2020届北京师范大学附属实验中学高三摸底考试

数学试题

一、选择题(共8小题，每小5分，共40分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项)

01.已知集合 $A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{1,2,4\}$，则 $A\cup B$ 元素的个数为　　【　　】

A.2　　B.3

C.4　　D.5

02.设 i 为虚数单位，则 $\frac{2}{1-i}=$　　【　　】

A.$1-i$　　B.$1+i$

C.$-1-i$　　D.$-1+i$

03.命题"$\forall x\in R$，有 $f(x)>g(x)$"的否定形式为　　【　　】

A.$\forall x\in R$，有 $f(x)\le g(x)$

B.$\forall x\in R$，有 $f(x)<g(x)$

C.$\exists x_0\in R$，使 $f(x_0)\le g(x_0)$

D.$\exists x_0\in R$，使 $f(x_0)<g(x_0)$

04.已知某校高一、高二、高三的人数分别为400、450、500，为调查该校学生的学业压力情况，现采用分层抽样的方法抽取一个容量为270的样本，则从高二年级抽取的人数为　　【　　】

A.80　　B.90

C.100　　D.120

05.下列函数中在(0，+∞)上单调递减的是　　【　　】

A. $f(x)=|x|$　　B. $f(x)=(x-1)^2$

C. $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$　　D. $f(x)=2^{x+1}$

06.函数 $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$ 的对称中心坐标为　　【　　】

A.$\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},0\right)(k\in Z)$　　B.$\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},0\right)(k\in Z)$

C.$\left(-\frac{\pi}{6}+k\pi,0\right)(k\in Z)$　　D.$\left(\frac{\pi}{6}+k\pi,0\right)(k\in Z)$

07.已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a,b>0\right)$的两条渐近线分别与抛物线$y^2=4x$交于第一、四象限的$A$，$B$两点，设抛物线焦点为$F$，若$\cos\angle AFB=-\frac{7}{9}$，则双曲线的离心率为　　　　【　　】

A.$\sqrt{2}$　　　　B.$\sqrt{3}$

C.$\sqrt{5}$　　　　D.$2\sqrt{2}$

08.某人利用下载软件下载A，B，C三个文件，大小分别为xMb，yMb，$zMb(x>y>z)$该下载软件至多可以同时下载两个文件，总下载速度保持为tMb/s，当同时下载两个文件时，两个文件的下载速度均为$\frac{t}{2}Mb/s$，现有以下三种方案可供选择。

方案一：同时开启A，B，当B下载结束瞬间，立刻开启C；

方案二：同时开启B，C，当C下载结束瞬间，立刻开启A；

方案三：同时开启A，C，当C下载结束瞬间，立刻开启B.

则这三种下载方案中　　　　【　　】

A.方案一更节省时间

B.方案二更节省时间

C.方案三更节省时间

D.三种方案所花时间相同

第二部分(非选择题　共110分)

二、填空题(共6小题，每小题5分，共30分)

09.已知向量$\boldsymbol{a}=(1，3)$，$\boldsymbol{b}=(2，1)$，则$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$____________.

10.在$\left(x-\frac{1}{2x}\right)^6$的展开式中，$\frac{1}{x^4}$项的系数为____________.

11.函数$f\left(x\right)=\frac{\ln x}{x+1}$的图象在点$\left(1,f\left(1\right)\right)$处的切线方程为____________.

12.设公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_3=12$，且 a_2,a_4,a_8 成等比数列，则 $a_5=$____________.

13.正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AD=1$, $AA_1=2$，则以 B,D,A_1,C_1 为顶点的四面体的体积为________.

14.定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足：当 $x\le -1$ 时，$f(x)=-2x-3$；当 $0<x<1$ 时，$f(x)=x^2$，已知直线 $y=a$ 与函数 $f(x)$ 的图象有三个交点，设其横坐标分别为 $x_1,x_2,x_3\left(x_1<x_2<x_3\right)$，若 $x_1+x_2-x_3=-\dfrac{7}{2}$，则 $a=$________.

三、解答题(共 6 小题，共 80 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程)

15.(本小题 13 分)在△ABC 中，a，b，c 分别为角 A，B，C 所对边，若 a（$\sin A+\sin B$）$=c\sin C-b\sin B$.

(1)求角 C 的大小；

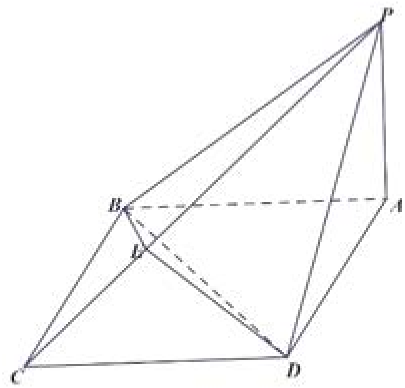
(2)若 $c=2\sqrt{3}$，求△ABC 周长的取值范围.

16.(本小题 14 分)如图所示，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面四边形 $ABCD$ 为正方形，已知 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AB=2$，$PA=\sqrt{2}$.

(1)证明：$BD\perp PC$；

(2)求 PC 与平面 PBD 所成角的正弦值；

(3)在棱 PC 上是否存在一点 E，使得平面 $BDE\perp$ 平面 BDP？若存在，求 $\dfrac{PE}{PC}$ 的值并证明，若不存在，说明理由.



17.(本小题 14 分)某公司打算引进一台设备使用一年，现有甲、乙两种设备可供选择，甲设备每台 10000 元，乙设备每台 9000 元，此外设备使用期间还需维修，对于每台设备，一年间三次及三次以内免费维修，三次以外的维修费用均为每次 1000 元，该公司统计了曾使用过的甲、乙各 50 台设备在一年内的维修次数，得到下面的频数分布表：

维修次数	2	3	4	5	6
甲设备	5	10	30	5	0
乙设备	0	5	15	15	15

以这两种设备分别在 50 台中的维修次数频率代替维修次数发生的概率

(1)设甲、乙两种设备每台购买和一年间维修的花费总额分别为 X、Y，求 X 和 Y 的分布列；

(2)若以数学期望为决策依据，希望设备购买和一年间维修的花费总额尽量低，且威胁次数尽量少，则需要购买哪种设备?请说明理由.

18.(本小题 13 分)已知$x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$为函数$f(x)=x^{a}\ln x$的极值点，

(1)求 a 的值；

(2)设函数$g(x)=\dfrac{kx}{e^{x}}$，若对$\forall x_1\in(0,+\infty)$，$\exists x_2\in R$，使得$f(x_1)-g(x_2)\geq 0$，求 k 的取值范围.

19.(本小题 13 分)设椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，离心率为$\dfrac{1}{2}$，过点$F_1$的直线

l 交椭圆 C 于点 A，B(不与左右顶点重合)，连接F_2A,F_2B，已知$\triangle ABF_2$的周长为 8.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)设$\overrightarrow{F_2F_1}=\lambda\overrightarrow{F_2A}+\mu\overrightarrow{F_2B}$，若$\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}=\dfrac{9}{2}$，求直线 l 的方程.

20.(本小题 13 分)设集合 A 的元素均为实数，若对任意 $a\in A$ 存在 $b\in B,c\in C$，使得 $b+c=a$ 且 $b-c=1$,则称元素个数最少的 B 和 C 为 A 的"孪生集";称 A 的"孪生集"的"孪生集"为 A 的"2 级孪生集";称 A 的"2 级孪生集"的"孪生集"为 A 的"3 级孪生集"，依此类推……

(1)设 $A=\{1,3,5\}$，直接写出集合 A 的"孪生集"；

(2)设元素个数为 n 的集合 A 的"孪生集"分别为 B 和 C,若使集合 $C_{B\cup C}(B\cap C)$ 中元素个数最少且所有元素之和为 2，证明：A 中所有元素之和为 $2n$;

(3)若 $A=\{a_k\,|\,a_k=a_1+2(k-1),1\le k\le n,k\in N^*\}$ 请直接写出 A 的"n 级孪生集"的个数，及 A 所有"n 级孪生集"的并集 Ω 的元素个数.