北京市朝阳区 2019~2020 学年度第一学期高三年级期中质量检测

数学试卷

2019．11

（考试时间 120 分钟　满分 150 分）

本试卷分为选择题（共 40 分）和非选择题（共 110 分）两部分

考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x\in \mathbf{Z} \mid x^2<4\}$， $B=\{-1,2\}$，则 $A\cup B=$

（A）$\{-1\}$　　（B）$\{-1,2\}$

（C）$\{-1,0,1,2\}$　　（D）$\{-2,-1,0,1,2\}$

（2）已知 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，且 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，则 $\tan\alpha=$

（A）$\frac{3}{4}$　　（B）$\frac{4}{3}$

（C）$-\frac{3}{4}$　　（D）$-\frac{4}{3}$

（3）下列函数中，既是奇函数又在区间 $(0,1)$ 上单调递增的是

（A）$y=-x^3$　　（B）$y=\sin(-x)$

（C）$y=\log_2|x|$　　（D）$y=2^x-2^{-x}$

（4）关于函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 有下述三个结论：

①函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π；

②函数 $f(x)$ 的最大值为 2；

③函数 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上单调递减.

其中，所有正确结论的序号是

（A）①②　　（B）①③　　（C）②③　　（D）①②③

（5）已知 α， β 是两个不同的平面，直线 $m\subset\alpha$，下列命题中正确的是

（A）若 $\alpha\perp\beta$，则 $m // \beta$　　（B）若 $\alpha\perp\beta$，则 $m\perp\beta$

（C）若 $m // \beta$，则 $\alpha // \beta$　　　　（D）若 $m \perp \beta$，则 $\alpha \perp \beta$

（6）已知函数 $f(x)=|x-2|-kx+1$ 恰有两个零点，则实数 k 的取值范围是

（A）$(0,\frac{1}{2})$　　（B）$(\frac{1}{2},1)$　　（C）$(1,2)$　　（D）$(2,+\infty)$

（7）已知 $\{a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$ 为等比数列，则“$a_1>a_2$”是“$\{a_n\}$ 为递减数列”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（8）设 F_1，F_2 为椭圆 C：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 的两个焦点，M 为 C 上一点且在第二象限.若 $\triangle MF_1F_2$ 为等腰三角形，则点 M 的横坐标为

（A）$\frac{3}{2}$　　（B）$\frac{\sqrt{15}}{2}$　　（C）$-\frac{\sqrt{15}}{2}$　　（D）$-\frac{3}{2}$

（9）在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$BC=2$，点 P 在 BC 边上，且 $\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=1$，则 $|\overrightarrow{AP}|$ 的取值范围是

（A）$(\frac{1}{2},1]$　　（B）$[\frac{1}{2},1]$

（C）$(\frac{\sqrt{2}}{2},1]$　　（D）$[\frac{\sqrt{2}}{2},1]$

（10）已知集合 A，B 满足：（ⅰ）$A\cup B=\mathbf{Q}$，$A\cap B=\varnothing$；

（ⅱ）$\forall x_1\in A$，若 $x_2\in\mathbf{Q}$ 且 $x_2<x_1$，则 $x_2\in A$；

（ⅲ）$\forall y_1\in B$，若 $y_2\in\mathbf{Q}$ 且 $y_2>y_1$，则 $y_2\in B$.

给出以下命题：

① 若集合 A 中没有最大数，则集合 B 中有最小数；

② 若集合 A 中没有最大数，则集合 B 中可能没有最小数；

③ 若集合 A 中有最大数，则集合 B 中没有最小数；

④ 若集合 A 中有最大数，则集合 B 中可能有最小数.

其中，所有正确结论的序号是

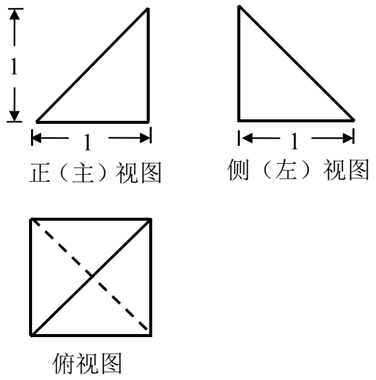
（A）①③　　（B）②③　　（C）③④　　（D）①④

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（11）已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-1)$， $\boldsymbol{b}=(3,m)$，且 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，则 $m=$________.

（12）某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的体积为________，最长棱的长度为________.



（第 12 题图）

（13）已知直线 $x-2y+a=0$ 与圆 $O:x^2+y^2=2$ 相交于 A， B 两点（O 为坐标原点），且 $\triangle AOB$ 为等腰直角三角形，则实数 a 的值为________.

（14）已知 a， b 是实数，给出下列四个论断：①$a>b$ ； ②$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$ ； ③$a>0$ ； ④$b>0$.

以其中两个论断作为条件，余下的论断中选择一个作为结论，写出一个正确的命题：________.

（15）已知函数 $f(x)=\begin{cases} ax^2, & x<a, \\ \dfrac{x}{e^{x-1}}, & x\geqslant a \end{cases}$（$a$ 为常数）．若 $f(-1)=\dfrac{1}{2}$，则 $a=$________；若函数 $f(x)$ 存在最大值，则 a 的取值范围是________.

（16）2019 年 7 月，中国良渚古城遗址获准列入世界遗产名录，标志着中华五千年文明史得到国际社会认可．良渚古城遗址是人类早期城市文明的范例，实证了中华五千年文明史．考古科学家在测定遗址年龄的过程中利用了“放射性物质因衰变而减少”这一规律．已知样本中碳14 的质量 N 随时间 t（单位：年）的衰变规律满足 $N=N_0\cdot 2^{-\frac{t}{5730}}$（$N_0$ 表示碳14 原有的质量），则经过 5730 年后，碳14 的质

量变为原来的________；经过测定，良渚古城遗址文物样本中碳14的质量是原来的$\frac{1}{2}$至$\frac{3}{5}$，据此推测良渚古城存在的时期距今约在________年到5730年之间.（参考数据：$\log_2 3\approx 1.6,\log_2 5\approx 2.3$）

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（17）（本小题 13 分）

在$\triangle ABC$中，$AB=2\sqrt{7}$，点P在BC边上，且$\angle APC=60^\circ$，$BP=2$.

（Ⅰ）求AP的值；

（Ⅱ）若$PC=1$，求$\sin\angle ACP$的值.

（18）（本小题 13 分）

已知$\{a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$是各项均为正数的等比数列，$a_1=16$，$2a_3+3a_2=32$.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设$b_n=3\log_2 a_n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n，并求S_n的最大值.

（19）（本小题 14 分）

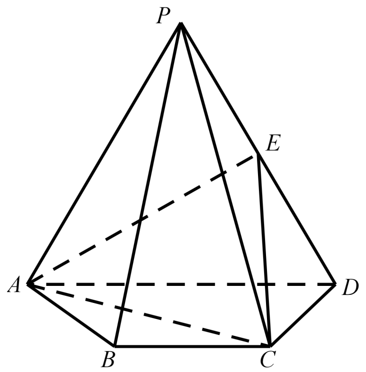
如图，在四棱锥$P-ABCD$中，侧面PAD是等边三角形，且平面$PAD\perp$平面$ABCD$，E为PD的中点，$AD//BC$，$CD\perp AD$，$BC=CD=2$，$AD=4$.

（Ⅰ）求证：$CE//$平面PAB；

（Ⅱ）求二面角$E-AC-D$的余弦值；

（Ⅲ）直线AB上是否存在点Q，使得$PQ//$平面ACE？

若存在，求出$\frac{AQ}{AB}$的值；若不存在，说明理由.



（20）（本小题 13 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过两点 $P(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，$Q(-\sqrt{2},0)$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程；

（Ⅱ）过椭圆的右焦点 F 的直线 l 交椭圆 C 于 A，B 两点，且直线 l 与以线段 FP 为直径的圆交于另一点 E（异于点 F），求 $|AB|\cdot|FE|$ 的最大值.

（21）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x+a}\ (a>0)$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）当 $a=1$ 时，证明：$f(x)\leqslant\dfrac{x-1}{2}$；

（Ⅲ）判断 $f(x)$ 在定义域内是否为单调函数，并说明理由.

（22）（本小题 13 分）

已知无穷数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 满足：$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+1}=|b_n|-|c_n|$，$b_{n+1}=|c_n|-|a_n|$，$c_{n+1}=|a_n|-|b_n|$. 记 $d_n=\max\{|a_n|,|b_n|,|c_n|\}$（$\max\{x,y,z\}$ 表示 3 个实数 x，y，z 中的最大值）.

（Ⅰ）若 $a_1=1$，$b_2=2$，$c_3=3$，求 b_1，c_1 的可能值；

（Ⅱ）若 $a_1=1$，$b_1=2$，求满足 $d_2=d_3$ 的 c_1 的所有值；

（Ⅲ）设 a_1，b_1，c_1 是非零整数，且 $|a_1|$，$|b_1|$，$|c_1|$ 互不相等，证明：存在正整数 k，使得数列 $\{a_n\}$，

$\{b_n\}$，$\{c_n\}$中有且只有一个数列自第k项起各项均为0.

北京市朝阳区 2019~2020 学年度第一学期高三年级期中质量检测

数学参考答案

2019．11

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

（1）C （2）C （3）D （4）B （5）D

（6）B （7）B （8）D （9）A （10）B

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（11）-3 （12）$\frac{1}{6}$，$\sqrt{3}$ （13）$\pm\sqrt{5}$

（14）若$a>b$，$b>0$，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.（答案不唯一）

（15）$\frac{1}{2}$；$(-\infty,0]$ （16）$\frac{1}{2}$；4011

三、解答题（共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程）

（17）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）因为$\angle APC=60^\circ$，所以$\angle APB=120^\circ$.

在$\triangle ABP$中，$AB=2\sqrt{7}$，$\angle APB=120^\circ$，$BP=2$，

由余弦定理$AB^2=AP^2+BP^2-2AP\cdot BP\cos\angle APB$，得

$$AP^2+2AP-24=0.$$

所以$AP=4$. ………6 分

（Ⅱ）在$\triangle APC$中，$AP=4$，$PC=1$，$\angle APC=60^\circ$，

由余弦定理$AC^2=AP^2+PC^2-2AP\cdot PC\cos\angle APC$，得$AC=\sqrt{13}$.

由正弦定理$\dfrac{AP}{\sin\angle ACP}=\dfrac{AC}{\sin\angle APC}$，得

$$\frac{4}{\sin\angle ACP}=\frac{\sqrt{13}}{\sin 60^\circ},$$

所以$\sin\angle ACP=\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$. ………13 分

（18）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）设$\{a_n\}$的公比为q，因为$a_1=16,2a_3+3a_2=32$，

所以$2q^2+3q-2=0$.

解得$q=-2$（舍去）或$q=\dfrac{1}{2}$.

因此$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=16\times(\dfrac{1}{2})^{n-1}=2^{5-n}$. ………6分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得$b_n=3(5-n)\log_2 2=15-3n$，

当$n\geqslant 2$时，$b_n-b_{n-1}=-3$，

故$\{b_n\}$是首项为$b_1=12$，公差为-3的单调递减等差数列.

则$S_n=12n+\dfrac{1}{2}n(n-1)(-3)=-\dfrac{3}{2}(n^2-9n)$.

又$b_5=0$，所以数列$\{b_n\}$的前 4 项为正数，

所以当$n=4$或5时，S_n取得最大值，且最大值为$S_4=S_5=30$. ……………13 分

（19）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）如图，取 PA 中点 F，连结 EF, BF.

因为 E 为 PD 中点，$AD=4$，

所以 $EF//AD$，$EF=\frac{1}{2}AD=2$.

又因为 $BC//AD$，$BC=2$，

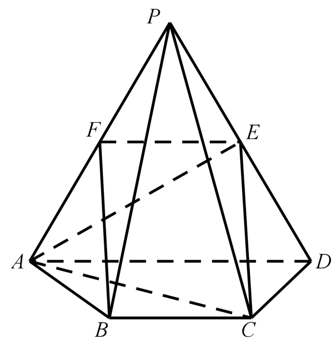
所以 $EF//BC$，$EF=BC$，

所以四边形 $EFBC$ 为平行四边形.

所以 $CE//BF$.

又因为 $CE\not\subset$ 平面 PAB，$BF\subset$ 平面 PAB，

所以 $CE//$ 平面 PAB. ………4 分



（Ⅱ）取 AD 中点 O，连结 OP，OB.因为 $\triangle PAD$ 为等边三角形，所以 $PO\perp OD$.

又因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $OD//BC$，$OD=BC=2$，

所以四边形 $BCDO$ 为平行四边形.

因为 $CD\perp AD$，所以 $OB\perp OD$.

如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$，

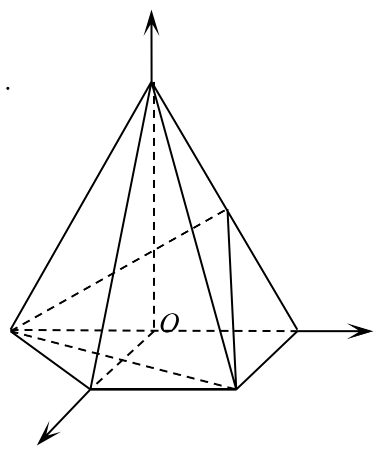
则 $A(0,-2,0), B(2,0,0), C(2,2,0), E(0,1,\sqrt{3}), P(0,0,2\sqrt{3})$.

所以 $\overrightarrow{AC}=(2,4,0), \overrightarrow{AE}=(0,3,\sqrt{3})$.

设平面 ACE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x+4y=0,\\ 3y+\sqrt{3}z=0.\end{cases}$

令 $x=-2$，则 $\boldsymbol{n}_1=(-2,1,-\sqrt{3})$.



显然，平面 ACD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$，

所以 $\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$.

由题知，二面角 $E-AC-D$ 为锐角，

所以二面角 $E-AC-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$. ………10 分

（III）直线 AB 上存在点 Q，使得 $PQ//$ 平面 ACE .理由如下：

设 $\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{AB}$.因为 $\overrightarrow{AB}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{PA}=(0,-2,-2\sqrt{3})$，

所以 $\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{AB}=(2\lambda,2\lambda,0)$，$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AQ}=(2\lambda,2\lambda-2,-2\sqrt{3})$.

因为 $PQ\not\subset$ 平面 ACE，所以 $PQ//$ 平面 ACE 当且仅当 $\overrightarrow{PQ}\cdot\boldsymbol{n}_1=0$.

即 $(2\lambda,2\lambda-2,-2\sqrt{3})\cdot(-2,1,-\sqrt{3})=0$，解得 $\lambda=2$.

所以直线 AB 上存在点 Q，使得 $PQ//$ 平面 ACE，此时 $\dfrac{AQ}{AB}=2$.　　…………14 分

（20）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）因为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $P(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，$Q(-\sqrt{2},0)$，

所以 $\begin{cases}a=\sqrt{2},\\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{2b^2}=1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=\sqrt{2},\\ b=1,\end{cases}$

故椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.　　………4 分

（Ⅱ）由题易知直线 l 的斜率不为 0，设 l：$x=ty+1$，

由 $\begin{cases}x=ty+1,\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(t^2+2)y^2+2ty-1=0$，显然 $\Delta>0$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

则 $y_1+y_2=\dfrac{-2t}{t^2+2},y_1y_2=\dfrac{-1}{t^2+2}$.

又 $|AB|=\sqrt{1+t^2}\,|y_1-y_2|$.

以 FP 为直径的圆的圆心坐标为 $(1,\dfrac{\sqrt{2}}{4})$，半径为 $r=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

故圆心到直线l的距离为$d=\dfrac{\left|1-\dfrac{\sqrt{2}}{4}t-1\right|}{\sqrt{1+t^2}}=\dfrac{\left|\dfrac{\sqrt{2}}{4}t\right|}{\sqrt{1+t^2}}$.

所以$|FE|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{t^2}{t^2+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\dfrac{1}{t^2+1}}$.

所以$|AB|\cdot|FE|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}|y_1-y_2|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{4t^2}{(t^2+2)^2}+\frac{4}{t^2+2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{8t^2+8}{(t^2+2)^2}}$$

$$=2\sqrt{\frac{t^2+1}{(t^2+2)^2}}=2\sqrt{\frac{1}{(t^2+1)+\dfrac{1}{t^2+1}+2}},$$

因为$t^2+1\geqslant 1$，所以$(t^2+1)+\dfrac{1}{t^2+1}\geqslant 2$，即$\dfrac{1}{(t^2+1)+\dfrac{1}{t^2+1}+2}\leqslant\dfrac{1}{4}$.

所以$|AB|\cdot|FE|\leqslant 2\sqrt{\dfrac{1}{4}}=1$.

当$t=0$时，直线与椭圆有交点，满足题意，且$|AB|\cdot|FE|=1$，

所以$|AB|\cdot|FE|$的最大值为1.　　…………13 分

（21）（本小题 14 分）

解：函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{-\ln x+\dfrac{a}{x}+1}{(x+a)^2}$.

（Ⅰ）因为$f(1)=0$，$f'(1)=\dfrac{1}{a+1}$，

所以曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y-0=\dfrac{1}{a+1}(x-1)$，

即$x-(a+1)y-1=0$.　　………4 分

（II）当 $a=1$ 时，$f(x)=\dfrac{\ln x}{x+1}$.

欲证 $f(x)\leqslant\dfrac{x-1}{2}$，

即证 $\dfrac{\ln x}{x+1}\leqslant\dfrac{x-1}{2}$，

即证 $2\ln x-x^2+1\leqslant 0$.

令 $h(x)=2\ln x-x^2+1$，

则 $h'(x)=\dfrac{2}{x}-2x=\dfrac{-2(x-1)(x+1)}{x}$.

当 x 变化时，$h'(x),h(x)$ 变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	↗	极大值	↘

所以函数 $h(x)$ 的最大值为 $h(1)=0$，故 $h(x)\leqslant 0$.

所以 $f(x)\leqslant\dfrac{x-1}{2}$.　　　　………9 分

（III）函数 $f(x)$ 在定义域内不是单调函数．理由如下：

令 $g(x)=-\ln x+\dfrac{a}{x}+1$，

因为 $g'(x)=-\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{x^2}=-\dfrac{x+a}{x^2}<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减．

注意到 $g(1)=a+1>0$.

且 $g(\mathrm{e}^{a+1})=-\ln\mathrm{e}^{a+1}+\dfrac{a}{\mathrm{e}^{a+1}}+1=a(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{a+1}}-1)<0$.

所以存在 $m\in(1,\mathrm{e}^{a+1})$，使得 $g(m)=0$.

当 $x\in(0,m)$ 时，$g(x)>0$，从而 $f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,m)$ 上单调递增；

当 $x\in(m,+\infty)$ 时，$g(x)<0$，从而 $f'(x)<0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(m,+\infty)$ 上单调递减.

故函数 $f(x)$ 在定义域内不是单调函数. ………14 分

(22)（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）由 $b_2=|c_1|-|a_1|$，得 $|c_1|-1=2$，所以 $c_1=\pm3$；

由 $c_3=|a_2|-|b_2|$，得 $|a_2|-2=3$，所以 $a_2=\pm5$，

又 $a_2=|b_1|-|c_1|=|b_1|-3\geqslant-3$，故 $a_2=5$，$|b_1|=8$，$b_1=\pm8$.

所以 b_1，c_1 的所有可能值为

$b_1=8$，$c_1=3$；

$b_1=8$，$c_1=-3$；

$b_1=-8$，$c_1=3$；

$b_1=-8$，$c_1=-3$. ………3 分

（Ⅱ）若 $a_1=1$，$b_1=2$，记 $c_1=x$，

则 $a_2=2-|x|,b_2=|x|-1,c_2=-1$，$d_2=\begin{cases}2-|x|,0\leqslant|x|<1,\\1,\qquad 1\leqslant|x|<2,\\|x|-1,|x|\geqslant2,\end{cases}$

$a_3=||x|-1|-1$，$b_3=1-|2-|x||$，$c_3=|2-|x||-||x|-1|$，

当 $0\leqslant|x|<1$ 时，$a_3=-|x|,b_3=|x|-1,c_3=1$，$d_3=1$，由 $d_3=d_2$，得 $|x|=1$，不符合；

当 $1\leqslant|x|<2$ 时，$a_3=|x|-2,b_3=|x|-1,c_3=3-2|x|$，$d_3=\begin{cases}2-|x|,1\leqslant|x|<1.5,\\|x|-1,1.5\leqslant|x|<2,\end{cases}$

由 $d_3=d_2$，得 $|x|=1$，符合；

当 $|x|\geqslant2$ 时，$a_3=|x|-2,b_3=3-|x|,c_3=-1$，$d_3=\begin{cases}1,\qquad 2\leqslant|x|<3,\\|x|-2,|x|\geqslant3,\end{cases}$

由 $d_3=d_2$，得 $|x|=2$，符合；

综上，c_1 的所有取值是 $-2,-1,1,2$. ………8 分

（III）先证明“存在正整数 $k\geqslant 3$，使 a_k,b_k,c_k 中至少有一个为 0”.

假设对任意正整数 $k\geqslant 3$，a_k,b_k,c_k 都不为 0，

由 a_1,b_1,c_1 是非零整数，且 $|a_1|,|b_1|,|c_1|$ 互不相等，得 $d_1\in\mathbf{N}^*$，$d_2\in\mathbf{N}^*$.

若对任意 $k\geqslant 3$，a_k,b_k,c_k 都不为 0，则 $d_k\in\mathbf{N}^*$，

即对任意 $k\geqslant 1$，$d_k\in\mathbf{N}^*$.

当 $k\geqslant 1$ 时，$|a_{k+1}|=||b_k|-|c_k||<\max\{|b_k|,|c_k|\}\leqslant d_k$，

$|b_{k+1}|=||c_k|-|a_k||<d_k, |c_{k+1}|=||a_k|-|b_k||<d_k$，

所以，$d_{k+1}=\max\{|a_{k+1}|,|b_{k+1}|,|c_{k+1}|\}<d_k$.

所以，$\{d_k\}$ 严格单调递减，

由 d_2 为有限正整数，

所以，必存在正整数 $m\geqslant 3$，使得 $d_m\leqslant 0$，矛盾.

所以，存在正整数 $k\geqslant 3$，使 a_k,b_k,c_k 中至少有一个为 0.

不妨设 $a_k=0$，且 $a_1\neq 0$，$a_2\neq 0$，$\cdots$，$a_{k-1}\neq 0$，

则 $|b_{k-1}|=|c_{k-1}|$，且 $|b_{k-1}|=|c_{k-1}|\neq|a_{k-1}|$，

否则，若 $|b_{k-1}|=|c_{k-1}|=|a_{k-1}|$，

因为 $a_{k-1}+b_{k-1}+c_{k-1}=0$，则必有 $a_{k-1}=b_{k-1}=c_{k-1}=0$，矛盾.

于是，$b_k=|c_{k-1}|-|a_{k-1}|\neq 0, c_k=|a_{k-1}|-|b_{k-1}|\neq 0$，且 $b_k=-c_k$，

所以，$a_{k+1}=0$，$b_{k+1}=|c_k|, c_{k+1}=-|b_k|=-|c_k|$，

依次递推，即有：对 $\forall n\geqslant k, a_n=0, b_{n+1}=|c_k|, c_{n+1}=-|c_k|$，且 $|c_k|\neq 0$，

此时有且仅有一个数列$\{a_n\}$自第k项起各项均为0.

综上，结论成立. ………13 分