海淀区高三年级第一学期期中练习

数　　学（理科）

2018.11

本试卷共4页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A=\{x|x-a\leqslant 0\}$，$B=\{1,2,3\}$. 若 $A\cap B\neq\varnothing$，则 a 的取值范围为

(A) $(-\infty,1]$　(B) $[1,+\infty)$　(C) $(-\infty,3]$　(D) $[3,+\infty)$

2. 下列函数中，是偶函数且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

(A) $f(x)=x^2-|x|$　(B) $f(x)=\frac{1}{x^2}$　(C) $f(x)=|\ln x|$　(D) $f(x)=e^{|x|}$

3. $\int_1^e \frac{1}{x}dx=$

(A) -1　(B) 0　(C) 1　(D) e

4. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$\frac{a_6}{a_5}=2$，则公差 d 的值是

(A) $-\frac{1}{3}$　(B) $\frac{1}{3}$　(C) $-\frac{1}{4}$　(D) $\frac{1}{4}$

5. 角 θ 终边经过点 $P(4,y)$，且 $\sin\theta=-\frac{3}{5}$，则 $\tan\theta=$

(A) $-\frac{4}{3}$　(B) $\frac{4}{3}$　(C) $-\frac{3}{4}$　(D) $\frac{3}{4}$

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n+\frac{a}{n}$，则“$a_2>a_1$”是“数列 $\{a_n\}$ 单调递增”的

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

7. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{a}^2>\boldsymbol{b}^2>\boldsymbol{c}^2$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$ 中最小的值是

(A) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$　(B) $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$　(C) $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$　(D) 不能确定的

8. 函数 $f(x)=x$，$g(x)=x^2-x+3$. 若存在 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[0,\frac{9}{2}]$，使得 $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})+g(x_n)=g(x_1)+g(x_2)+\cdots+g(x_{n-1})+f(x_n)$，则 n 的最大值为

(A) 5　(B) 6　(C) 7　(D) 8

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9. 计算 $\lg 4+\lg 25=$______.

10. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(3,1)$，则向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 夹角的大小为______.

11. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，下表给出了 S_n 的部分数据：

n	1	2	3	4	…
S_n	t	10	19	$\frac{65}{2}$	…

则数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=$______，首项 $a_1=$______.

12. 函数 $f(x)=\left|\sin\frac{x}{2}-a\right|$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的最大值为 2，则 $a=$______.

13. 能说明"若 $f(x)>g(x)$ 对任意的 $x\in[0,2]$ 都成立，则 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最小值大于 $g(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最大值"为假命题的一对函数可以是 $f(x)=$______，$g(x)=$______.

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x, & 0<x\leqslant a,\\ \frac{e}{x}, & x>a.\end{cases}$

（Ⅰ）若函数 $f(x)$ 的最大值为 1，则 $a=$______；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=\frac{a}{e}$ 只有一个公共点，则 a 的取值范围为______.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

15.（本小题满分 13 分）

设 $\{a_n\}$ 是等比数列，S_n 为其前 n 项的和，且 $a_2=2$，$a_1+S_2=0$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）若 $S_n\geqslant 80$，求 n 的最小值.

16.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=2\sin x+\dfrac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}$.

（Ⅰ）求 $f(0)$ 的值；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的单调递增区间.

17.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=x^3+x^2+ax-1$.

（Ⅰ）当 $a=-1$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）求证：直线 $y=ax-\dfrac{23}{27}$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线；

（Ⅲ）写出 a 的一个值，使得函数 $f(x)$ 有三个不同的零点（**只需直接写出数值**）.

18.（本小题满分 13 分）

在 $\triangle ABC$ 中，$c=7$，$\sin C=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.

（Ⅰ）若 $\cos B=\dfrac{5}{7}$，求 b 的值；

（Ⅱ）若 $a+b=11$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

19.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=mx^2-x-\frac{\ln x}{m}$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的极值；

（Ⅱ）求证：存在 x_0，使得 $f(x_0)<1$.

20.（本小题满分 14 分）

记无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项中最大值为 M_n，最小值为 m_n，令 $b_n=\frac{M_n+m_n}{2}$.

（Ⅰ）若 $a_n=2^n-3n$，请写出 b_1，b_2，b_3，b_4 的值；

（Ⅱ）求证："数列 $\{a_n\}$ 是等差数列" 是 "数列 $\{b_n\}$ 是等差数列" 的充要条件；

（Ⅲ）若 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$|a_n|<2018$，$|b_n|=1$，求证：存在 $K\in\mathbf{N}^*$，使得 $\forall n\geqslant K$，有 $b_{n+1}=b_n$.

海淀区高三年级第一学期期中练习参考答案

数 学 （理科） 2018.11

说明：这份只是参考答案，不是评分标准，评分标准等试卷讲评之后下发。

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. B 2. D 3. C 4. A 5.C 6. C 7. A 8. D

二、填空题:本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. 2 10. $\frac{\pi}{4}$ 11. $\frac{3}{2}$, 4 12. -1 或 2

13. $f(x)=x, g(x)=x-1$ 14. e, $(0,\mathrm{e}]$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.

15．解：（Ⅰ）设 $\{a_n\}$ 的公比为 q

因为 $a_1+S_2=a_1+a_1+a_2=2a_1+a_2=0$

又 $a_2=2$，所以 $a_1=-1$

所以 $q=\dfrac{a_2}{a_1}=-2$

所以 $a_n=a_1q^{n-1}=-1(-2)^{n-1}=-(-2)^{n-1}$

（Ⅱ）因为 $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{-1(1-(-2)^n)}{1-(-2)}=\dfrac{(-2)^n-1}{3}$

所以 $S_n\ge 80$，即 $\dfrac{(-2)^n-1}{3}\ge 80$，即 $(-2)^n\ge 241$

显然 n 为奇数时，不等式不成立，

当 n 为偶数时，即 $2^n\ge 241$，解得 $n\ge 8$

所以 n 的最小值为 8 .

16.解：（Ⅰ） $f(0)=2\sin 0+\dfrac{\cos 0}{\sin 0+\cos 0}=1$

（Ⅱ）因为$\sin x+\cos x\neq 0$，所以$x\neq k\pi-\dfrac{\pi}{4}$，

即函数$f(x)$的定义域为$\{x\mid x\neq k\pi-\dfrac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$

$$f(x)=2\sin x+\frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}$$

$$=2\sin x+\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x+\cos x}$$

$$=2\sin x+\cos x-\sin x$$

$$=\sin x+\cos x$$

$$=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$$

令$2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leq x+\dfrac{\pi}{4}\leq 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$

解得$2k\pi-\dfrac{3\pi}{4}\leq x\leq 2k\pi+\dfrac{\pi}{4}$， $k\in\mathbf{Z}$

令$k=0$，得到 $-\dfrac{3\pi}{4}\leq x\leq\dfrac{\pi}{4}$，

因为$x\neq k\pi-\dfrac{\pi}{4}$，

所以$f(x)$在区间$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上单调递增区间为$(0,\dfrac{\pi}{4})$

17．解：（Ⅰ）函数 $f(x)=x^3+x^2+ax-1$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，

当 $a=-1$ 时，$f(x)=x^3+x^2-x-1$

所以 $f'(x)=3x^2+2x-1$

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=-1$，$x_2=\frac{1}{3}$

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$，$(\frac{1}{3},+\infty)$，

单调递减区间为 $(-1,\frac{1}{3})$

（Ⅱ）法一：

因为 $f'(x)=3x^2+2x+a$

令 $f'(x)=3x^2+2x+a=a$，解得 $x_1=0,x_2=-\frac{2}{3}$

因为 $f(0)=-1$，直线 $y=ax-\frac{23}{27}$ 不经过 $(0,-1)$

而 $f(-\frac{2}{3})=-\frac{2}{3}a-\frac{23}{27}$ ，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-\frac{2}{3},f(-\frac{2}{3}))$ 处的切线为 $y-(-\frac{2}{3}a-\frac{23}{27})=a(x-(-\frac{2}{3}))$

化简得到 $y=ax-\frac{23}{27}$

所以无论 a 为何值，直线 $y=ax-\frac{23}{27}$ 都是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-\frac{2}{3},f(-\frac{2}{3}))$ 处的切线

（Ⅲ）取 a 的值为 -2．

这里 a 的值不唯一，只要取 a 的值小于 -1 即可．

18．解：（Ⅰ） 在ΔABC中，因为$\cos B=\frac{5}{7}$，且$B\in(0,\pi)$，所以$\sin B=\frac{2\sqrt{6}}{7}$

根据正弦定理$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

代入$c=7,\sin C=\frac{2\sqrt{6}}{5}$， 解得$b=5$．

（Ⅱ） 法一： 在ΔABC中，因为$\sin C=\frac{2\sqrt{6}}{5}$，所以$\cos C=\pm\frac{1}{5}$

当$\cos C=\frac{1}{5}$时，根据余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

且$a+b=11,c=7$ ，

得到$49=121-2ab-\frac{2ab}{5}$，所以$ab=30$

所以$\begin{cases}a+b=11\\ab=30\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=6\\b=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=5\\b=6\end{cases}$

所以ΔABC的面积$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=6\sqrt{6}$

当$\cos C=-\frac{1}{5}$时，根据余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

又$a+b=11,c=7$，得到$ab=45$

此时方程组 $\begin{cases}a+b=11\\ab=45\end{cases}$ 无解

综上，ΔABC的面积$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=6\sqrt{6}$．

法二：在ΔABC中，因为$a^2+b^2\geq\frac{(a+b)^2}{2}=\frac{121}{2}>c^2$

根据余弦定理$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，得到$\cos C>0$

因为$\sin C=\frac{2\sqrt{6}}{5}$，所以$\cos C=\frac{1}{5}$

根据余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$和$a+b=11,c=7$ ，

得到$ab=30$

所以ΔABC的面积$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=6\sqrt{6}$

19．解：（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$ 且 $m\neq 0$．

$$f'(x)=2mx-1-\frac{1}{mx}=\frac{2m^2x^2-mx-1}{mx}=\frac{(2mx+1)(mx-1)}{mx}$$

令 $f'(x)=0$，得到 $x_1=-\frac{1}{2m},x_2=\frac{1}{m}$

当 $m>0$ 时，x，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,\frac{1}{m})$	$\frac{1}{m}$	$(\frac{1}{m},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{m}$ 处取得极小值 $f(\frac{1}{m})=\frac{\ln m}{m}$

当 $m<0$ 时，当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,-\frac{1}{2m})$	$-\frac{1}{2m}$	$(-\frac{1}{2m},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以函数 $f(x)$ 在 $x=-\frac{1}{2m}$ 处取得极大值 $f(-\frac{1}{2m})=\frac{3}{4m}+\frac{\ln(-2m)}{m}$

（Ⅱ）当 $m<0$ 时，$f(1)=m-1<0<1$，结论成立

当 $m>0$ 时，由（Ⅰ）知道，由（Ⅰ）可知，$f(x)$ 的最小值是 $f(\frac{1}{m})=\frac{\ln m}{m}$，

“存在 x_0，使得 $f(x_0)<1$”等价于“$f(\frac{1}{m})<1$”

而 $f(\frac{1}{m})-1=\frac{\ln m-m}{m}$

设 $g(x)=\ln x-x$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$

当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，当 $1<x$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减

所以 $g(x)$ 的最大值为 $g(1)=-1<0$，所以 $f(\frac{1}{m})-1=\frac{\ln m-m}{m}<0$，结论成立.

20. 解：(Ⅰ)因为 $a_n=2^n-3n$，所以 $a_1=-1$，$a_2=-2$，$a_3=-1$，$a_4=4$

所以 $b_1=-1$，$b_2=-\frac{3}{2}$，$b_3=-\frac{3}{2}$，$b_4=1$

(Ⅱ)（必要性）当数列 $\{a_n\}$ 是等差数列时，设其公差为 d

当 $d>0$ 时，$a_n-a_{n-1}=d>0$，所以 $a_n>a_{n-1}$，所以 $M_n=a_n$，$m_n=a_1$，

当 $d<0$ 时，$a_n-a_{n-1}=d<0$，所以 $a_n<a_{n-1}$，所以 $M_n=a_1$，$m_n=a_n$，

当 $d=0$ 时，$a_n-a_{n-1}=d=0$，所以 $a_n=a_{n-1}$，所以 $M_n=a_1$，$m_n=a_n$

综上，总有 $b_n=\frac{a_n+a_1}{2}$

所以 $b_n-b_{n-1}=\frac{a_n+a_1}{2}-\frac{a_{n-1}+a_1}{2}=\frac{d}{2}$，所以数列 $\{b_n\}$ 是等差数列

（充分性）当数列 $\{b_n\}$ 是等差数列时，设其公差为 d^*

因为 $b_n-b_{n-1}=\frac{M_n+m_n}{2}-\frac{M_{n-1}-m_{n-1}}{2}=\frac{M_n-M_{n-1}}{2}+\frac{m_n-m_{n-1}}{2}=d^*$，

根据 M_n，m_n 的定义，有以下结论：

$M_n\geq M_{n-1}$，$m_n\leq m_{n-1}$，且两个不等式中至少有一个取等号

当 $d^*>0$ 时，则必有 $M_n>M_{n-1}$，所以 $a_n=M_n>M_{n-1}\geq a_{n-1}$，

所以 $\{a_n\}$ 是一个单调递增数列，所以 $M_n=a_n$，$m_n=a_1$，

所以 $b_n-b_{n-1}=\frac{a_n+a_1}{2}-\frac{a_{n-1}+a_1}{2}=\frac{a_n-a_{n-1}}{2}=d^*$

所以 $a_n-a_{n-1}=2d^*$，即 $\{a_n\}$ 为等差数列

当 $d^*<0$ 时，则必有 $m_n<m_{n-1}$，所以 $a_n=m_n<m_{n-1}\leq a_{n-1}$

所以 $\{a_n\}$ 是一个单调递减数列，所以 $M_n=a_1$，$m_n=a_n$，

所以 $b_n-b_{n-1}=\frac{a_1+a_n}{2}-\frac{a_1+a_{n-1}}{2}=\frac{a_n-a_{n-1}}{2}=d^*$

所以 $a_n-a_{n-1}=2d^*$，即 $\{a_n\}$ 为等差数列

当 $d^*=0$ 时，$b_n-b_{n-1}=\frac{M_n+m_n}{2}-\frac{M_{n-1}-m_{n-1}}{2}=\frac{M_n-M_{n-1}}{2}+\frac{m_n-m_{n-1}}{2}=0$

因为 M_n-M_{n-1}，m_n-m_{n-1} 中必有一个为 0，

根据上式，一个为 0，则另一个亦为 0，

所以 $M_n=M_{n-1},m_n=m_{n-1}$，所以 $\{a_n\}$ 为常数数列，所以 $\{a_n\}$ 为等差数列

综上，结论得证.

(III) 假设结论不成立.

因为 $|b_n|=1$，即 $b_n=1$ 或者 $b_n=-1$，

所以对任意 $K\in\mathbf{N}^*$，一定存在 $i\ge K$，使得 b_i,b_{i+1} 符号相反

所以在数列 $\{b_n\}$ 中存在 $b_{k_1},b_{k_2},b_{k_3},\ldots,b_{k_i},b_{k_{i+1}}\ldots$，其中 $k_1<k_2<k_3\ldots<k_i<\ldots$

且 $-1=b_{k_1}=b_{k_2}=b_{k_3}=\ldots=b_{k_i}=b_{k_{i+1}}\ldots$，

$1=b_{k_1+1}=b_{k_2+1}=b_{k_3+1}=\ldots=b_{k_i+1}=b_{k_{i+1}+1}\ldots$

因为 $b_{k_i}=-1,b_{k_i+1}=1$，即 $\dfrac{M_{k_i}+m_{k_i}}{2}=-1,\dfrac{M_{k_i+1}+m_{k_i+1}}{2}=1$

注意到 $M_{k_i+1}\ge M_{k_i}$，$m_{k_i+1}\le m_{k_i}$，且有且仅有一个等号成立，

所以必有 $M_{k_i+1}>M_{k_i}$，$m_{k_i+1}=m_{k_i}$

所以 $M_{k_i+1}=M_{k_i}+4$，所以 $a_{k_i+1}=M_{k_i+1}=M_{k_i}+4$

因为 $k_i>k_{i-1}$，所以 $k_i\ge k_{i-1}+1$，所以 $M_{k_i}\ge M_{k_{i-1}+1}$

所以 $a_{k_i+1}=M_{k_i}+4\ge M_{k_{i-1}+1}+4$

所以 $a_{k_i+1}\ge a_{k_{i-1}+1}+4$

所以 $a_{k_i+1}-a_{k_{i-1}+1}\ge 4$

所以 $a_{k_2+1}-a_{k_1+1}\ge 4$

$a_{k_3+1}-a_{k_2+1}\ge 4$

$a_{k_4+1}-a_{k_3+1}\ge 4$

……

$a_{k_m+1}-a_{k_{m-1}+1}\ge 4$

所以 $a_{k_m+1}-a_{k_1+1}\ge 4(m-1)$

所以 $a_{k_m+1} \ge a_{k_1+1}+4(m-1)$

所以 $a_{k_{1010}+1} \ge a_{k_1+1}+4(1010-1) > -2018+4036=2018$，

这与 $|a_n|<2018$ 矛盾，所以假设错误，

所以存在 $K \in \mathbf{N}^*$，使得 $\forall n \ge K$，有 $b_{n+1}=b_n$．