大兴区 2023~2024 学年度第一学期期中检测

高三数学

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x|-1<x\leqslant 1\}$，$B=\{-1,0,1\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\{0\}$　　（B）$\{-1\}$

（C）$\{1\}$　　（D）$\{0,1\}$

（2）在复平面内，复数 z 对应的点的坐标是 $(1,-1)$，则 $z\cdot\bar{z}=$

（A）1　　（B）$\sqrt{2}$

（C）2　　（D）$2\sqrt{2}$

（3）下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

（A）$y=2^x$　　（B）$y=x^{-1}$

（C）$y=\cos x$　　（D）$y=\ln|x|$

（4）设 $x\in\mathbf{R}$，则"$\sin x=0$"是"$\cos x=1$"的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（5）已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(0,1)$，若 $(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})$，其中 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$，则

（A）$\lambda+\mu=-1$　　（B）$\lambda+\mu=1$

（C）$\lambda\cdot\mu=-1$　　（D）$\lambda\cdot\mu=1$

（6）在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 以 Ox 为始边，点 $P(-3,4)$ 在角 α 终边上，则错误的是

（A）$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$　　（B）$\cos 2\alpha=\dfrac{7}{25}$

（C）$\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$　　（D）$\tan\dfrac{\alpha}{2}=2$

（7）在 ΔABC 中，$\angle A=\dfrac{\pi}{6}$，$AB=4$，$BC=a$，且满足该条件的 ΔABC 有两个，则 a 的取值范围是

（A）$(0,2)$　　（B）$(2,2\sqrt{3})$

（C）$(2,4)$　　（D）$(2\sqrt{3},4)$

（8）已知 $a=\frac{1}{2}$，$b=\log_5 2$，$c=\tan 1$，则

（A）$b<a<c$　　（B）$a<c<b$

（C）$a<b<c$　　（D）$c<b<a$

（9）设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\ln x$ 的极值点为 x_0，且 $x_0\in M$，则 M 可以是

（A）$(0,\frac{1}{2})$　　（B）$(\frac{1}{2},\frac{2}{3})$

（C）$(\frac{2}{3},1)$　　（D）$(1,2)$

（10）已知数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}=a_n(1-a_n)$ （$n\in\mathbf{N}^*$），且 $0<a_1<1$．给出下列四个结论：

①$a_2\leqslant\frac{1}{4}$；

②$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<\frac{n+3}{4}$；

③$\forall m,n\in\mathbf{N}^*$，当 $n>m$ 时，$a_n>a_m$；

④$\forall k\in\mathbf{N}^*$，$\exists m\in\mathbf{N}^*$，当 $n\geqslant m$ 时，$a_n<\frac{1}{k}$．

其中所有正确结论的个数为

（A）1　　（B）2

（C）3　　（D）4

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）$2\lg 2+\lg 25=$_______.

（12）设函数 $f(x)=\tan x$，则 $f(-\frac{\pi}{4})=$_______；若 $f(x)$ 满足对于定义域内的每一个 x 都有 $f(x+T)=f(x)$，$T>0$，则 T 的最小值是_______.

（13）等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，能说明“若$\{a_n\}$为递增数列，则 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$S_n<S_{n+1}$”为假命题的一组 a_1 和公比 q 的值为 $a_1=$_______，$q=$_______.

（14）已知等边 ΔABC 的边长为 4，E,F 分别是 AB,AC 的中点，则 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EA}=$_______；若 M,N 是线段 BC 上的动点，且 $|MN|=1$，则 $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EN}$ 的最小值为_______.

（15）已知函数 $f(x)=\begin{cases}(\frac{1}{2})^x, & x\leqslant a,\\ 2x, & x>a.\end{cases}$

①当 $a=0$ 时，$f(x)$ 的值域为_______；

②若关于 x 的方程 $f(-x)=f(x)$ 恰有 2 个正实数解，则 a 的取值范围是_______.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

在 ΔABC 中，$a=2$，$c=2b$.

（Ⅰ）若 $\sin B=\dfrac{1}{4}$，求 $\angle C$；

（Ⅱ）若 $\angle A=60^\circ$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

（17）（本小题 13 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_4=1$，$a_6=5$. 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=a_5$，$b_{n+1}=3b_n$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 S_n 的最小值为 m，若 a_4，m，b_k 构成等比数列，求 k 的值.

（18）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$），且 $f(x)$ 图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$.

（Ⅰ）求 ω 的值；

（Ⅱ）再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知， 若 $f(x)\geqslant a$ 对 $x\in[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}]$ 恒成立，求 a 的取值范围.

条件①：$f(0)=-1$；

条件②：$f(x)$ 的最大值为 2；

条件③：$f(x)$ 在区间 $[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}]$ 上单调递增.

注：如果选择多组符合要求的条件分别解答，按第一组解答计分.

（19）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=x^3-ax^2-1$.

（Ⅰ）若 $a=1$，求 $f(x)$ 的极值；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在区间 $[-2,0]$ 上的最小值为 $f(-2)$，求 a 的取值范围；

（Ⅲ）直接写出一个 a 值使 $f(x)$ 在区间 $[-1,0]$ 上单调递减.

（20）（本小题 15 分）

设函数 $f(x)=9x^2-(x-3)^3e^{ax}$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=27$.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）求证：当 $x\in(-\infty,3]$ 时，$f(x)\geqslant 27$；

（Ⅲ）问存在几个点 $P(x_0,f(x_0))$，使曲线 $y=f(x)$ 在点 P 处的切线平行于 x 轴？（结论不要求证明）

（21）（本小题 15 分）

设数列 A: $a_1,a_2,\cdots,a_n$ $(n\geqslant 2)$，如果 $0<a_1<a_2<\cdots<a_n\leqslant 2024$，且 $a_i\in\mathbf{N}^*$，$(i=1,2,\cdots,n)$，对于 $\forall k\geqslant 2$，$\exists 1\leqslant s\leqslant t\leqslant r\leqslant k-1$，使 $a_k=a_s+a_t+a_r$ 成立，则称数列 A 为 E 数列.

（Ⅰ）分别判断数列 $1,3,5,7$ 和数列 $2,6,14,22$ 是否是 E 数列，并说明理由；

（Ⅱ）若数列 A 是 E 数列，且 $a_n=2023$，求 n 的最小值；

（Ⅲ）若数列 A 是 E 数列，且 $a_n=2024$，求 n 的最大值.

大兴区 2023~2024 学年度第一学期期中检测

高三数学参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	C	D	B	D	B	C	A	B	C

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）2

（12）-1 ；π

（13）-1 ，$\frac{1}{2}$（答案不唯一）

（14）2 ；$\frac{11}{4}$

（15）$(0,+\infty)$；$[-1,1)$

注：第（12）（15）题第一空 3 分，第二空 2 分。

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $c=2b$，

所以由正弦定理 $\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}$， ………2 分

得 $\frac{\sin C}{\sin B}=2$． ………1分

因为 $\sin B=\frac{1}{4}$，

所以 $\sin C=\frac{1}{2}$． ………1分

因为 $b<c$，

所以 $\angle C=30^\circ$ 或 150°． ………2分

（Ⅱ）由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得………2分

$2^2=b^2+(2b)^2-2\times 2b\times b\cos 60^\circ$． ………1分

解得 $b=\frac{2\sqrt{3}}{3}$． ………1分

由△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$，得………1分

$S=\frac{1}{2}\times b\times 2b\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}b^2$， ………1分

$=\frac{2\sqrt{3}}{3}$． ………1分

（17）（共 13 分）

解：（Ⅰ）由题设知，

$$\begin{cases} a_1+3d=1, \\ a_1+5d=5. \end{cases}$$ ………2 分

解得 $a_1=-5$，$d=2$． ………2 分

所以 $a_n=2n-7$． ………2 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$a_1<a_2<a_3<0$，$0<a_4<a_5<a_6<\cdots$． ………1 分

从而 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的最小值 $m=S_3=-5\times3+\frac{3\times2}{2}\times2=-9$． …1 分

因为 a_4，m，b_k 构成等比数列，

所以 $b_k=\frac{m^2}{a_4}=81$． ………1 分

由 $a_n=2n-7$ 知，$a_5=3$． ………1 分

因为数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=a_5$，$b_{n+1}=3b_n$，

所以 $\{b_n\}$ 是首项为 3 且公比 $q=3$ 的等比数列． ………1 分

所以 $b_k=3^k$． ………1 分

所以 $3^k=81$．

解得 $k=4$． ………1 分

（18）（共 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)$ 的图象的相邻两个对称轴的距离为 $\frac{\pi}{2}$，

所以周期 $T=\pi$． ………2 分

因为 $\omega>0$，

所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$． ………2 分

（Ⅱ）**选择条件①②**．

因为 $f(x)$ 的最大值为 2，

所以 $A=2$． ………2 分

即 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$．

由 $f(0)=-1$，得 $\sin\varphi=-\frac{1}{2}$． ………1 分

又因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$． ………2 分

所以函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$． ………1 分

选择条件②③.

因为 $f(x)$ 的最大值为 2，

所以 $A=2$． ………2 分

因为 $f(x)$ 的周期 $T=\pi$，且在区间 $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 上单调递增，

所以 $f(-\frac{\pi}{6})=-2$，即 $\sin(-\frac{\pi}{3}+\varphi)=-1$，得 $\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$．

又因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，

所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$． ………3 分

所以 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$． ………1 分

选择条件①③.

因为 $f(x)$ 的周期 $T=\pi$，且在区间 $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 上单调递增，

所以 $f(-\frac{\pi}{6})=-A$．

即 $\sin(-\frac{\pi}{3}+\varphi)=-1$，得 $\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$．

又因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，

所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$． ………3 分

由 $f(0)=-1$，得 $A\sin(-\frac{\pi}{6})=-1$，

所以 $A=2$． ………2 分

所以 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$． ………1 分

因为 $x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$．

所以 $2x-\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}]$． ………1 分

所以 $\sin(2x-\frac{\pi}{6})\in[\frac{1}{2},1]$． ………1 分

故 $f(x)\in[1,2]$．

当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 的最小值为 1． ………1 分

因为 $x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$，$f(x)\geq a$ 恒成立，

所以 a 的取值范围为 $(-\infty,1]$． ………1 分

（19）（共 15 分）

解：（Ⅰ）当 $a=1$ 时，$f(x)=x^3-x^2-1$．

函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$．

$f'(x)=3x^2-2x$．………1分

令 $f'(x)=0$，

解得 $x=0$，或 $x=\frac{2}{3}$．………1 分

$f'(x)$ 与 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 的情况如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(0)=-1$，极小值为 $f(\frac{2}{3})=-\frac{31}{27}$．………3 分

（Ⅱ）由题意知，$f'(x)=3x^2-2ax=x(3x-2a)$．………1 分

令 $f'(x)=0$，则 $x=0$，$x=\frac{2}{3}a$．………1 分

①当 $\frac{2}{3}a\leqslant -2$，即 $a\leqslant -3$ 时，$f'(x)\leqslant 0$ 在区间 $[-2,0]$ 上恒成立，

所以 $f(x)$ 区间 $[-2,0]$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)$，与已知相矛盾，不符合题意．………1 分

②当 $-2<\frac{2}{3}a<0$，即 $-3<a<0$ 时，

$f'(x)$ 与 $f(x)$ 在区间 $(-2,0)$ 上的变化情况如下：

x	$(-2,\frac{2}{3}a)$	$\frac{2}{3}a$	$(\frac{2}{3}a,0)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减

因为 $f(x)$ 在区间 $[-2,0]$ 上的最小值为 $f(-2)$，

所以 $f(-2)\leqslant f(0)$，即 $-9-4a\leqslant -1$，解得 $a\geqslant -2$，

所以 $-2\leqslant a<0$．………2 分

③当 $\frac{2}{3}a\geqslant 0$，即 $a\geqslant 0$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 在区间 $[-2,0]$ 上恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上单调递增，最小值为 $f(-2)$，满足题意．……1 分

综上，a 的取值范围是 $[-2,+\infty)$．………1 分

（Ⅲ）$a=-2$．………3 分

(20)(共 15 分)

解:(Ⅰ) 因为 $f(x)=9x^2-(x-3)^3e^{ax}$,

所以 $f'(x)=18x-3(x-3)^2e^{ax}-(x-3)^3ae^{ax}$. ………3 分

所以 $f'(0)=27a-27$. ………1 分

因为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=27$,

所以 $f'(0)=0$. ………1 分

所以 $a=1$. ………1 分

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知, $f'(x)=x(18-e^x(x-3)^2)$.

设 $g(x)=18-e^x(x-3)^2$,

所以 $g'(x)=-e^x(x-3)(x-1)$. ………1 分

令 $g'(x)=0$,

解得 $x=1$,或 $x=3$. ………1 分

$g'(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 的情况如下:

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,3)$	3
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0
$g(x)$	单调递减	$18-4e$	单调递增	18

所以 $g(x)$ 最小值为 $g(1)=18-4e>0$. ………2 分

所以在区间 $(-\infty,0)$ 上, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减;

在区间 $(0,3)$ 上, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增. ………1 分

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,3]$ 上的最小值为 $f(0)=27$. ………1 分

所以当 $x\in(-\infty,3]$ 时, $f(x)\geqslant 27$. ………1 分

(Ⅲ) 存在 2 个点满足题意. ………2 分

(21)(共 15 分)

解:(Ⅰ) ①是 E 数列.

因为 $a_2=a_1+a_1+a_1=3$,

$a_3=a_1+a_1+a_2=1+1+3=5$,

$a_4=a_1+a_1+a_3=1+1+5=7$, ………1 分

所以①是 E 数列. ………1 分

②是 E 数列.

因为 $a_2=a_1+a_1+a_1=6$,

$a_3=a_1+a_2+a_2=2+6+6=14$,

$a_4=a_1+a_2+a_3=2+6+14=22$，………1 分

所以②是 E 数列．………1 分

（Ⅱ）n 的最小值为 3．

首先证明 n 不能为 2．

假设 $n=2$，

由数列 A 为 E 数列知，

$a_2=a_1+a_1+a_1=3a_1=2023$．

所以 $a_1=\dfrac{2023}{3}\notin \mathbf{N}^*$．

与已知矛盾，

故假设不成立．

所以 n 不能为 2．………3 分

因为数列 A：289，867，2023 是 E 数列，………1 分

所以 n 的最小值为 3．………1 分

（Ⅲ） n 的最大值为 127．

（1）以下证明：若 a_1 为奇数，则 a_n 必为奇数．

假设数列 A 中存在偶数，设 $a_k\ (k\geqslant 2)$ 是数列 A 中第一个偶数，

因为数列 A 是 E 数列，

所以 $\exists 1\leqslant s\leqslant t\leqslant r\leqslant k-1$，使 $a_k=a_s+a_t+a_r$．

因为 a_s, a_t, a_r 均为奇数，所以 a_k 也为奇数，与 a_k 为偶数矛盾．

所以若 a_1 为奇数，则 a_n 必为奇数．………2 分

因为 $a_n=2024$ 为偶数，所以 a_1 不能为奇数，只能为偶数．

（2）以下证明：若 $a_1=2$，则 $a_n=4p+2$（$p\in \mathbf{N}^*$）．

若不然，设 a_k（$k\geqslant 2$）为第一个满足 $a_k\neq 4p+2$（$p\in \mathbf{N}^*$）的项，

因为数列 A 是 E 数列，所以 $\exists 1\leqslant s\leqslant t\leqslant r\leqslant k-1$，使 $a_k=a_s+a_t+a_r$．

因为 $a_s=4p_1+2, a_t=4p_2+2, a_r=4p_3+2$（$p_1, p_2, p_3\in \mathbf{N}^*$），

所以 $a_k=4(p_1+p_2+p_3+1)+2$，与 $a_k\neq 4p+2$（$p\in \mathbf{N}^*$）矛盾；

所以若 $a_1=2$，则 $a_n=4p+2$（$p\in \mathbf{N}^*$）．

而 $a_n=2024=4\times 506+0\neq 4p+2$（$p\in \mathbf{N}^*$），所以 $a_1\neq 2$．………1 分

同理，若 $a_1=4$，则 $a_n=8p+4$（$p\in \mathbf{N}^*$）．

而 $a_n=2024=8\times 253+0\neq 8p+4$（$p\in \mathbf{N}^*$）．所以 $a_1\neq 4$．………1 分

同理，若 $a_1=6$，则 $a_n=12p+6=3p'$（$p, p'\in \mathbf{N}^*$）．

而 $a_n = 2024 = 3\times674+2 \neq 3p'$（$p' \in \mathbf{N}^*$），所以 $a_1 \neq 6$．

综上：$a_1 \geqslant 8$．

（3）当 $a_1 \geqslant 8$ 时，

因为数列 A 是 E 数列，

所以 $a_n \geqslant a_{n-1} + a_1 + a_1 \geqslant a_{n-1} + 8 + 8$

$\geqslant a_{n-2} + 2\times16 \geqslant a_{n-3} + 3\times16 \geqslant \cdots \geqslant a_2 + (n-2)\times16$

$=3a_1 + (n-2)\times16 \geqslant 16n-8$

由题意知，$2024 \geqslant 16n-8$，解得 $n \leqslant 127$．………1 分

所以 n 的最大值为 127．

此时 $a_n = 16n-8$ $(n=1,2,\cdots,127)$ 即为满足条件的 E 数列．………1 分

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！