2023~2024 学年度第一学期四校联考（二）

数学试卷

命题学校：东莞市第六高级中学　　命题：周国真　　审题：王蕾薇

说明：本试卷共 4 页，22 道题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：1. 答卷前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号、试室号、座位号填写在答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上。

2. 选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案，答案不能答在试卷上。

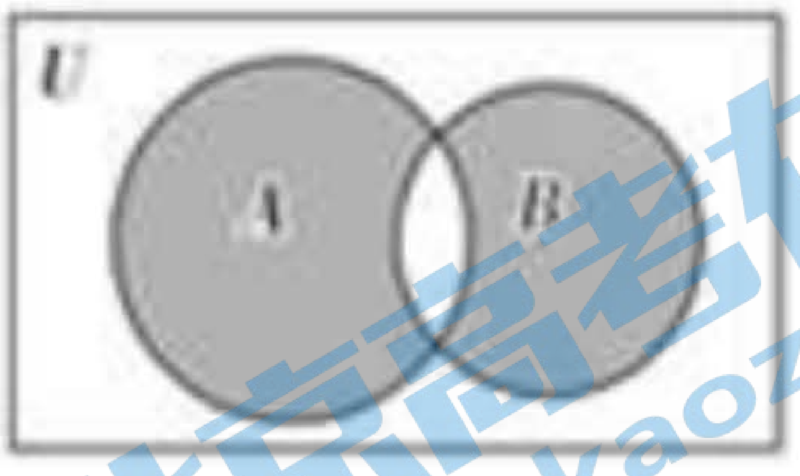
3. 非选择题的作答：用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知全集 $U=R$，集合 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x|x^2-x>0\}$，则图中的阴影部分表示的集合为

A. $\{x\,|\,x\leqslant 1或x>2\}$　　B. $\{x\,|\,x<0或1<x<2\}$

C. $\{x|1\leqslant x<2\}$　　D. $\{x|1<x\leqslant 2\}$



2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_8=6$，$a_{11}=0$，则 $a_2=$（　　）

A. 16　　B. 18　　C. 20　　D. 22

3. 已知 $\sin(\pi+\alpha)=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，则 $\sin(\dfrac{\pi}{2}+2\alpha)$ 的值为（　　）

A. $\dfrac{4}{5}$　　B. $-\dfrac{4}{5}$　　C. $\dfrac{3}{5}$　　D. $-\dfrac{3}{5}$

4. 设 S_n 为正项等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．若 $S_{2023}=2023$，则 $\dfrac{1}{a_4}+\dfrac{4}{a_{2020}}$ 的最小值为（　　）

A. $\dfrac{5}{2}$　　B. 5　　C. 9　　D. $\dfrac{9}{2}$

5. 命题“$\forall 1\leqslant x\leqslant 2$，$x^2-a\leqslant 0$”为真命题的一个充分不必要条件是(　　)

A. $a\geqslant 4$　　B. $a\geqslant 5$　　C. $a\leqslant 4$　　D. $a\leqslant 5$

6. 已知函数 $f(x)$ 满足 $xf'(x)\ln x+f(x)>0$(其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数)，若 $a=f(e^{\frac{1}{2}})$，$b=f(e)$，$c=f(e^2)$，则下列选项中正确的是(　　)

A. $4c<2b<a$　　B. $2b<4c<a$　　C. $a<2b<4c$　　D. $a<4c<2b$

7. 若函数 $f(x)=x^2+3x+1+ke^x$ 恰有两个零点，则实数 k 的取值范围为（　　）

A. $(-\frac{5}{e},0]$　　B. $(e^2,+\infty)$　　C. $[0,e^2)\cup\{-\frac{5}{e}\}$　　D. $(-\infty,-\frac{5}{e})\cup\{0\}$

8. 若直角坐标平面内 A，B 两点满足：①点 A，B 都在函数 $f(x)$ 的图象上；②点 A，B 关于原点对称，则称点 (A,B) 是函数 $f(x)$ 的一个“姊妹点对”，点对 (A,B) 与 (B,A) 可看作是同一个“姊妹点对”．已知函数 $f(x)=\begin{cases}ax-1(x\leqslant 0)\\ \ln x(x>0)\end{cases}$ 恰有两个“姊妹点对”，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $0<a\leqslant e^{-2}$　　B. $0<a<e^{-2}$　　C. $0<a<e^{-1}$　　D. $0<a\leqslant e^{-1}$

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 下列命题为真命题的是（　　）

A. 若 $a<b$，则 $a^2<b^2$　　B. 若 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，则 $a-\frac{1}{a}>b-\frac{1}{b}$

C. 若关于 x 的不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集为 $\{x|-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}\}$，则 $a+b=-10$

D. 函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+4x+5)$ 在区间 $(3m-2,m+2)$ 内单调递增，则实数 m 的取值范围为 $[\frac{4}{3},3]$

10. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，且对任意不小于 2 的正整数 n，$a_1+\frac{1}{2}a_2+\ldots+\frac{1}{n-1}a_{n-1}=a_n$ 恒成立，则下列结论正确的是（　　）

A. $a_n=n(n\in N^*)$　　B. $a_{10}=5$　　C. a_2，a_4，a_8 成等比数列　　D. $a_1+a_2+\ldots+a_n=\frac{n^2+n+2}{4}$

11. 下列四个命题中，错误的是(　　)

A. “$m\leqslant 1$”是“关于 x 的方程 $mx^2+2x+1=0$ 有两个实数解”的必要不充分条件

B. 命题“$\exists x\in \boldsymbol{R}$，使得 $x^2+x+1<0$”的否定是：“对 $\forall x\notin \boldsymbol{R}$，均有 $x^2+x+1\geqslant 0$”

C. 若 $x>0$，则函数 $y=\sqrt{x^2+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ 的最小值是 2

D. 若函数 $f(x)=x^3+3ax^2+bx+a^2$ 在 $x=-1$ 有极值 0，则 $a=2$，$b=9$ 或 $a=1$，$b=3$.

12. 已知 x_1，x_2 分别是函数 $f(x)=e^x+x-2$ 和 $g(x)=\ln\ x+x-2$ 的零点，则（　　）

A. $x_1+x_2=2$　　B. $e^{x_1}+\ln x_2=2$　　C. $x_1x_2>\dfrac{\sqrt{e}}{2}$　　D. $x_1^2+x_2^2<3$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n$，$n\in N^*$. 若其前 k 项和为 126，则 $k=$__________.

14. 已知函数 $f(x)$ 定义域为 R，满足 $f(x+2)=-f(x)$，当 $-2<x\leqslant 2$ 时 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2}, 0<x\leqslant 2\\ |x+\dfrac{1}{2}|, -2<x\leqslant 0\end{cases}$，则 $f(f(-5))=$______.

15. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足：对任意 x，$y\in R$ 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，且当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，$f(k\cdot 2^x)+f(4^{x+1}-8^x-2^x)>0$ 对任意 $x\in[-1,2]$ 恒成立，则实数 k 的取值范围是______.

16. 函数 $f(x)=x^2-ax\ln x$ 在 $(\dfrac{2}{e},2)$ 上不单调，则实数 a 的取值范围是____________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（本小题 10 分）

已知曲线 $y=f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-ax^2+bx+1$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线的斜率为 3，且当 $x=3$ 时，函数 $f(x)$ 取得极值.

（1）求函数在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；　　（2）求函数的极值；

（3）若存在 $x\in[0,3]$，使得不等式 $f(x)-m\le 0$ 成立，求 m 的取值范围．

18.（本小题 12 分）

已知角 θ 的终边上一点 $p(1,y)$，且 $\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

（1）求 $\tan\theta$ 的值；（2）求 $\dfrac{\cos(\theta-\frac{\pi}{2})-\cos(-\theta-\pi)}{\sin(\pi-\theta)+\cos(\theta+\pi)}$ 的值．

（3）若 $\theta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$，$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $\sin(\alpha+\theta)=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，求 $\cos\alpha$ 的值．

19.（本小题 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=n^2$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项积为 T_n，且 $T_n=(\sqrt{3})^{n^2+n}$．

(1) 求 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；(2) 求数列 $\{a_nb_n\}$ 的前 n 项和 M_n．

20.（本小题 12 分）

已知函数 $f(x)=(x^2-2x)e^x$（e 为自然对数的底数）．

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[0,m]$ 上的最大值和最小值．

21.（本小题 12 分）

广东某中学校园内有块扇形空地 OPQ，经测量其半径为 60m，圆心角为 $\frac{\pi}{3}$. 学校准备在此扇形空地上修建一所矩形室内篮球场 $ABCD$，初步设计方案 1 如图 1 所示.

(1) 取 PQ 弧的中点 E，连接 OE，设 $\angle BOE=\alpha$，试用 α 表示方案 1 中矩形 $ABCD$ 的面积，并求其最大值;

(2) 你有没有更好的设计方案 2 来获得更大的篮球场面积?若有，在图 2 中画出来，并证明你的结论.

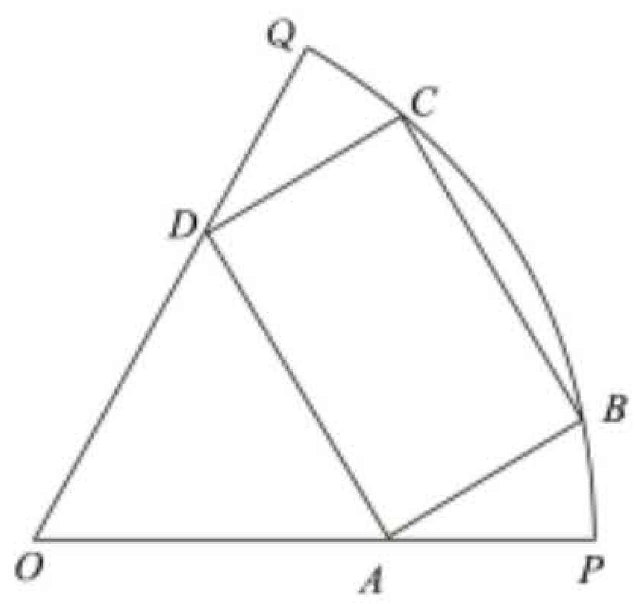


图 1

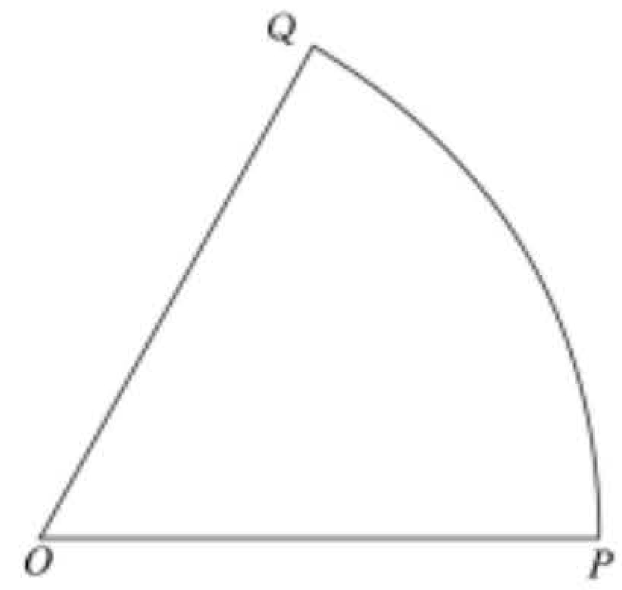


图 2

22.（本小题 12 分）

已知函数 $f(x)=x-a\ln x\ (a\in\mathrm{R})$.

(1) 当 $a<\mathrm{e}$ 时，讨论函数 $f(x)$ 零点的个数；

(2) 当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f\left(x\right)\geq ax^{a}\ln x-x\mathrm{e}^{x}$ 恒成立，求 a 的取值范围.