

# 2021 北京海淀高一（下）期中

## 数 学

2021.04

学校 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_ 班级 \_\_\_\_\_ 学号 \_\_\_\_\_

考 生 须 知	1.本试卷共 6 页，共三道大题，19 道小题，满分 100 分，考试时间 90 分钟。 2.在试卷上准确填写学校名称、班级、姓名。 3.试题答案一律填写在试卷上。 4.考试结束，请将本试卷交回。
------------------	---

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.若角  $\alpha$  的终边经过点  $P(-2,3)$ ，则  $\tan\alpha =$

- A.  $-\frac{2}{3}$                       B.  $\frac{2}{3}$                       C.  $-\frac{3}{2}$                       D.  $\frac{3}{2}$

2.已知向量  $a = (1,2)$ ，则  $|a| =$

- A. 3                      B.  $\sqrt{3}$                       C. 5                      D.  $\sqrt{5}$

3.  $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM} =$

- A.  $\overrightarrow{AB}$                       B.  $\overrightarrow{BA}$                       C.  $\overrightarrow{MB}$                       D.  $\overrightarrow{BM}$

4.在  $\triangle ABC$  中，A 为钝角，则点  $P(\cos A, \tan B)$

- A. 在第一象限                      B. 在第二象限                      C. 在第三象限                      D. 在第四象限

5.下列函数中，周期为  $\pi$  且在区间  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  上单调递增的是

- A.  $y = \cos 2x$                       B.  $y = \sin 2x$                       C.  $y = \cos \frac{1}{2}x$                       D.  $y = \sin \frac{1}{2}x$

6.对函数  $y = \sin x$  的图像分别作以下变换：

- ①向左平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位，再将每个点的横坐标缩短为原来的  $\frac{1}{3}$  (纵坐标不变)；  
 ②向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位，再将每个点的横坐标缩短为原来的  $\frac{1}{3}$  (纵坐标不变)

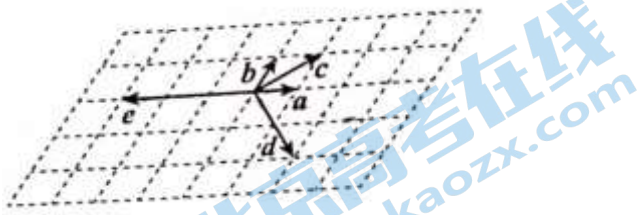
③将每个点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{3}$  (纵坐标不变), 再向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位

④将每个点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{3}$  (纵坐标不变), 再向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位

其中能得到函数 $y = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的图像的是

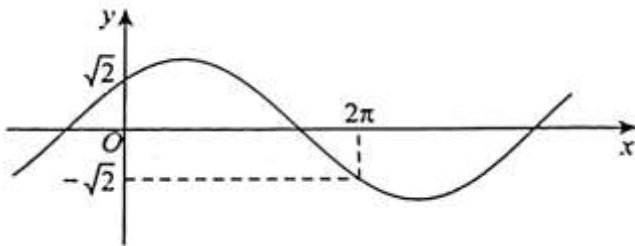
- A.①③      B.②③      C.①④      D.②④

7.如图, 已知向量 $a, b, c, d, e$ 的起点相同, 则 $c+d-e=$



- A.  $-b$       B.  $b$       C.  $-6a+b$       D.  $6a-b$

8.已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的图像如图所示, 则 $\omega$ 的值为



- A. 2      B. 1      C.  $\frac{1}{2}$       D.  $\frac{1}{4}$

9. “ $\sin \alpha = \cos \beta$ ”是“ $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in Z)$ ”的

- A. 充分而不必要条件  
B. 必要而不充分条件  
C. 充分必要条件  
D. 既不充分也不必要条件

10. 已知函数 $f(x) = (x-1)^3$ 。Q是 $f(x)$ 的图像上一点, 若在 $f(x)$ 的图像上存在不同的两点M, N, 使得、

$\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{ON}$  成立, 其中O是坐标原点, 则这样的点Q

- A. 有且仅有1个  
B. 有且仅有2个

C.有且仅有3个

D.可以有无数个

二、填空题：本大题共5小题，每小题4分，共20分，把答案填在题中横线上。

11.已知向量  $a=(1,-2), b=(3,1)$ ，则  $a+2b=$

12.已知  $\frac{\cos \alpha}{4 \sin \alpha - 2 \cos \alpha} = \frac{1}{6}$ ，则  $\tan \alpha =$

13.在  $\triangle ABC$  中，点 D 满足  $\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{DC}$ ，若  $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，则  $x - y =$

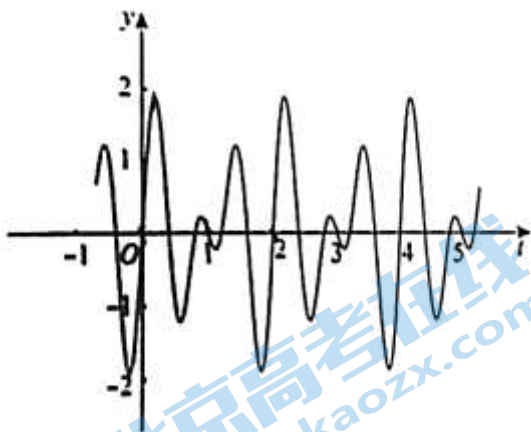
14.已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 在区间  $(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$  上单调，且对任意实数  $x$  均有

$f(\frac{4\pi}{3}) \leq f(x) \leq f(\frac{\pi}{3})$  成立，则  $\varphi =$

15.声音是由物体振动而产生的声波通过介质(空气、固体或液体)传播并能被人的听觉器官所感知的波动现象.在现实生活中经常需要把两个不同的声波进行合成，这种技术被广泛运用在乐器的调音和耳机的主动降噪技术方面。

(1)若甲声波的数学模型为  $f_1(t) = \sin 200\pi t$ ，乙声波的数学模型为  $f_2(t) = \sin(200\pi t + \varphi)$  ( $\varphi > 0$ )，甲、乙声波合成后的数学模型为  $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ . 要使  $f(t) = 0$  恒成立，则  $\varphi$  的最小值为\_\_\_\_\_；

(2)技术人员获取某种声波，其数学模型记为  $H(t)$ ，其部分图像如图所示，对该声波进行逆向分析，发现它是由  $S_1, S_2$  两种不同的声波合成得到的， $S_1, S_2$  的数学模型分别记为  $f(t)$  和  $g(t)$ ，满足  $H(t) = f(t) + g(t)$ . 已知  $S_1, S_2$  两种声波的数学模型源自于下列四个函数中的两个。



①  $y = \sin \frac{\pi}{2} t$ ;

②  $y = \sin 2\pi t$

③  $y = \sin 3\pi t$ ;

④  $y = 2\sin 3\pi t$

则  $S_1, S_2$  两种声波的数学模型分别是\_\_\_\_\_。(填写序号)

三、解答题：本大题共 4 小题，共 40 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

16、(本小题共 9 分)

$$\text{已知函数 } f(x) = \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x}$$

(I)求  $f(x)$  的定义域；

(II)若  $f(\theta) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，且  $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ，求  $\tan(\pi - \theta)$  的值。

17.(本小题共 9 分)

已知点  $A(5, -2), B(-1, 4), C(3, 3)$ ，M 是线段 AB 的中点。

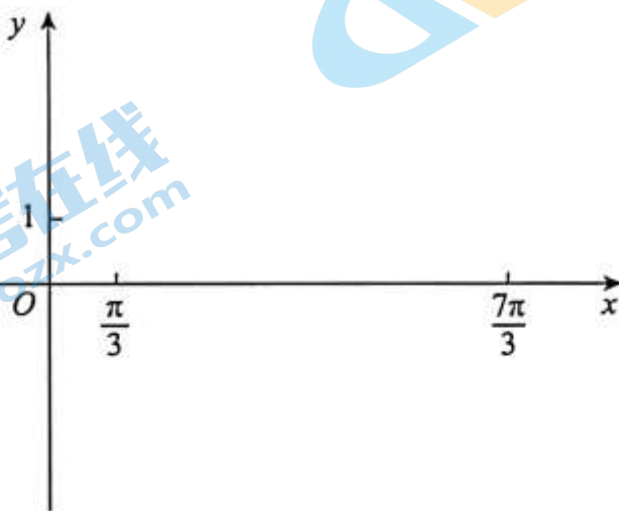
(I)求点 M 和  $\overline{AB}$  的坐标；

(II)若 D 是 x 轴上一点，且满足  $\overrightarrow{BD} \parallel \overrightarrow{CM}$ ，求点 D 的坐标。

18.(本小题共 11 分)

$$\text{已知函数 } f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

(I) 某同学利用五点法画函数  $f(x)$  在区间  $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right]$  上的图像.他列出表格，并填入了部分数据，请你帮他把表格填写完整，并在坐标系中画出图像；



$x$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$
$x - \frac{\pi}{3}$	0		$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$f(x)$	0	2	0		0

(II) 已知函数  $g(x) = f(\omega x)$  ( $\omega > 0$ )。

(i) 若函数  $g(x)$  的最小正周期为  $\frac{2\pi}{3}$ ，求  $g(x)$  的单调递增区间；

(ii) 若函数  $g(x)$  在  $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$  上无零点，求  $\omega$  的取值范围(直接写出结论)。

19. 本小题共 11 分

若定义域  $\mathbb{R}$  的函数  $f(x)$  满足：

①  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] \geq 0$ ，②  $\exists T > 0, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x) + 1$ 。则称函数  $f(x)$  满足性质  $P(T)$ 。

(I) 判断函数  $f(x) = 2x$  与  $g(x) = \sin x$  是否满足性质  $P(T)$ ，若满足，求出  $T$  的值；

(II) 若函数  $f(x)$  满足性质  $P(2)$  判断是否存在实数  $a$ ，使得对任意  $x \in \mathbb{R}$ ，都有  $f(x+a) - f(x) = 2021$ ，并说明理由；

(III) 若函数  $f(x)$  满足性质  $P(4)$ ，且  $f(-2) = 0$ 。对任意的  $x \in (-2, 2)$ ，都有  $f(-x) = -f(x)$ ，求函数

$$g(t) = \frac{t}{f(t) + f\left(\frac{4}{t}\right)}$$

的值域。

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯