+\sin 2x=0$，从而得出 $\sin 2x=-1$，根据 x 的范围即可求出 2x 的范围，从而求出 2x 的值，进而得出 x 的值.

考查平行向量的坐标关系，$\sin^2 x+\cos^2 x=1$，以及二倍角的正弦公式，已知三角函数值求角.

11. 【答案】$\frac{7}{5}$

【解析】解：$\because\ \tan\theta=3$，

$$\therefore\ 2\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta=\frac{2\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$$
$$=\frac{2\tan^2\theta-\tan\theta-1}{\tan^2\theta+1}$$

$=\frac{7}{5}$.

故答案为：$\frac{7}{5}$.

根据题意，将平方关系代入化为齐次式，再由商的关系将式子转化为关于 $\tan\theta$式子，代入求值即可.

本题考查了同角三角函数的基本关系的灵活应用，即“齐次化切”在求值中的应用，是常考的题型，注意总结.

12. 【答案】2

【解析】解：$\because$函数 $y=\cos(\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega\in N^*)$的一个对称中心是$(\frac{\pi}{6},0)$，

$\therefore\ \omega\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in z$，即$\therefore\ \omega=6k+2$，故$\omega$的最小值为 2，

故答案为：2.

由题意根据余弦函数的对称性可得$\omega\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in z$，由此$\omega$的最小值.

本题主要考查余弦函数的对称性，属于中档题.

13. 【答案】$[0,\sqrt{\sin 1}]$

【解析】解：$\because -1\leqslant\cos x\leqslant 1$，要使函数有意义则 $\sin(\cos x)\geqslant 0$，则 $0\leqslant\cos x\leqslant 1$，

此时 $0\leqslant\sin(\cos x)\leqslant\sin 1$，

则 $0\leqslant\sqrt{\sin(\cos x)}\leqslant\sqrt{\sin 1}$，

即函数的值域为$[0,\sqrt{\sin 1}]$，

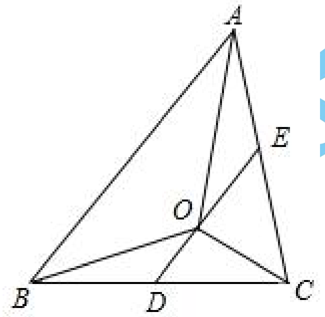
故答案为：$[0,\sqrt{\sin 1}]$.

根据根式的意义结合三角函数的有界性进行求解即可.

本题主要考查函数的值域的计算，结合根式的应用以及三角函数的有界性是解决本题的关键.

14. 【答案】3

【解析】解：如图，取 BC 中点 D，AC 中点 E，连接 OA，OB，OC，OD，OE；



$$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})+2(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$
$$=2\overrightarrow{OE}+4\overrightarrow{OD}$$
$$=\vec{0}$$

$\therefore\ \overrightarrow{OE}=-2\overrightarrow{OD}$；

$\therefore D$，O，E 三点共线，即 DE 为$\triangle ABC$的中位线；
$\therefore DE=\frac{3}{2}OE$，$AB=2DE$；
$\therefore AB=3OE$；
$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AOC}}=3$.
故答案为：3.
可作出图形，取 BC 的中点 D，AC 的中点 E，并连接 OA，OB，OC，OD，OE，根据条件可以得到$\overrightarrow{OE}=-2\overrightarrow{OD}$，从而得出 DE 为$\triangle ABC$的中位线，这样即可得到$AB=3OE$，从而便有$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AOC}}=3$.
考查向量加法的平行四边形法则，共线向量基本定理，以及向量的数乘运算，向量数乘的几何意义，三角形中位线的定义及性质，三角形的面积公式.

15. 【答案】解：由诱导公式可得：$\tan150°=\tan(180°-30°)=-\tan30°=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\cos(-210°)=\cos210°=\cos(180°+30°)=-\cos30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，
$\sin(-420°)=-\sin420°=-\sin(360°+60°)=-\sin60°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin1050°=\sin(3\times360°-30°)=-\sin30°=-\frac{1}{2}$，
$\cos(-600°)=\cos600°=\cos(3\times180°+60°)=-\cos60°=-\frac{1}{2}$，
$\therefore$原式$=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{\sqrt{3}}{2})}{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{4}}=-\sqrt{3}$.
【解析】由条件利用诱导公式求得 tan15°、cos210°、sin420°、sin1050°、cos(− 600°)的值，可得要求式子的值.
本题主要考查诱导公式的应用，特殊角的三角函数值，属于基础题.

16. 【答案】解：(1)要使函数有意义，则$\begin{cases}1-x>0\\x+3>0\end{cases}$，得$\begin{cases}x<1\\x>-3\end{cases}$，得$-3<x<1$，
即函数的定义域为$(-3,1)$，
(2)$f(x)=\log_a(1-x)+\log_a(x+3)=\log_a(1-x)(x+3)=\log_a(-x^2-2x+3)$
$=\log_a(-(x+1)^2+4)$，
设$t=-(x+1)^2+4$，当$-3<x<1$时，$0<t\leq4$，
若函数$f(x)$有最小值而无最大值，则函数$y\log_a t$为减函数，则$0<a<1$，
要求$f(x)$的单调增区间，则等价于求$t=-(x+1)^2+4$，在$-3<x<1$时的减区间，
$\because t=-(x+1)^2+4$的单调递减区间为$[-1,1)$，
$\therefore f(x)$的单调递减区间为$[-1,1)$.

【解析】(1)根据对数函数的成立的条件建立不等式关系即可求出函数的定义域
(2)根据复合函数单调性的性质确定$0<a<1$，结合复合函数单调性的关系进行求解即可.
本题主要考查对数函数的性质，结合复合函数单调性的关系求出 a 的范围是解决本题的关键.

17. 【答案】解：(1)(法一)：$f(x)+g(x)=(a-1)x^2+bx+c-3$，
又$f(x)+g(x)$为奇函数，
$\therefore h(x)=-h(-x)$，
$\therefore (a-1)x^2-bx+c-3=-(a-1)x^2-bx-c+3$对$x\in R$恒成立，
$\therefore\begin{cases}a-1=-a+1\\c-3=-c+3\end{cases}$，
解得$\begin{cases}a=1\\c=3\end{cases}$；
(法二)：$h(x)=f(x)+g(x)=(a-1)x^2+bx+c-3$，
$\because h(x)$为奇函数，
$\therefore a-1=0$，$c-3=0$，
$\therefore a=1$，$c=3$.
(2)$f(x)=x^2+bx+3$，其图象对称轴为$x=-\frac{b}{2}$，
当$-\frac{b}{2}\leq-1$，即$b\geq2$时，
$f(x)_{min}=f(-1)=4-b=1$，$\therefore b=3$；
当$-1<-\frac{b}{2}\leq2$，即$-4\leq b<2$时，
$f(x)_{min}=f(-\frac{b}{2})=\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{2}+3=1$，
解得$b=-2\sqrt{2}$或$b=2\sqrt{2}$(舍)；

当$-\frac{b}{2}>2$，即 $b<-4$ 时，
$f(x)_{min}=f(2)=7+2b=1$，$\therefore b=-3$(舍)，
$\therefore f(x)=x^2+3x+3$ 或$\therefore f(x)=x^2-2\sqrt{2}x+3$．

【解析】(1)法一：化简 $h(x)=g(x)+f(x)=(a-1)x^2+bx+c-3$，由$(a-1)x^2-bx+c-3=-(a-1)x^2-bx-c+3$ 对 $x\in R$ 恒成立得到$\begin{cases}a-1=-a+1\\ c-3=-c+3\end{cases}$，从而求解，
法二：化简 $h(x)=g(x)+f(x)=(a-1)x^2+bx+c-3$，由奇函数可得 $a-1=0$，$c-3=0$，从而求解；
(2)根据二次函数的性质，讨论对称轴所在的位置，从而确定 $f(x)$的最小值在何时取得，从而求 $f(x)$的解析式．
本题考查了函数的奇偶性的应用与及二次函数的最值的求法，属于基础题．

18. 【答案】解：(1)由题意可得：$f(x)_{max}=A=2$，$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow T=\pi$，
于是$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\pi}=2$，
故 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$，
由 $f(x)$在 $x=\frac{\pi}{6}$处取得最大值 2 可得：$2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in Z)$，
又$-\pi<\varphi<\pi$，故$\varphi=\frac{\pi}{6}$，
因此 $f(x)$的解析式为 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$．
(2)由(1)可得：$f(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6})=2\sin[2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{6}]=2\sin(x+\frac{\pi}{2})=2\cos x$，
故 $g(x)=\frac{6\cos^4x-(1-\cos^2x)-1}{(2\cos x)^2-2}$

$$=\frac{6\cos^4x+\cos^2x-2}{4\cos^2x-2}$$
$$=\frac{(3\cos^2x+2)(2\cos^2x-1)}{2(2\cos^2x-1)}$$
$$=\frac{3\cos^2x+2}{2}$$

$=\frac{3}{2}\cos^2x+1$，$(\cos^2x\neq\frac{1}{2})$，
令 $t=\cos^2x$，可知 $0\leq t\leq 1$ 且 $t\neq\frac{1}{2}$，
即$\cos^2x\in[0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1]$，
从而 $g(x)\in[1,\frac{7}{4})\cup(\frac{7}{4},\frac{5}{2}]$，
因此，函数 $g(x)$的值域为$[1,\frac{7}{4})\cup(\frac{7}{4},\frac{5}{2}]$．

【解析】(1)先确定函数的周期，可得ω的值，利用函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$(其中 $A>0$，$\omega>0$，$-\pi<\varphi<\pi$)在 $x=\frac{\pi}{6}$处取得最大值 2，即可求得 $f(x)$的解析式；
(2)由三角函数恒等变换的应用化简可得 $g(x)=\frac{3}{2}\cos^2x+1$，$(\cos^2x\neq\frac{1}{2})$，由$\cos^2x\in[0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1]$，即可求得函数 $g(x)$的值域．
本题主要考查了由 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的部分图象确定其解析式，考查三角函数恒等变换的应用，函数的单调性，考查了转化思想和计算能力，正确求函数的解析式是关键，属于中档题．

19. 【答案】(1)解：$y=\frac{f(x)}{x}=x^2-2hx-h$，若 $f(x)\in\Omega_1$，则 $h\leq 0$；
$y=\frac{f(x)}{x^2}=x-2h-\frac{h}{x}$，$y'=x+\frac{h}{x^2}$，当 $h\geq 0$，$x>0$ 时，$y'>0$，此时 $f(x)\in\Omega_2$，不符合题意，舍去；
当 $h<0$ 时，$y'=\frac{x^3+h}{x^2}$，此时函数$\frac{f(x)}{x^2}$在 $x\in(0,+\infty)$有极值点，因此 $f(x)\notin\Omega_2$．
综上可得：当 $h<0$ 时，$f(x)\in\Omega_1$且 $f(x)\notin\Omega_2$．
因此 h 的取值范围是$(-\infty,0)$．
(2)证明：由 $f(x)\in\Omega_1$，若取 $0<x_1<x_2$，
则$\frac{f(x_1)}{x_1}<\frac{f(x_2)}{x_2}<\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}$．
由表格可知：$f(a)=d$，$f(b)=d$，$f(c)=t$，$f(a+b+c)=4$，
$\because 0<a<b<c<a+b+c$，
$\therefore\frac{d}{a}<\frac{d}{b}<\frac{t}{c}<\frac{4}{a+b+c}$，
$\therefore d<0$，$d<\frac{4a}{a+b+c}$，$d<\frac{4b}{a+b+c}$，$t<\frac{4a}{a+b+c}$，

$\therefore 2d+t<4$，

$\therefore d(2d+t-4)>0$.

(III) $\because$集合合$\psi=\{f(x)|f(x)\in\Omega_2$，且存在常数 k，使得任取 $x\in(0,+\infty)$，$f(x)<k\}$，

$\therefore$存在 $f(x)\in\psi$，存在常数 k，使得 $f(x)<k$ 对 $x\in(0,+\infty)$成立.

我们先证明 $f(x)\le 0$ 对 $x\in(0,+\infty)$成立.

假设存在$x_0\in(0,+\infty)$，使得 $f(x_0)>0$，

记$\frac{f(x_0)}{x_0^2}=m>0$

$\because f(x)$是二阶比增函数，即$\frac{f(x)}{x^2}$是增函数.

$\therefore$当 $x>x_0$时，$\frac{f(x)}{x^2}>\frac{f(x_0)}{x_0^2}=m>0$，

$\therefore f(x)>mx^2$，

$\therefore$一定可以找到一个$x_1>x_0$，使得 $f(x_1)>mx_1^2>k$，

这与 $f(x)<k$ 对 $x\in(0,+\infty)$成立矛盾.

即 $f(x)\le 0$ 对 $x\in(0,+\infty)$成立.

$\therefore$存在 $f(x)\in\psi$，$f(x)\le 0$ 对 $x\in(0,+\infty)$成立.

下面我们证明 $f(x)=0$ 在$(0,+\infty)$上无解.

假设存在$x_2>0$，使得 $f(x_2)=0$，

$\because f(x)$是二阶增函数，即$\frac{f(x)}{x^2}$是增函数.

一定存在$x_3>x_2>0$，使$\frac{f(x_3)}{x_3^2}>\frac{f(x_2)}{x_2^2}=0$，这与上面证明的结果矛盾.

$\therefore f(x)=0$ 在$(0,+\infty)$上无解.

综上，我们得到存在 $f(x)\in\psi$，$f(x)<0$ 对 $x\in(0,+\infty)$成立.

$\therefore$存在常数 $M\ge 0$，使得存在 $f(x)\in\psi$，$\forall x\in(0,+\infty)$，有 $f(x)<M$ 成立.

又令 $f(x)=-\frac{1}{x}(x>0)$，则 $f(x)<0$ 对 $x\in(0,+\infty)$成立，

又有$\frac{f(x)}{x^2}=-\frac{1}{x^3}$在$(0,+\infty)$上是增函数，

$\therefore f(x)\in\psi$，

而任取常数 $k<0$，总可以找到一个$x_n>0$，使得 $x>x_n$时，有 $f(x)>k$.

$\therefore M$ 的最小值为 0.

【解析】(1)根据：$f(x)\in\Omega_1$且 $f(x)\notin\Omega_2$，可得 $y=\frac{f(x)}{x}=x^2-2hx-h$，利用二次函数的单调性可得$-\frac{-2h}{2}=h\le 0$；由 $y=\frac{f(x)}{x^2}=x-2h-\frac{h}{x}$，$y'=x+\frac{h}{x^2}$，对 h 分类讨论可得：当 $h\ge 0$，此时 $f(x)\in\Omega_2$；当 $h<0$ 时，$y'=\frac{x^3+h}{x^2}$，函数$\frac{f(x)}{x^2}$在 $x\in(0,+\infty)$有极值点，可得 $f(x)\notin\Omega_2$.即可得出.

(2)由 $f(x)\in\Omega_1$，取 $0<x_1<x_2<x_1+x_2$，可得$\frac{f(x_1)}{x_1}<\frac{f(x_2)}{x_2}<\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}$.由表格可知：$f(a)=d$，$f(b)=d$，$f(c)=t$，$f(a+b+c)=4$，$0<a<b<c<a+b+c$，利用“一阶比增函数”可得$\frac{d}{a}<\frac{d}{b}<\frac{t}{c}<\frac{4}{a+b+c}$，再利用不等式的性质即可得出.

(3)根据“二阶比增函数”先证明 $f(x)\le 0$ 对 $x\in(0,+\infty)$成立.再证明 $f(x)=0$ 在$(0,+\infty)$上无解.即可得出.

本题考查了函数的单调性、导数的几何意义，掌握导数法在确定函数单调性和最值时的答题步骤是解答的关键，考查了推理能力与计算能力，本题难度较大.