2024届高三数学试题(文科)

考生注意:

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,共150分。考试时间120分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

第Ⅰ卷

一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$, $B=\{x|2-x<3\}$,则 $A\cap B=$

A. $\{2\}$　　B. $\{-2\}$

C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{-2,-1,0$

2. 复数 $(2-i)(4+i)$ 在复平面内对应的点所在的象限为

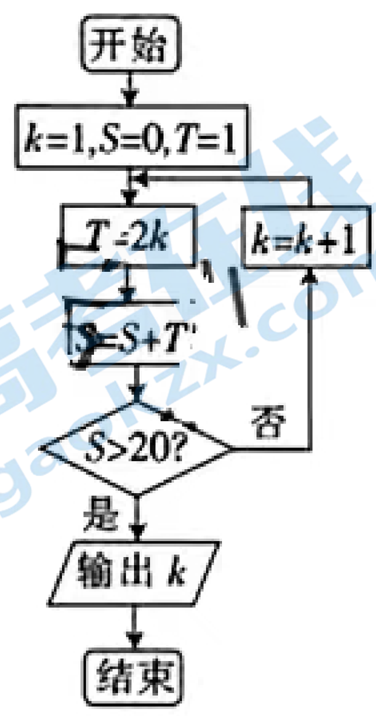
A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(x,1)$, $\boldsymbol{b}=(-1,2)$.若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,则 $|\boldsymbol{a}|=$

A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$　　B. $2\sqrt{5}$

C. $\sqrt{5}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

4. 执行如图所示的程序框图,输出的 $k=$



A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

5. 设 S_n 为正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.若 $S_3=7a_1$,则 $\frac{S_4}{S_2}=$

A. 4　　B. 5　　C. 9　　D. 10

6. 在平面直角坐标系中,角 α 以坐标原点为顶点,x 轴的正半轴为始边.若点 $(3,-4)$ 在角 α 的终边上,则 $\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})=$

A. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$　　B. $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{10}$　　D. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$

7. 已知实数 a,b 满足 $a^2+b^2+ab=1$,则 $a+b$ 的最大值为

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

8. 已知函数 $f(x)=x^3-x-1$ 和直线 $l:y=2x+a$，那么“$a=-3$”是“直线 l 与曲线 $y=f(x)$ 相切”的

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

9. 已知 $a=2^{0.6}$，$b=3^{0.4}$，$c=\log_{0.5}0.6$，则

A. $a>b>c$　　　　B. $b>a>c$

C. $c>b>a$　　　　D. $a>c>b$

10. 已知 O 为等边三角形 ABC 的中心，$AB=3$，则在三角形 ABC 内部任取一点 P，使得 $OP\leqslant 1$ 的概率为

A. $\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$　　　　B. $\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$

C. $\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}\pi}{27}$　　　　D. $\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{3}\pi}{27}$

11. 已知 O 为坐标原点，$|OA|=2$，$|OB|=5$，点 C 与点 B 关于 y 轴对称，则$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$的最小值为

A. 1[illegible]　　B. -6　　C. -2　　D. -1

12. 若 $\forall x_1,x_2\in[2,4]$，当 x_1 [illegible] x_2 时，[illegible] $(\frac{x_2}{x_1})^a$，则实数 a 的取值范围是

A. $(-\infty,-32]$　　　　B. [illegible] 8 [illegible]

C. $[32,+\infty)$　　　　D. $[8,+\infty)$

第Ⅱ卷

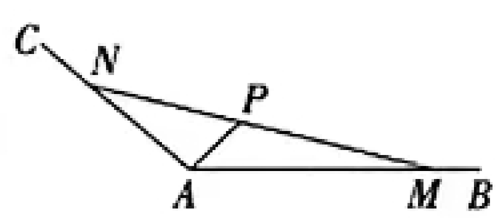
二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填在答题卡中的横线上．

13. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的 $f(x)$ 是奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=\log_3(x+2)-2$，则 $f(f(0)-1)=$ ___▲___.

14. 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y-1\geqslant 0,\\2x+3y-4\leqslant 0,\\y\geqslant -2,\end{cases}$ 则目标函数 $z=2x+y$ 的最大值为___▲___.

15. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})-1(\omega>0)$ 在 $[0,\pi]$ 上恰有一个零点，则 ω 的取值范围为 ___▲___.

16. 某景区的平面图如图所示，其中 AB，AC 为两条公路，$\angle BAC=135^\circ$，P 为景点，$AP=10$，$AP\perp AC$，现需要修建一条经过景点 P 的观光路线 MN，M，N 分别为 AB，AC 上的点，则△AMN 面积的最小值为 ___▲___.

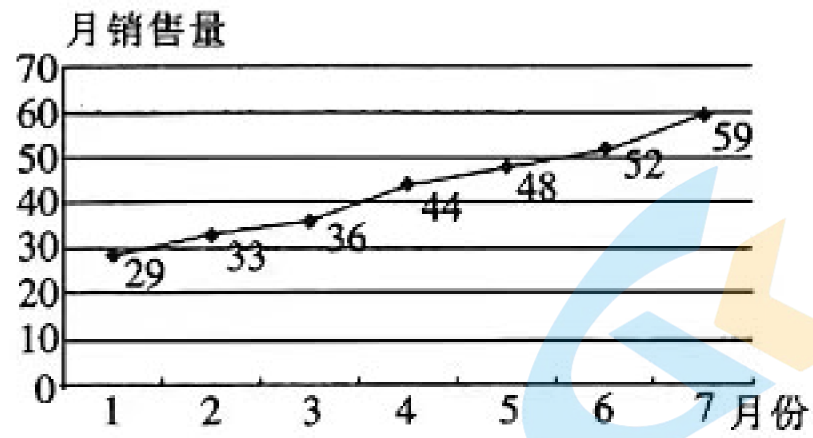


三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(一)必考题：共 60 分.

17.（12 分）

某商家 2023 年 1 月至 7 月 A 商品的月销售量的数据如下图所示，



若月份 x 与 A 商品的月销售量 y 存在线性关系.

(1)求月份 x 与 A 商品的月销售量 y 的回归方程.

(2)设每月实际的销售量减去根据(1)中的回归方程计算的销售量的差为 X，若 $X>0$，则称该月为合格月. 若从 2023 年 4～7 月这四个月中任选两个月，记事件 A 为“两个月中至少有一个月为合格月”，求事件 A 发生的概率 $P(A)$.

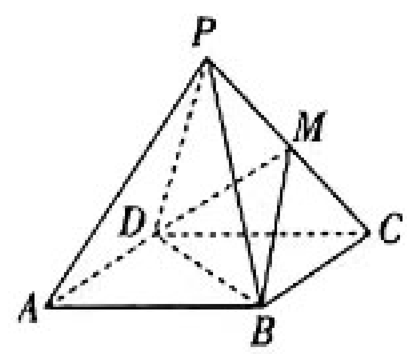
参考公式：回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，其中 $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$，$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$\sum\limits_{i=1}^{7}x_iy_i=1344$，$\overline{y}=43$.

18.（12 分）

已知四棱锥 $P-ABCD$ 的所有棱长均为 2，$AD\perp AB$.

(1)证明：平面 $PBD\perp$平面 $ABCD$.

(2)若 M 是线段 PC 的中点，求点 C 到平面 BDM 的距离.



19.（12 分）

已知数列$\{a_n\}$满足 $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}=n^2+n$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)记 $b_n=\dfrac{32n+16}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n.

20.（12 分）

设 A,B 为抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 上两点，直线 AB 的斜率为 4，且 A 与 B 的纵坐标之和为 2.

(1)求抛物线 C 的方程；

(2)已知 O 为坐标原点，F 为抛物线 C 的焦点，直线 l 交抛物线 C 于 M,N 两点(异于点 O)，以 MN 为直径的圆经过点 O，证明：直线 l 过定点.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-ax+1(a>1)$.

(1)讨论 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的零点个数；

(2)证明：当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)<e^{x-2}-x+1$.

(二)选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22.[选修 4—4：坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=3+2\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数)，以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1)求曲线 C 的极坐标方程；

(2)已知倾斜角为 β 的直线 l 经过原点 O，且 l 与曲线 C 相交于 A,B 两点，若 $\dfrac{1}{|OA|}+\dfrac{1}{|OB|}=\dfrac{3\sqrt{3}}{5}$，求 β 的值.

23.[选修 4—5：不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=|x+a^2|+|x-b^2|$.

(1)若 $a=1,b=\sqrt{2}$，解不等式 $f(x)\leqslant 5$；

(2)若 $f(x)$ 的最小值为 1，求 $a+2b$ 的最大值.

2024 届高三数学试题参考答案(文科)

1. C　依题意得 $B=\{x|2-x<3\}=\{x|x>-1\}$，则 $A\cap B=\{0,1,2\}$.

2. D　$(2-\mathrm{i})(4+\mathrm{i})=8-4\mathrm{i}+2\mathrm{i}+1=9-2\mathrm{i}$，所以该复数对应的点为 $(9,-2)$，该点在第四象限.

3. D　因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，所以 $2x=-1$，解得 $x=-\dfrac{1}{2}$，则 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\dfrac{1}{4}+1}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

4. B　执行该程序框图，$k=1,S=0,T=1$，则 $T=2,S=0+2=2$，不满足 $S>20$，则 $k=2,T=4$，$S=2+4=6$，不满足 $S>20$，则 $k=3,T=6,S=6+6=12$，不满足 $S>20$，则 $k=4,T=8,S=12+8=20$，不满足 $S>20$，则 $k=5,T=10,S=20+10=30$，满足 $S>20$，输出 $k=5$.

5. B　设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q. 由 $S_3=7a_1$，可得 $a_1+a_2+a_3=7a_1$，$q^2+q-6=0$，解得 $q=2$ 或 $q=-3$(舍去). 故 $\dfrac{S_4}{S_2}=\dfrac{\dfrac{a_1(1-q^4)}{1-q}}{\dfrac{a_1(1-q^2)}{1-q}}=1+q^2=5$.

6. D　由点 $(3,-4)$ 在角 α 的终边上，得 $\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，

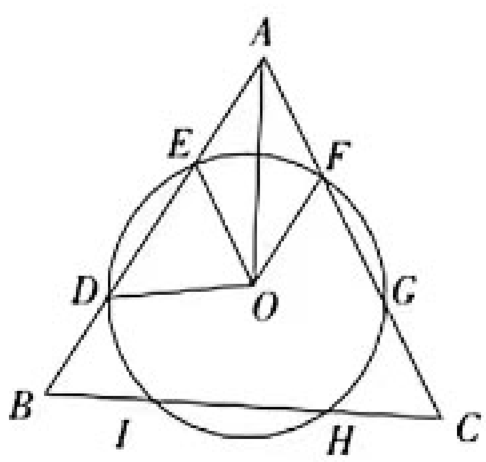
所以 $\cos(\alpha-\dfrac{\pi}{4})=\cos\alpha\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\alpha\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{4}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

7. D　因为 $a^2+b^2+ab=1$，所以 $(a+b)^2=ab+1\leqslant\dfrac{(a+b)^2}{4}+1$，可得 $(a+b)^2\leqslant\dfrac{4}{3}$，即 $a+b\leqslant\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，所以 $a+b$ 的最大值为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，当且仅当 $a=b=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时，取等号.

8. A　设函数 $f(x)=x^3-x-1$ 的图象和直线 $l:y=2x+a$ 的切点坐标为(　　)，则 $\begin{cases}f'(x_0)=3x_0^2-1=2,\\x_0^3-x_0-1=2x_0+a,\end{cases}$ 可得 $a=-3$ 或 $a=1$. 当 $a=-3$ 时，直线 l 与曲线 $y=f(x)$ 相切，但由直线 l 与曲线 $y=f(x)$ 相切不能推出 $a=-3$，故“$a=-3$”是“直线 l 与曲线 $y=f(x)$ 相切”的充分不必要条件.

9. B　因为 $a^5=2^3=8$，$b^5=3^2=9$，$c=\log_{0.5}0.6<1$，所以 $b>a>c$.

10. D　当 $OP=1$ 时，则点 P 的轨迹是以 O 为圆心，半径为 1 的圆，如图，



设该圆与三角形 ABC 相交于 D,E,F,G,H,I. 由 $OA=\sqrt{3}$，$OE=1$，$\angle EAO=\dfrac{\pi}{6}$，可得 $\angle EOA=\dfrac{\pi}{6}$，$\angle EOD=\dfrac{\pi}{3}$，

所以该圆在三角形 ABC 内部的面积为 $(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{3}\times1^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times1^2)\times3=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，则在三角形 ABC 内部任取一点 P，使得 $OP\leqslant1$ 的概率为 $\dfrac{\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times3^2}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2\sqrt{3}\pi}{27}$.

11. C　不妨设 $B(5\cos\alpha,5\sin\alpha)$，$C(-5\cos\alpha,5\sin\alpha)$，$\alpha\in[0,\frac{\pi}{2})$，$A(2\cos\beta,2\sin\beta)$，

则 $\overrightarrow{BA}=(2\cos\beta-5\cos\alpha,2\sin\beta-5\sin\alpha)$，$\overrightarrow{BC}=(-10\cos\alpha,0)$，

所以 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-20\cos\beta\cos\alpha+50\cos^2\alpha\geqslant-20\cos\alpha+50\cos^2\alpha=50(\cos\alpha-\frac{1}{5})^2-2\geqslant-2$，

当且仅当 $\cos\beta=1$，$\cos\alpha=\frac{1}{5}$ 时，等号成立，此时取得最小值 -2.

12. A　$e^{x_1^2-x_2^2}>(\frac{x_2}{x_1})^a$ 等价于 $\ln e^{x_1^2-x_2^2}>\ln(\frac{x_2}{x_1})^a$，

即等价于 $x_1^2-x_2^2>a\ln x_2-a\ln x_1$，即等价于 $x_1^2+a\ln x_1>x_2^2+a\ln x_2$.

令 $f(x)=x^2+a\ln x$，$x\in[2,4]$，

则本题可转化为 $\forall x_1,x_2\in[2,4]$，当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)>f(x_2)$，

即函数 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 上单调递减，即 $\forall x\in[2,4]$，$f'(x)=2x+\frac{a}{x}\leqslant0$，则 $a\leqslant-2x^2$.

又 $x\in[2,4]$，所以 $a\leqslant-32$，所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-32]$.

13. 1　由题意得 $f(f(0)-1)=f(-1)=-f(1)=-(\log_3 3-2)=1$.

14. 8　画出可行域(图略)，当直线 $l: z=2x+y$ 平移到过点 $(5,-2)$ 时，z 取得最大值，最大值为 8.

15. $[\frac{1}{4},\frac{9}{4})$　当 $x\in[0,\pi]$ 时，$\omega x+\frac{\pi}{4}\in[\frac{\pi}{4},\omega\pi+\frac{\pi}{4}]$，所以 $\frac{\pi}{2}\leqslant\omega\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{5\pi}{2}$，解得 $\frac{1}{4}\leqslant\omega<\frac{9}{4}$.

16. 200　设 $AM=a$，$AN=b$，由 $S_{\triangle ANP}+S_{\triangle AMP}=S_{\triangle AMN}$，可得 $\frac{1}{2}AN\cdot AP+\frac{1}{2}AM\cdot AP\cdot\sin45^\circ=\frac{1}{2}AM\cdot AN\cdot\sin135^\circ$，即 $10a+10\sqrt{2}b=ab$. 由 $10a+10\sqrt{2}b=ab\geqslant2\sqrt{10a\times10\sqrt{2}b}$，解得 $ab\geqslant400\sqrt{2}$，当且仅当 $a=20\sqrt{2}$，$b=20$ 时，等号成立，此时取得最小值. 故 $\triangle AMN$ 面积的最小值为 $\frac{1}{2}ab\cdot\sin135^\circ=200$.

17. 解：(1) $\bar{x}=\frac{1}{7}(1+2+3+4+5+6+7)=4$，$\bar{y}=43$，…………………… 1 分

$\sum\limits_{i=1}^{7}x_i^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2=140$，…………………… 2 分

所以 $\hat{b}=\frac{1344-7\times4\times43}{140-7\times4^2}=5$，…………………… 3 分

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=43-5\times4=23$，…………………… 5 分

所以 $\hat{y}=5x+23$. …………………… 6 分

(2) 当 $x=4$ 时，$X=1$；当 $x=5$ 时，$X=0$；当 $x=6$ 时，$X=-1$；当 $x=7$ 时，$X=1$. …… 7 分

2023 年 4～7 月这四个月中有两个月为合格月，记为 a,b，另外两个不合格月记为 c,d，

则从这四个月中任选两个月，有 ab,ac,ad,bc,bd,cd，共 6 种可能，…………………… 9 分

其中只有 cd 不含合格月，…………………… 10 分

故所求概率 $P(A)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$. …………………… 12 分

18. (1)证明：连接 AC，交 BD 于点 O，连接 PO(图略).

因为 $AB=BC=CD=AD$，且 $AD\perp AB$，所以 $AC\perp BD$，…………………………………… 1分

则 O 为 AC 和 BD 的中点，所以 $AO=\sqrt{2}$，$PO=\sqrt{2}$， …………………………………… 2分

则 $AP^2=AO^2+PO^2$，所以 $OP\perp AC$. …………………………………………………………… 3分

因为 $OP\cap BD=O$，所以 $AC\perp$平面 PBD， …………………………………………………… 4分

又 $AC\subset$平面 $ABCD$，所以平面 $PBD\perp$平面 $ABCD$. ……………………………………… 6分

(2)解：$V_{M-BCD}=\frac{1}{2}V_{P-BCD}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$，……………………………………… 9分

在$\triangle BMD$中，$BM=\sqrt{3}$，$DM=\sqrt{3}$，$BD=2\sqrt{2}$，所以 $S_{\triangle BMD}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{3-2}=\sqrt{2}$. ……

……………………………………………………………………………………………… 10分

设点 C 到平面 BDM 的距离为 h，

所以$\frac{1}{3}\times\sqrt{2}h=\frac{\sqrt{2}}{3}$，解得 $h=1$，所以点 C 到平面 BDM 的距离为 1. …………………… 12分

19. 解：(1)由 $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}=n^2+n$，①

当 $n=1$ 时，$\sqrt{a_1}=2$，即 $a_1=4$， …………………………………………………………… 2分

当 $n\geq2$ 时，$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_{n-1}}=(n-1)^2+(n-1)$. ②………………………………… 3分

①−②得 $\sqrt{a_n}=2n$，即 $a_n=4n^2$. ……………………………………………………………… 5分

$a_1=4$ 符合上式，故 $a_n=4n^2$. ………………………………………………………………… 6分

(2)由(1)知 $b_n=\frac{32n+16}{4n^2\times4(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$， …………………………………………… 9分

$S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=(\frac{1}{1}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{9})+\cdots+[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}]=1-\frac{1}{(n+1)^2}$. ……

……………………………………………………………………………………………… 12分

20. (1)解：设 $A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，则 $y_A^2=2px_A$，$y_B^2=2px_B$，$y_A+y_B=2$. …………………… 2分

直线 AB 的斜率 $k=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{y_A-y_B}{\frac{y_A^2}{2p}-\frac{y_B^2}{2p}}=\frac{2p}{y_A+y_B}=4$，……………………………………… 5分

解得 $p=4$，所以抛物线 C 的方程为 $y^2=8x$. ……………………………………………………… 6分

(2)证明：设直线 l 的方程为 $x=my+n$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases}x=my+n,\\y^2=8x,\end{cases}$消去 x 得 $y^2-8my-8n=0$，且 $\Delta=64m^2+32n>0$，

由韦达定理得 $y_1+y_2=8m$，$y_1y_2=-8n$. …………………………………………………………… 8分

以 MN 为直径的圆经过点 O，即$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{y_1^2y_2^2}{64}+y_1y_2=0$，解得 $y_1y_2=$

-64， ……………………………………………………………………………………………… 10分

即 $y_1y_2=-8n=-64$，则 $n=8$，直线 l 恒过定点$(8,0)$. ……………………………………………… 12分

21. (1)解：$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}-a=\frac{1-\ln x-ax^2}{x^2}$. ………………… 1 分

令 $g(x)=1-\ln x-ax^2$. 因为 $a>0$，所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减. ………………… 3 分

又因为 $g(\frac{1}{\sqrt{a}})=1+\ln\sqrt{a}-1=\ln\sqrt{a}>0$，$g(e)=-ae^2<0$，所以 $g(x)=1-\ln x-ax^2$ 存在唯一的零点，即 $f(x)$的导函数 $f'(x)$的零点个数为 1. ………………… 5 分

(2)证明：因为 $a>1$，所以 $f(x)<\frac{\ln x}{x}-x+1$. ………………… 7 分

令 $h(x)=\frac{\ln x}{x}-x+1$，由(1)可知 $h'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减. 又 $h'(1)=0$，所以 $h(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，则 $h(x)\leqslant h(1)$，即$\frac{\ln x}{x}-x+1\leqslant 0$. ……… 9 分

令 $k(x)=e^{x-2}-x+1$，$x\in(0,+\infty)$，则 $k'(x)=e^{x-2}-1$，则 $k(x)$在$(0,2)$上单调递减，在$(2,+\infty)$上单调递增，所以 $k(x)\geqslant k(2)$，即 $e^{x-2}-x+1\geqslant 0$. ………………… 11 分

综上，当 $x\in(0,+\infty)$时，$f(x)<e^{x-2}-x+1$. ………………… 12 分

22. 解(1)由$\begin{cases}x=3+2\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha,\end{cases}$得$(x-3)^2+y^2=4$，即 $x^2+y^2-6x+5=0$. ………………… 2 分

将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入上式，得 $\rho^2-6\rho\cos\theta+5=0$，

所以曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-6\rho\cos\theta+5=0$. ………………… 4 分

(2)因为倾斜角为 β 的直线 l 经过原点 O，所以直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\beta$，

设 A，B 对应的参数分别为 ρ_1，ρ_2，

将 $\theta=\beta$ 代入 $\rho^2-6\rho\cos\theta+5=0$，得 $\rho^2-6\rho\cos\beta+5=0$， ………………… 6 分

则 $\rho_1+\rho_2=6\cos\beta$，$\rho_1\rho_2=5$. ………………… 7 分

又$\frac{1}{|OA|}+\frac{1}{|OB|}=\frac{|OA|+|OB|}{|OA||OB|}=|\frac{6\cos\beta}{5}|=\frac{3\sqrt{3}}{5}$，所以 $\cos\beta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. ………………… 9 分

又 $0<\beta<\pi$，所以 $\beta=\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$. ………………… 10 分

23. 解：(1)由 $a=1$，$b=\sqrt{2}$，$f(x)\leqslant 5$ 可得$|x+1|+|x-2|\leqslant 5$.

当 $x<-1$ 时，原不等式等价于$-x-1+2-x\leqslant 5$，解得 $x\geqslant -2$，此时$-2\leqslant x<-1$； … 1 分

当$-1\leqslant x\leqslant 2$ 时，原不等式等价于 $x+1+2-x\leqslant 5$，不等式恒成立，此时$-1\leqslant x\leqslant 2$；………………… 2 分

当 $x>2$ 时，原不等式等价于 $x+1+x-2\leqslant 5$，解得 $x\leqslant 3$，此时 $2<x\leqslant 3$. ………………… 3 分

故不等式 $f(x)\leqslant 5$ 的解集为$[-2,3]$. ………………… 5 分

(2)$f(x)=|x+a^2|+|x-b^2|\geqslant|(x+a^2)-(x-b^2)|=a^2+b^2$，所以 $a^2+b^2=1$. …… 7 分

由柯西不等式可知$(a^2+b^2)(1+4)\geqslant(a+2b)^2$， ………………… 9 分

所以 $a+2b\leqslant\sqrt{5}$，当且仅当 $a=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$b=\frac{2\sqrt{5}}{5}$时，等号成立，此时取得最大值，最大值为$\sqrt{5}$. ………………… 10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！