

2023 北京顺义杨镇一中高一（上）期中

数 学

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{x | -1 \leq x < 1\}$, 则 $A \cap B = ()$

- A. $\{0\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{-1, 0\}$ D. $\{-1, 0, 1\}$

2. 函数 $f(x) = \sqrt{3x-1}$ 的定义域为 ()

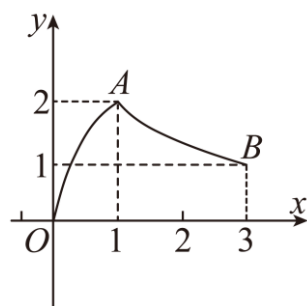
- A. \mathbb{R} B. $(-\infty, \frac{1}{3})$ C. $(\frac{1}{3}, +\infty)$ D. $[\frac{1}{3}, +\infty)$

3. 命题“ $\forall x > 0$, 使是 $x^2 + x + 1 > 0$ ”的否定是 ()

- A. $\exists x_0 \leq 0$, 使得 $x_0^2 + x_0 + 1 \leq 0$ B. $\exists x > 0$, 使得 $x^2 + x + 1 > 0$
C. $\exists x_0 > 0$, 使得 $x_0^2 + x_0 + 1 \leq 0$ D. $\forall x \leq 0$, 使得 $x^2 + x + 1 > 0$

4. 如图, 函数 $f(x)$ 的图象是曲线 OAB , 其中点 O, A, B 的坐标分别为 $(0, 0), (1, 2), (3, 1)$, 则

$f\left(\frac{1}{f(3)}\right)$ 的值为



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5. 设 $a \in \mathbb{R}$, 则“ $a > 1$ ”是“ $a^2 > 1$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要

6. 下列函数中与函数 $y = x$ 相等的函数是 ()

- A. $y = (\sqrt{x})^2$ B. $y = \sqrt[3]{x^3}$ C. $y = \sqrt{x^2}$ D. $y = \frac{x^2}{x}$

7. 若函数 $y = ax$ 与 $y = -\frac{b}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上都是减函数, 则函数 $y = ax^2 + bx$ 在 $(0, +\infty)$ 上 ()

- A. 是增函数 B. 是减函数 C. 先增后减 D. 先减后增

8. 若 $a < b < 0$, 则下列不等式成立的是

- A. $a^2 < b^2$ B. $\frac{a}{b} < 1$ C. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ D. $|a| > |b|$

9. 函数 $f(x)$ 是定义在 $[0, +\infty)$ 上的增函数, 则满足 $f(2x-1) < f\left(\frac{1}{3}\right)$ 的 x 的取值范围是 ()

A. $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

B. $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

C. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

D. $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

10. 根据统计, 一名工人组装第 x 件某产品所用的时间(单位: 分钟)为 $f(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{x}}, & x < A, \\ \frac{c}{\sqrt{A}}, & x \geq A \end{cases}$ (A, c 为常数).

已知工人组装第 4 件产品用时 30 分钟, 组装第 A 件产品用时 15 分钟, 那么 c 和 A 的值分别是

A. 75, 25

B. 75, 16

C. 60, 25

D. 60, 16

二、填空题: 本大题有 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分. 把答案填在答题卡相应位置.

11. 若一次函数 $f(x) = kx + 1$ 的图象经过点 $(3, 4)$, 则 $f(2) =$ _____.

12. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的定义域为 $[1, 2]$, 求 $f(x)$ 的最小值为 _____.

13. 设 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1 \\ x^2, & -1 < x < 2 \\ 2x, & x \geq 2 \end{cases}$, 若 $f(x) = 3$, 则 x 的值为 _____.

14. 函数 $f(x) = (x+1)(x+a)$ 为偶函数, 则 $a =$ _____.

15. 某学习小组由学生和教师组成, 人员构成同时满足以下三个条件:

(i) 男学生人数多于女学生人数;

(ii) 女学生人数多于教师人数;

(iii) 教师人数的两倍多于男学生人数.

①若教师人数为 4, 则女学生人数的最大值为 _____.

②该小组人数的最小值为 _____.

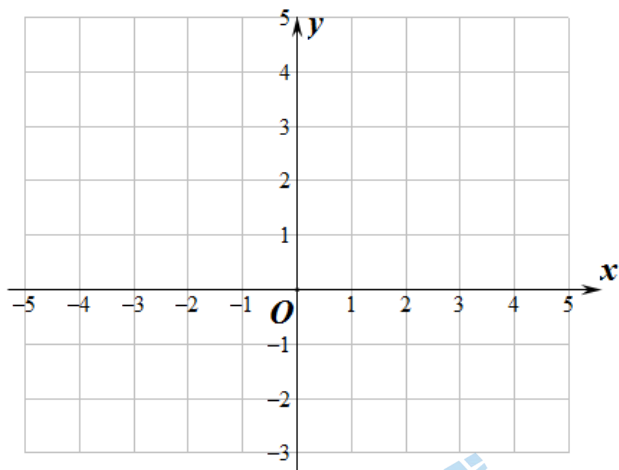
三、解答题: 本大题有 6 小题, 共 85 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16. 已知 $A = \{x | (x-1)(x-3) < 0\}$, $B = \{x | -1 < x < 2\}$, 求:

(1) $A \cap B$;

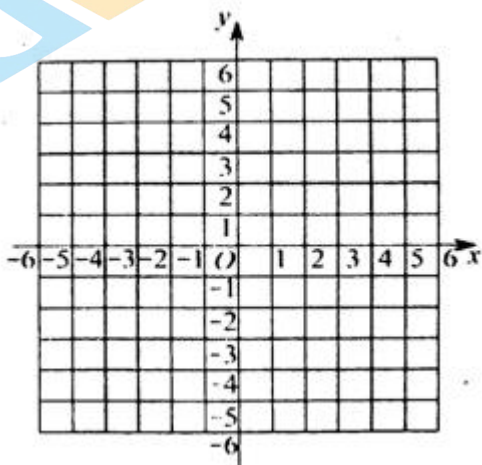
(2) $A \cup B$.

17. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x, & -2 \leq x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 1 \\ 2x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$.



- (1) 分别求 $f(-1)$, $f(0.5)$, $f(\sqrt{3})$ 的值;
- (2) 画出函数 $f(x)$ 的图象;
- (3) 求出函数 $f(x)$ 的定义域及值域.

18. 已知函数 $f(x)$ 定义 \mathbb{R} 上的偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x$,



- (1) 在图中画出函数 $f(x)$ 的图像并根据图像写出函数 $f(x)$ 的单调增区间;
- (2) 求 $f(x)$ 的解析式;
- (3) 求不等式 $f(a-1) > f(1)$ 的解集.

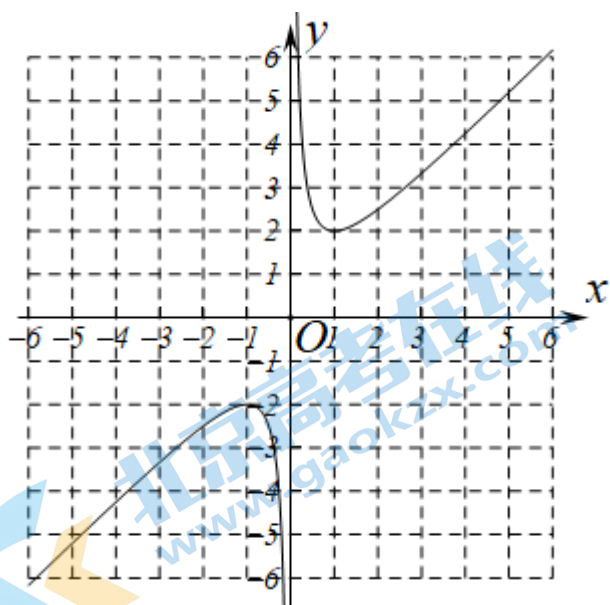
19. 已知二次函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(0, -2)$, 在从条件①、条件②中选择一个作为已知, 求:

- (1) $f(x)$ 的解析式;
- (2) 证明: $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增;
- (3) 若函数 $y = f(x)$ (其中 $x \in [0, 3]$) 的图象与直线 $y = m$ 有两个不同交点, 求 m 的取值范围. (写出详细解答过程)

①点 $1, -2$, 点 $(-2, 4)$ 在函数 $f(x)$ 的图象上;

②不等式 $f(x) \leq 0$ 的解集为 $[-1, 2]$.

20. 函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 的图像如图所示.



(1) 根据图像写出 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并证明的结论;

(3) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 上的最小值. (其中 $t > 0$)

21. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 且 $f(x)$ 的图象连续不间断. 若函数 $f(x)$ 满足: 对于给定的 m

($m \in \mathbb{R}$ 且 $0 < m < 1$), 存在 $x_0 \in [0, 1-m]$, 使得 $f(x_0) = f(x_0 + m)$, 则称 $f(x)$ 具有性质 $P(m)$.

(1) 已知函数 $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$, $x \in [0, 1]$, 判断 $f(x)$ 是否具有性质 $P\left(\frac{1}{3}\right)$, 并说明理由;

(2) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -4x+1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 4x-1, & \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \\ -4x+5, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$, 若 $f(x)$ 具有性质 $P(m)$, 求 m 的最大值.

参考答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 【答案】C

【分析】根据题意，结合集合交集的运算，即可求解.

【详解】由集合 $A = \{-1, 0, 1\}$ ， $B = \{x | -1 \leq x < 1\}$ ，
根据集合交集的概念及运算，可得 $A \cap B = \{-1, 0\}$.

故选：C.

2. 【答案】D

【分析】根据根式的定义分析求解.

【详解】令 $3x-1 \geq 0$ ，解得 $x \geq \frac{1}{3}$ ，
所以函数 $f(x) = \sqrt{3x-1}$ 的定义域为 $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

故选：D.

3. 【答案】C

【分析】根据全称命题的否定是特称命题分析判断.

【详解】由题意可知：命题“ $\forall x > 0$ ，使是 $x^2 + x + 1 > 0$ ”的否定是“ $\exists x_0 > 0$ ，使得 $x_0^2 + x_0 + 1 \leq 0$ ”.

故选：C.

4. 【答案】B

【分析】由条件求得 $f(3) = 1$ ， $\frac{1}{f(3)} = 1$ ，从而求得 $f\left[\frac{1}{f(3)}\right] = f(1)$ 的值.

【详解】由题意可得 $f(3) = 1$ ， $\therefore \frac{1}{f(3)} = 1$ ， $\therefore f\left[\frac{1}{f(3)}\right] = f(1) = 2$ ，

故选 B.

【点睛】本题主要考查求函数的值，考查了函数图像的应用，属于基础题.

5. 【答案】A

【分析】根据一元二次不等式的解法以及充分不必要条件的概念求解.

【详解】由 $a^2 > 1$ 可得， $a^2 - 1 > 0$ ，解得 $a > 1$ 或 $a < -1$ ，

所以“ $a > 1$ ”是“ $a^2 > 1$ ”的充分不必要条件，

故选：A.

6. 【答案】B

【分析】根据相等函数的要求一一判定即可.

【详解】两函数若相等，则需其定义域与对应关系均相等，易知函数 $y = x$ 的定义域为 \mathbb{R} ，

对于函数 $y = (\sqrt{x})^2$ ，其定义域为 $[0, +\infty)$ ，对于函数 $y = \frac{x^2}{x}$ ，其定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ，

显然定义域不同，故 A、D 错误；

对于函数 $y = \sqrt[3]{x^3} = x$ ，定义域为 \mathbf{R} ，符合相等函数的要求，即 B 正确；

对于函数 $y = \sqrt{x^2} = |x|$ ，对应关系不同，即 C 错误。

故选：B

7. 【答案】B

【分析】由题可得 $a < 0$ ， $b < 0$ ，再根据二次函数的性质可判断。

【详解】由于函数 $y = ax$ 与 $y = -\frac{b}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上均为减函数，故 $a < 0$ ， $b < 0$ ，

故二次函数 $y = ax^2 + bx$ 的图象开口向下，且对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} < 0$ ，

故函数 $y = ax^2 + bx$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数。

故选：B.

8. 【答案】D

【分析】对 a, b 取特殊值，对选项进行排除，由此得出正确选项。

【详解】不妨设 $a = -2, b = -1$ ， $a^2 > b^2$ ， $\frac{a}{b} = 2 > 1$ ， $-\frac{1}{2} > -\frac{1}{1}$ ， $|-2| > |-1|$ ，故 A, B, C 三个选项错误，

所以本小题选 D.

【点睛】本小题主要考查不等式的性质，考查选择题特殊值解法，属于基础题。

9. 【答案】D

【分析】根据函数 $f(x)$ 的定义域与单调性可得出关于 x 的不等式，解之即可。

【详解】因为 $f(x)$ 是定义在 $[0, +\infty)$ 上的增函数，由 $f(2x-1) < f\left(\frac{1}{3}\right)$ 可得 $0 \leq 2x-1 < \frac{1}{3}$ ，解得

$$\frac{1}{2} \leq x < \frac{2}{3}.$$

故选：D.

10. 【答案】D

【详解】由题意可得： $f(A) = \frac{c}{\sqrt{A}} = 15$ ，所以 $c = 15\sqrt{A}$ 而 $f(4) = \frac{c}{\sqrt{4}} = 30$ ，

可得出 $\frac{15\sqrt{A}}{2} = 30$ 故 $\sqrt{A} = 4$ ，可得 $A = 16$

从而 $c = 15\sqrt{A} = 60$

故答案为 D

二、填空题：本大题有 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.把答案填在答题卡相应位置.

11.

【分析】根据一次函数图象经过的点求出解析式，进而可求函数值.

【详解】因为一次函数 $f(x) = kx + 1$ 的图象经过点 $(3, 4)$,

所以 $f(3) = 3k + 1 = 4$, 解得 $k = 1$,

所以 $f(x) = x + 1$, 所以 $f(2) = 3$,

故答案为:3.

12. 【答案】 $\frac{1}{2}$

【分析】由反比例函数的单调性以及定义域即可求解.

【详解】因为反比例函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在定义域 $[1, 2]$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(2) = \frac{1}{2}$.

故答案为: $\frac{1}{2}$.

13. 【答案】 $\sqrt{3}$

【分析】根据分段函数的定义域, 分 $x \leq -1, -1 < x < 2, x \geq 2$ 求解.

【详解】若 $\begin{cases} x+2=3 \\ x \leq -1 \end{cases}$, 则 $\begin{cases} x=1 \\ x < -1 \end{cases}$ 无解;

若 $\begin{cases} x^2=3 \\ -1 < x < 2 \end{cases}$, 则 $\begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ -1 < x < 2 \end{cases}$, 所以 $x = \sqrt{3}$.

若 $\begin{cases} 2x=3 \\ x \geq 2 \end{cases}$, 则 $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x \geq 2 \end{cases}$ 无解.

综上: $x = \sqrt{3}$.

故答案为: $\sqrt{3}$

14. 【答案】 -1

【分析】根据 $f(-x) = f(x)$ 即得 a 的值.

【详解】由题得 $f(-x) = f(x)$, 所以 $(-x+1)(-x+a) = (x+1)(x+a)$, 所以 $(a+1)x = 0$ 对于 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立, 所以 $a+1=0$, 所以 $a=-1$.

故答案为-1

【点睛】(1) 本题主要考查偶函数的性质, 意在考查学生对该知识的掌握水平和分析推理计算能力.(2) 偶函数满足 $f(-x) = f(x)$ 对定义域内的每一个值都成立.

15. 【答案】 ①. 6 ②. 12

【详解】试题分析: 设男生人数、女生人数、教师人数分别为 a, b, c , 则 $2c > a > b > c, a, b, c \in \mathbb{N}^*$.

① $8 > a > b > 4 \Rightarrow b_{\max} = 6$,

② $c_{\min} = 3, 6 > a > b > 3 \Rightarrow a = 5, b = 4 \Rightarrow a + b + c = 12.$

【名师点睛】本题主要考查了命题的逻辑分析、简单的合情推理，题目设计巧妙，解题时要抓住关键，逐步推断，本题主要考查考生分析问题、解决问题的能力，同时注意不等式关系以及正整数这个条件.

三、解答题：本大题有 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16. 【答案】(1) $\{x|1 < x < 2\}$

(2) $\{x|-1 < x < 3\}$

【分析】(1) 由已知先化简求出集合 A, 然后根据集合间的交集运算性质即可求解.

(2) 由已知先化简求出集合 A, 然后根据集合间的并集运算性质即可求解.

【小问 1 详解】

由已知可得集合 $A = \{x|(x-1)(x-3) < 0\} = \{x|1 < x < 3\},$

而 $B = \{x|-1 < x < 2\},$

所以 $A \cap B = \{x|1 < x < 2\}.$

【小问 2 详解】

由 (1) 可知 $A = \{x|1 < x < 3\}, B = \{x|-1 < x < 2\},$

所以 $A \cup B = \{x|-1 < x < 3\}.$

17. 【答案】(1) $f(-1) = 1, f(0.5) = 0.5^2 = 0.25, f(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$

(2) 图象见解析 (3) 定义域为 $[-2, 2],$ 值域为 $[0, 4].$

【分析】(1) 根据分段函数求函数值;

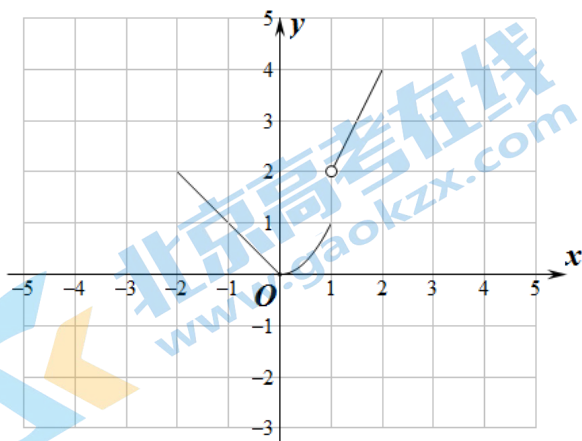
(2) 根据分段函数作出函数图象;

(3) 根据分段函数解析式求定义域, 利用图象直接求值域.

【小问 1 详解】

$f(-1) = 1, f(0.5) = 0.5^2 = 0.25, f(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}.$

【小问 2 详解】



【小问 3 详解】

由题可得，函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-2, 2]$ ，由函数图象可得值域为 $[0, 4]$ 。

18. 【答案】(1) 图象见解析，单调增区间为 $(0, +\infty)$

$$(2) f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$(3) (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$$

【分析】(1) 根据偶函数的对称性作图，进而可得单调区间；

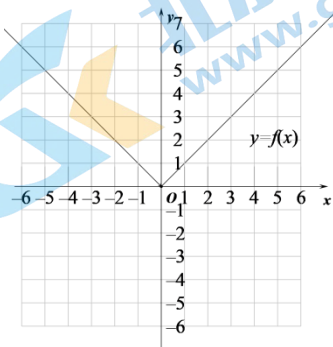
(2) 根据偶函数的定义求函数解析式；

(3) 根据偶函数的性质结合单调性可得 $|a-1| > 1$ ，结合绝对值的几何意义运算求解。

【小问 1 详解】

因为 $x \geq 0$ 时， $f(x) = x$ ，且函数 $f(x)$ 定义 \mathbb{R} 上的偶函数，图象关于 y 轴对称，

作出函数 $f(x)$ 的图像，如图所示：



由图象可知：函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0, +\infty)$ 。

【小问 2 详解】

因为函数 $f(x)$ 定义 \mathbb{R} 上的偶函数，且 $x \geq 0$ 时， $f(x) = x$ ，

当 $x < 0$ 时，则 $-x > 0$ ，可得 $f(x) = f(-x) = -x$ ，

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

【小问 3 详解】

因为偶函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0, +\infty)$ ，单调递减区间为 $(-\infty, 0)$ ，且

若 $f(a-1) > f(1)$ ，则 $|a-1| > 1$ ，可得 $a-1 > 1$ 或 $a-1 < -1$ ，解得 $a > 2$ 或 $a < 0$ ，

所以不等式 $f(a-1) > f(1)$ 的解集为 $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ 。

19. 【答案】(1) $f(x) = x^2 - x - 2$

$$(2) \text{证明见解析} \quad (3) \left(-\frac{9}{4}, -2\right]$$

【分析】(1) 不妨设 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)，由题意有 $f(0) = c = -2$ ，若选条件①，则分别将点

到坐标直接代入可解得 a, b, c 的值, 若选条件②, 则不等式 $f(x) \leq 0$ 的解集为 $[-1, 2]$ 当且仅当

$$\begin{cases} a > 0 \\ -1+2 = -\frac{b}{a}, \text{ 由此可解得 } a, b, c \text{ 的值, 从而即可得解.} \\ -1 \times 2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

(2) 直接由函数单调性的定义证明即可.

(3) 在同一平面直角坐标系中画出函数 $f(x)$ 在 $x \in [0, 3]$ 时的图象, 以及 $y = m$ 的图象, 通过平移直线 $y = m$, 找到满足题意的 m 的取值范围.

【小问 1 详解】

由题意不妨设 $f(x) = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$,

因为二次函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(0, -2)$,

所以 $f(0) = c = -2$,

若选条件①, 即点 $1, -2$, 点 $(-2, 4)$ 在函数 $f(x)$ 的图象上,

$$\text{则有 } \begin{cases} a+b+c = -2 \\ 4a-2b+c = 4 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} b = a-2 \\ c = -2a \end{cases},$$

又因为 $f(0) = c = -2$,

所以解得 $a = 1, b = -1$, 此时 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = x^2 - x - 2$;

若选条件②, 即不等式 $f(x) \leq 0$ 的解集为 $[-1, 2]$,

$$\text{则当且仅当 } \begin{cases} a > 0 \\ -1+2 = -\frac{b}{a}, \text{ 解得 } \\ -1 \times 2 = \frac{c}{a} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a > 0 \\ b = -a \\ c = -2a \end{cases},$$

又因为 $f(0) = c = -2$,

所以解得 $a = 1, b = -1$, 此时 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = x^2 - x - 2$;

综上所述: 无论选条件①或是选条件②, $f(x)$ 的解析式都是 $f(x) = x^2 - x - 2$.

【小问 2 详解】

由 (1) 可知 $f(x) = x^2 - x - 2$,

$\forall x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 不妨设 $x_1 < x_2$,

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = (x_1^2 - x_1 - 2) - (x_2^2 - x_2 - 2)$$

$$=(x_1+x_2)(x_1-x_2)-(x_1-x_2)=(x_1+x_2-1)(x_1-x_2),$$

因为 $1 \leq x_1 < x_2$,

所以 $x_1+x_2-1 > 2-1=1 > 0, x_1-x_2 < 0$,

所以 $f(x_1)-f(x_2)=(x_1+x_2-1)(x_1-x_2) < 0, f(x_1) < f(x_2)$,

因此 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增.

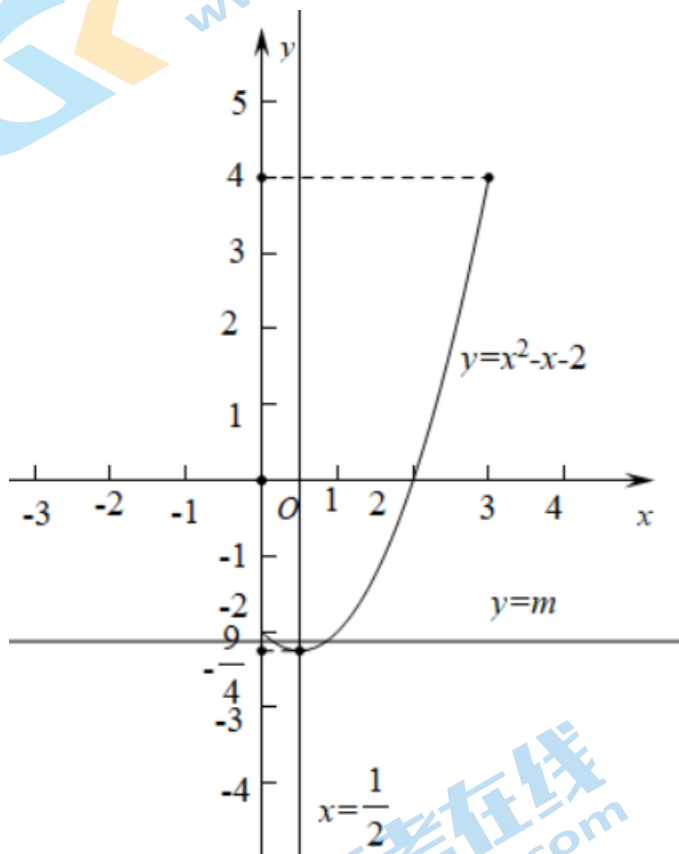
【小问 3 详解】

由题意二次函数 $f(x) = x^2 - x - 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$, 开口向上, 对称轴为 $x = \frac{1}{2}$, 顶点坐标为

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right),$$

且注意到 $f(0) = -2, f(3) = 3^2 - 3 - 2 = 4$,

据此在平面直角坐标系中画出函数 $f(x)$ 在 $x \in [0, 3]$ 时的图象, 以及 $y = m$ 的图象如图所示:



若函数 $y = f(x)$ (其中 $x \in [0, 3]$) 的图象与直线 $y = m$ 有两个不同交点,

则当且仅当 $-\frac{9}{4} < m \leq -2$,

综上所述, m 的取值范围为 $\left(-\frac{9}{4}, -2\right]$.

20. 【答案】(1) 答案见解析

(2) 奇函数, 证明见解析

(3) 答案见解析

【分析】(1) 根据图象结合单调性的定义分析判断;

(2) 根据函数奇偶性的定义分析判断;

(3) 分 $0 < t < 1$ 和 $t \geq 1$ 两种情况, 结合函数单调性分析判断.

【小问 1 详解】

由图像可知: $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1), (1, +\infty)$, $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1, 0), (0, 1)$.

【小问 2 详解】

函数 $f(x)$ 为奇函数, 证明如下:

因为 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$,

$$\text{则 } f(-x) = (-x) + \frac{1}{-x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x),$$

所以函数 $f(x)$ 为奇函数.

【小问 3 详解】

因为 $t > 0$, 则有:

当 $0 < t < 1$ 时, $f(x)$ 在 $[t, 1]$ 上单调递减, 在 $(1, t+1]$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 上的最小值为 $f(1) = 2$;

当 $t \geq 1$ 时, $f(x)$ 在 $[t, t+1]$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 上的最小值为 $f(t) = t + \frac{1}{t}$;

综上所述: 当 $0 < t < 1$ 时, $f(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 上的最小值为 $f(1) = 2$;

当 $t \geq 1$ 时, $f(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 上的最小值为 $f(t) = t + \frac{1}{t}$.

21. 【答案】(1) 具有, 理由见解析

(2) $\frac{1}{2}$

【分析】(1) 根据新定义可知 $m = \frac{1}{3}$, 即 $f(x_0) = f(x_0 + \frac{1}{3})$, 代入求 x_0 即可进行判断;

(2) 分 $m = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < m < 1$ 讨论函数 $f(x)$ 是否具有性质 $P(m)$ 即得.

【小问 1 详解】

当 $m = \frac{1}{3}$ 时, 设 $x_0 \in [0, \frac{2}{3}]$,

令 $f(x_0) = f(x_0 + \frac{1}{3})$, 则 $(x_0 - \frac{1}{2})^2 = (x_0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2})^2$, 解得 $x_0 = \frac{1}{3} \in [0, \frac{2}{3}]$,

所以 $f(x)$ 具有性质 $P(\frac{1}{3})$.

【小问 2 详解】

由题意可得:

当 $x=0$, 则 $f(0)=1$; 当 $x \in (0, \frac{1}{4}]$ 时, 则 $f(x) = -4x+1 \leq 1$;

当 $x \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, 则 $f(x) = 4x-1 < 1$; 当 $x = \frac{1}{2}$, 则 $f(\frac{1}{2}) = 1$;

当 $x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ 时, $f(x) = 4x-1 > 1$; 当 $x \in [\frac{3}{4}, 1)$ 时, $f(x) = -4x+5 > 1$,

当 $x=1$, 则 $f(1)=1$;

综上所述: 当 $x \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ 时, $f(x) = 1$;

当 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 时, $f(x) < 1$;

当 $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ 时, $f(x) > 1$;

首先当 $m = \frac{1}{2}$ 时, 取 $x_0 = \frac{1}{2}$,

则 $f(x_0) = f(\frac{1}{2}) = 1$, $f(x_0 + m) = f(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = f(1) = 1$,

所以函数 $f(x)$ 具有性质 $P(\frac{1}{2})$;

假设存在 $\frac{1}{2} < m < 1$, 使得函数 $f(x)$ 具有性质 $P(m)$, 则 $0 < 1-m < \frac{1}{2}$,

当 $x_0 = 0$ 时, $x_0 + m \in (\frac{1}{2}, 1)$, 则 $f(x_0) = 1, f(x_0 + m) > 1$,

即 $f(x_0) \neq f(x_0 + m)$, 不合题意;

当 $x_0 \in (0, 1-m]$ 时, $x_0 + m \in (\frac{1}{2}, 1]$, 则 $f(x_0) < 1, f(x_0 + m) \geq 1$,

即 $f(x_0) \neq f(x_0 + m)$, 不合题意;

综上所述: 不存在 $x_0 \in [0, 1-m]$, 使得 $f(x_0) = f(x_0 + m)$.

所以 m 的最大值为 $\frac{1}{2}$.



北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023年10-11月北京各区各年级期中试题 & 答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！

