2017年全国高中数学联合竞赛一试（A卷）
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准. 填空题只设8分和0分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，**不得增加其他中间档次**.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第9小题4分为一个档次，第10、11小题5分为一个档次，**不得增加其他中间档次**.

一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，共64分.

1. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，对任意实数 x 有 $f(x+3)\cdot f(x-4)=-1$. 又当 $0\le x<7$ 时，$f(x)=\log_2(9-x)$，则 $f(-100)$ 的值为________.

答案：$-\dfrac{1}{2}$.

解：由条件知，$f(x+14)=-\dfrac{1}{f(x+7)}=f(x)$，所以

$$f(-100)=f(-100+14\times 7)=f(-2)=-\frac{1}{f(5)}=-\frac{1}{\log_2 4}=-\frac{1}{2}.$$

2. 若实数 x,y 满足 $x^2+2\cos y=1$，则 $x-\cos y$ 的取值范围是____________.

答案：$[-1,\ \sqrt{3}+1]$.

解：由于 $x^2=1-2\cos y\in[-1,3]$，故 $x\in[-\sqrt{3},\ \sqrt{3}]$.

由 $\cos y=\dfrac{1-x^2}{2}$ 可知，$x-\cos y=x-\dfrac{1-x^2}{2}=\dfrac{1}{2}(x+1)^2-1$. 因此当 $x=-1$ 时，$x-\cos y$ 有最小值 -1（这时 y 可以取 $\dfrac{\pi}{2}$）；当 $x=\sqrt{3}$ 时，$x-\cos y$ 有最大值 $\sqrt{3}+1$（这时 y 可以取 π）. 由于 $\dfrac{1}{2}(x+1)^2-1$ 的值域是 $[-1,\ \sqrt{3}+1]$，从而 $x-\cos y$ 的取值范围是 $[-1,\ \sqrt{3}+1]$.

3. 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{10}=1$，$F$ 为 C 的上焦点，A 为 C 的右顶点，P 是 C 上位于第一象限内的动点，则四边形 $OAPF$ 的面积的最大值为____________.

答案：$\dfrac{3\sqrt{11}}{2}$.

解：易知 $A(3,0),\ F(0,1)$. 设 P 的坐标是 $(3\cos\theta,\ \sqrt{10}\sin\theta),\ \theta\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$\begin{aligned}S_{OAPF}&=S_{\Delta OAP}+S_{\Delta OFP}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{10}\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3\cos\theta\\&=\frac{3}{2}(\sqrt{10}\cos\theta+\sin\theta)=\frac{3\sqrt{11}}{2}\sin(\theta+\varphi).\end{aligned}$$

其中 $\varphi=\arctan\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. 当 $\theta=\arctan\sqrt{10}$ 时，四边形 $OAPF$ 面积的最大值为 $\dfrac{3\sqrt{11}}{2}$.

4. 若一个三位数中任意两个相邻数码的差均不超过1，则称其为“平稳数”．平稳数的个数是____________．

答案：75．

解：考虑平稳数$\overline{abc}$．

若$b=0$，则$a=1,\ c\in\{0,1\}$，有2个平稳数．

若$b=1$，则$a\in\{1,2\},\ c\in\{0,1,2\}$，有$2\times3=6$个平稳数．

若$2\le b\le 8$，则$a,c\in\{b-1,b,\ b+1\}$，有$7\times3\times3=63$个平稳数．

若$b=9$，则$a,c\in\{8,9\}$，有$2\times2=4$个平稳数．

综上可知，平稳数的个数是$2+6+63+4=75$．

5. 正三棱锥$P-ABC$中，$AB=1,\ AP=2$，过AB的平面α将其体积平分，则棱PC与平面α所成角的余弦值为____________．

答案：$\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$．

解：设$AB,\ PC$的中点分别为$K,\ M$，则易证平面ABM就是平面α．由中线长公式知

$$AM^2=\frac{1}{2}(AP^2+AC^2)-\frac{1}{4}PC^2=\frac{1}{2}(2^2+1^2)-\frac{1}{4}\times2^2=\frac{3}{2},$$

所以$KM=\sqrt{AM^2-AK^2}=\sqrt{\dfrac{3}{2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$．

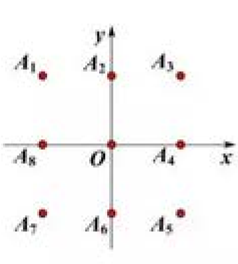
又易知直线PC在平面α上的射影是直线MK，而$CM=1,\ KC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以

$$\cos\angle KMC=\frac{KM^2+MC^2-KC^2}{2KM\cdot MC}=\frac{\frac{5}{4}+1-\frac{3}{4}}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{10},$$

故棱PC与平面α所成角的余弦值为$\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$．

6. 在平面直角坐标系xOy中，点集$K=\{(x,y)\mid x,y=-1,0,1\}$．在$K$中随机取出三个点，则这三点中存在两点之间距离为$\sqrt{5}$的概率为____________．

答案：$\dfrac{4}{7}$．



解：易知K中有9个点，故在K中随机取出三个点的方式数为$C_9^3=84$种．

将K中的点按右图标记为$A_1,A_2,\cdots,A_8,O$，其中有8对点之间的距离为$\sqrt{5}$．由对称性，考虑取A_1,A_4两点的情况，则剩下的一个点有7种取法，这样有$7\times8=56$个三点组（不计每组中三点的次序）．对每个$A_i(i=1,2,\cdots,8)$，K中恰有A_{i+3},A_{i+5}两点与之距离为$\sqrt{5}$（这里下标按模8理解），因而恰有$\{A_i,A_{i+3},A_{i+5}\}(i=1,2,\cdots,8)$这8个三点组被计了两次．从而满足条件的三点组个数为$56-8=48$，进而所求概率为$\dfrac{48}{84}=\dfrac{4}{7}$．

7. 在ΔABC中，M是边BC的中点，N是线段BM的中点．若$\angle A=\frac{\pi}{3}$，ΔABC的面积为$\sqrt{3}$，则$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$的最小值为____________.

答案：$\sqrt{3}+1$.

解：由条件知，$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，$\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，故

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{8}\left(3\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right).$$

由于$\sqrt{3}=S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|$，所以$\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|=4$，进一步可得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos A=2$，从而

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}&\geq\frac{1}{8}\left(2\sqrt{3\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|^2}+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{3}+1.\end{aligned}$$

当$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$，$\left|\overrightarrow{AC}\right|=2\times\sqrt[4]{3}$时，$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$的最小值为$\sqrt{3}+1$.

8. 设两个严格递增的正整数数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足：$a_{10}=b_{10}<2017$，对任意正整数n，有$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，$b_{n+1}=2b_n$，则a_1+b_1的所有可能值为__________.

答案：13, 20.

解：由条件可知：a_1,a_2,b_1均为正整数，且$a_1<a_2$.

由于$2017>b_{10}=2^9\cdot b_1=512b_1$，故$b_1\in\{1,2,3\}$．反复运用$\{a_n\}$的递推关系知

$$\begin{aligned}a_{10}&=a_9+a_8=2a_8+a_7=3a_7+2a_6=5a_6+3a_5=8a_5+5a_4\\&=13a_4+8a_3=21a_3+13a_2=34a_2+21a_1,\end{aligned}$$

因此

$$21a_1\equiv a_{10}=b_{10}=512b_1\equiv 2b_1\pmod{34},$$

而$13\times21=34\times8+1$，故有

$$a_1\equiv13\times21a_1\equiv13\times2b_1=26b_1\pmod{34}. \quad ①$$

另一方面，注意到$a_1<a_2$，有$55a_1<34a_2+21a_1=512b_1$，故

$$a_1<\frac{512}{55}b_1. \quad ②$$

当$b_1=1$时，①，②分别化为$a_1\equiv26\pmod{34}$，$a_1<\frac{512}{55}$，无解.

当$b_1=2$时，①，②分别化为$a_1\equiv52\pmod{34}$，$a_1<\frac{1024}{55}$，得到唯一的正整数$a_1=18$，此时$a_1+b_1=20$.

当$b_1=3$时，①，②分别化为$a_1\equiv78\pmod{34}$，$a_1<\frac{1536}{55}$，得到唯一的正整数$a_1=10$，此时$a_1+b_1=13$.

综上所述，a_1+b_1的所有可能值为13, 20.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9．（本题满分 16 分）设 k, m 为实数，不等式 $\left|x^2-kx-m\right|\le 1$ 对所有 $x\in[a, b]$ 成立．证明：$b-a\le 2\sqrt{2}$．

证明：令 $f(x)=x^2-kx-m$，$x\in[a, b]$，则 $f(x)\in[-1, 1]$．于是

$$f(a)=a^2-ka-m\le 1, \qquad ①$$

$$f(b)=b^2-kb-m\le 1, \qquad ②$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-k\cdot\frac{a+b}{2}-m\ge -1. \qquad ③$$

…………………4 分

由①＋②－2×③知，

$$\frac{(a-b)^2}{2}=f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le 4,$$

故 $b-a\le 2\sqrt{2}$．…………………16 分

10．（本题满分 20 分）设 x_1,x_2,x_3 是非负实数，满足 $x_1+x_2+x_3=1$，求

$$(x_1+3x_2+5x_3)(x_1+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{5})$$

的最小值和最大值．

解：由柯西不等式

$$(x_1+3x_2+5x_3)(x_1+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{5})\ge(\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_1}+\sqrt{3x_2}\cdot\sqrt{\frac{x_2}{3}}+\sqrt{5x_3}\cdot\sqrt{\frac{x_3}{5}})^2$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2=1,$$

当 $x_1=1, x_2=0, x_3=0$ 时不等式等号成立，故欲求的最小值为 1．

…………………5 分

因为

$$(x_1+3x_2+5x_3)(x_1+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{5})=\frac{1}{5}(x_1+3x_2+5x_3)(5x_1+\frac{5x_2}{3}+x_3)$$

$$\le\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\left((x_1+3x_2+5x_3)+(5x_1+\frac{5x_2}{3}+x_3)\right)^2$$

$$=\frac{1}{20}\left(6x_1+\frac{14}{3}x_2+6x_3\right)^2 \qquad \text{…………………10 分}$$

$$\le\frac{1}{20}(6x_1+6x_2+6x_3)^2=\frac{9}{5},$$

当 $x_1=\frac{1}{2}, x_2=0, x_3=\frac{1}{2}$ 时不等式等号成立，故欲求的最大值为 $\frac{9}{5}$．………20 分

11．（本题满分 20 分）设复数 z_1, z_2 满足 $\mathrm{Re}(z_1)>0, \mathrm{Re}(z_2)>0$，且 $\mathrm{Re}(z_1^2)=\mathrm{Re}(z_2^2)=2$（其中 $\mathrm{Re}(z)$ 表示复数 z 的实部）．

(1) 求 $\mathrm{Re}(z_1z_2)$ 的最小值；

(2) 求 $\left|z_1+2\right|+\left|\overline{z_2}+2\right|-\left|\overline{z_1}-z_2\right|$ 的最小值．

解：(1) 对 $k=1,2$，设 $z_k=x_k+y_k\mathrm{i}\,(x_k,y_k\in\mathbf{R})$．由条件知

$$x_k=\mathrm{Re}(z_k)>0,\ x_k^2-y_k^2=\mathrm{Re}(z_k^2)=2\,.$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(z_1z_2)&=\mathrm{Re}((x_1+y_1\mathrm{i})(x_2+y_2\mathrm{i}))=x_1x_2-y_1y_2\\&=\sqrt{(y_1^2+2)(y_2^2+2)}-y_1y_2\geq\left(|y_1y_2|+2\right)-y_1y_2\geq 2\,.\end{aligned}$$

又当 $z_1=z_2=\sqrt{2}$ 时，$\mathrm{Re}(z_1z_2)=2$．这表明，$\mathrm{Re}(z_1z_2)$ 的最小值为 2．

…………………5 分

(2) 对 $k=1,2$，将 z_k 对应到平面直角坐标系 xOy 中的点 $P_k(x_k,y_k)$，记 P_2' 是 P_2 关于 x 轴的对称点，则 P_1,P_2' 均位于双曲线 $C:x^2-y^2=2$ 的右支上．

设 F_1,F_2 分别是 C 的左、右焦点，易知 $F_1(-2,0),\ F_2(2,0)$．

根据双曲线的定义，有 $|P_1F_1|=|P_1F_2|+2\sqrt{2},\ |P_2'F_1|=|P_2'F_2|+2\sqrt{2}$，进而得

$$\begin{aligned}&|z_1+2|+|\overline{z_2}+2|-|\overline{z_1}-z_2|=|z_1+2|+|\overline{z_2}+2|-|z_1-\overline{z_2}|\\&=|P_1F_1|+|P_2'F_1|-|P_1P_2'|=4\sqrt{2}+|P_1F_2|+|P_2'F_2|-|P_1P_2'|\geq 4\sqrt{2}\,,\end{aligned}$$

…………………15 分

等号成立当且仅当 F_2 位于线段 P_1P_2' 上（例如，当 $z_1=z_2=2+\sqrt{2}\mathrm{i}$ 时，F_2 恰是 P_1P_2' 的中点）．

综上可知，$|z_1+2|+|\overline{z_2}+2|-|\overline{z_1}-z_2|$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$．　　…………20 分