2023北京北师大附中高一（下）期中

数　学

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.（4分）如果θ是第三象限的角，那么（　　）

A．$\sin\theta>0$　　B．$\cos\theta>0$　　C．$\tan\theta>0$　　D．以上都不对

2.（4分）下列函数是奇函数的是（　　）

A．$f(x)=1+\cos x$　　B．$f(x)=x+\sin x$

C．$f(x)=x+\cos x$　　D．$f(x)=1+\sin x$

3.（4分）已知角α的终边上一点$P(m,\ m+1)$，且$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，则m等于（　　）

A．$-\frac{3}{7}$　　B．3　　C．-3　　D．$\frac{3}{7}$

4.（4分）为了得到函数$y=\sin(3x-\frac{\pi}{4})$的图象，可以将函数$y=\sin 3x$的图象（　　）

A．向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度

B．向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度

C．向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度

D．向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度

5.（4分）下列函数中，周期为π且在区间$[\frac{\pi}{2},\ \pi]$上单调递增的是（　　）

A．$f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{2})$　　B．$f(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{2})$

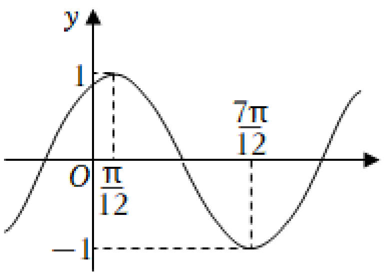
C．$f(x)=\tan 2x$　　D．$f(x)=2\sin\frac{1}{2}x$

6.（4分）"$\sin\alpha=\cos\alpha$"是"$\cos 2\alpha=0$"的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

7.（4分）已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\phi)(A>0,\ \omega>0,\ |\phi|<\frac{\pi}{2})$的部分图象如图所示，则下列说法错误的是（　　）



A．ω＝2

B．$\phi=\frac{\pi}{3}$

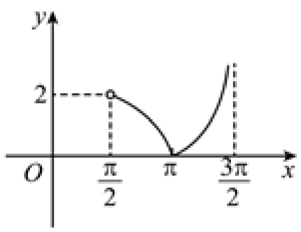
C．f（x）的图象关于直线$x=\frac{13\pi}{12}$对称

D．f（x）的图象向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度后的图象关于原点对称

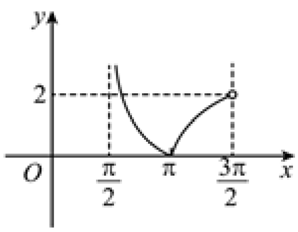
8．（4 分）已知点 P 是边长为 1 的菱形 $ABCD$ 内一动点（包括边界），$\angle DAB=60°$，则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$的最大值为（　　）

A．$\sqrt{3}$　　B．$\frac{3}{2}$　　C．1　　D．$\frac{3}{4}$

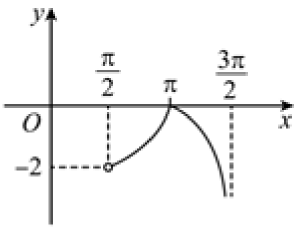
9．（4 分）函数 f（x）＝﹣tan$x$﹣sin$x$+|tan$x$﹣sin$x$|在区间（$\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$）内的图象是（　　）



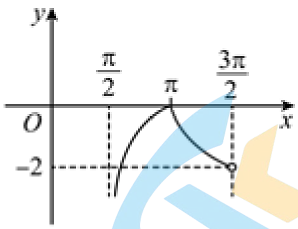
A．



B．



C．



D．

10．（4 分）刘辉（约公元 225﹣295 年），魏晋期间的数学家．他在割圆术中提出的“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣．”“割圆术”在人类历史上首次将极限和无穷小分割引入数学证明，成为人类文明史中不朽的篇章．割圆术的核心思想是用圆内接正多边形的面积去无限逼近圆面积．运用割圆术的思想得到 sin6° 的近似值为（　　）

A．$\frac{\pi}{180}$　　B．$\frac{\pi}{90}$　　C．$\frac{\pi}{60}$　　D．$\frac{\pi}{30}$

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

11．（5 分）已知向量$\vec{a}=(-1,\ 2)$，$\vec{b}=(m,\ 1)$，若向量$\vec{b}$与$\vec{a}$垂直，则 m＝______．

12．（5 分）在△ABC 中，若 sin$A$cos$B$＝1 一 cos$A$sin$B$，则这个三角形是_______三角形．

13.（5 分）计算：cos70° cos80° - sin70° sin80° =____________，$\dfrac{4\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$=______.

14.（5 分）已知单位向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，则 $|\vec{a}+\vec{b}|$=__________；则 $2\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}+\vec{b}$ 的夹角的余弦值为____________.

15.（5 分）对任意实数 *a*，*b*，定义运算 $\max\{a,b\}=\begin{cases}a, & a\geqslant b\\ b, & a<b\end{cases}$，则关于函数 *f*（*x*）=*max*{sin*x*，cos*x*}的说法正确的是______.（填序号）

①函数 *f*（*x*）的值域为 $[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1]$；

②当 $2k\pi<x<\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\ (k\in Z)$ 时，*f*（*x*）<0；

③π 是函数 *f*（*x*）的一个周期；

④函数 *f*（*x*）图像的对称轴为 $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in Z)$.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.（13 分）已知 $f(x)=2\sin(2\omega x-\dfrac{\pi}{6})(\omega>0)$ 的最小正周期为 π.

（1）求 ω 的值，并求 *f*（*x*）的单调递增区间；

（2）求 *f*（*x*）在区间 $[0,\dfrac{5}{12}\pi]$ 上的最大值.

17.（13 分）在△*ABC* 中，角 *A*，*B*，*C* 的对边分别为 *a*，*b*，*c*，且 $b\sin C=\sqrt{3}$，$\angle B=\dfrac{\pi}{4}$.

（1）求边 *c* 的值；

（2）若△*ABC* 的面积为 $\dfrac{9}{2}$，求边 *b* 的值.

18.（14 分）已知向量 $\vec{a}=(\cos x,\sin x)$，$\vec{b}=(2\cos x,2\sqrt{3}\cos x)$.

（1）若 *x*∈[0，π]，当 $\vec{a}\parallel\vec{b}$ 时，求 *x* 的值；

（2）若 $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}$.

（ⅰ）求 *f*（*x*）的最小正周期；

（ⅱ）当 *x*∈[0，*m*]时，*f*（*x*）可以取得 2 次最大值，求 *m* 的取值范围.

19.（15 分）在△*ABC* 中，角 *A*，*B*，*C* 的对边分别为 *a*，*b*，*c*，且 $\dfrac{c-b}{a}=\dfrac{\sin A+\sin B}{\sin C+\sin B}$.

（1）求角 *C* 的大小；

（2）*CD* 为△*ACB* 的内角平分线，且 *CD* 与直线 *AB* 交于点 *D*.

（ⅰ）求证：$\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{AC}{BC}$；

（ii）若 $a=2$，$c=\sqrt{19}$，求 CD 的长．

20．（15 分）我们知道，声音由物体的振动产生，以波的形式在一定的介质（如固体、液体、气体）中进行传播．在物理学中，声波在单位时间内作用在与其传递方向垂直的单位面积上的能量称为声强 I（W/cm^2）．但在实际生活中，常用声音的声强级 D（分贝 dB）来度量．为了描述声强级 D（dB）与声强 I（W/cm^2）之间的函数关系，经过多次测定，得到如下数据：

组别	1	2	3	4	5	6	7
声强 I（W/cm^2）	10^{-11}	2×10^{-11}	3×10^{-11}	4×10^{-11}	10^{-10}	①	9×10^{-7}
声强级 D（dB）	10	13.01	14.77	16.02	20	40	②

现有以下三种函数模型供选择：$D=kI+b$，$D=a\cdot I^2+c$，$D=m\lg I+n$．

（1）试根据第 1－5 组的数据选出你认为符合实际的函数模型，简单叙述理由，并根据第 1 组和第 5 组数据求出相应的解析式；

（2）根据（1）中所求解析式，结合表中已知数据，求出表格中①、②数据的值；

（3）已知烟花的噪声分贝一般在（90，100），其声强为 I_1；鞭炮的噪声分贝一般在（100，110），其声强为 I_2；飞机起飞时发动机的噪声分贝一般在（135，145），其声强为 I_3，试判断 I_1I_3 与 I_2^2 的大小关系，并说明理由．

21．（15 分）设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[1,a^2]$，其中常数 $a>1$．若存在常数 $T>0$，使得对任意的 $x\in[1,a]$，都有 $f(ax)=T\cdot f(x)$，则称函数 $f(x)$ 具有性质 P．

（Ⅰ）当 $x\in[1,100]$ 时，判断函数 $y=x^2$ 和 $y=\cos\pi x$ 是否具有性质 P？（结论不要求证明）

（Ⅱ）若 $a=3$，函数 $f(x)$ 具有性质 P，且当 $x\in[1,3]$ 时，$f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}x\right)$，求不等式 $f(x)>\sqrt{3}$ 的解集；

（Ⅲ）已知函数 $f(x)$ 具有性质 P，$f(1)=0$，且 $f(x)$ 的图像是轴对称图形．若 $f(x)$ 在 $[1,a]$ 上有最大值 A（$A>0$），且存在 $x_0\in[a+\dfrac{1}{a}-1,a]$ 使得 $f(x_0)=A$，求证：其对应的 $T=1$．

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【解答】解：如果 θ 是第三象限的角，则 $\sin\theta<0$，$\cos\theta<0$，$\tan\theta>0$，

故选：C.

2.【解答】解：显然各项函数的定义域均为 R，$f(-x)=1+\cos(-x)=1+\cos x=f(x)$，偶函数，$A$ 不符合；

$f(-x)=-x+\sin(-x)=-x-\sin x=-(x+\sin x)=-f(x)$，奇函数，$B$ 符合；

$f(-x)=-x+\cos(-x)=-x+\cos x\neq\pm f(x)$，非奇非偶函数，$C$ 不符合；

$f(-x)=1+\sin(-x)=1-\sin x\neq\pm f(x)$，非奇非偶函数，$D$ 不符合.

故选：B.

3.【解答】解：由三角函数的定义可得：$\cos\alpha=\dfrac{m}{\sqrt{m^2+(m+1)^2}}=\dfrac{3}{5}\Rightarrow m=3$.

故选：B.

4.【解答】解：将函数 $y=\sin 3x$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度，可得 $y=\sin 3\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)=\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图象，

故选：D.

5.【解答】解：由 $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right]$，各项函数单调性如下：

由 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$，$2x\in[\pi,\ 2\pi]$，故 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right]$上递增，且周期为 π；

由 $f(x)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin 2x$，$2x\in[\pi,\ 2\pi]$，故 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right]$上不单调；

由 $f(x)=\tan 2x$ 定义域为 $\left\{x\,|\,x\neq\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right\}$，$k\in Z$，而 $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right]$不满足定义域；

由 $f(x)=2\sin\dfrac{1}{2}x$，$\dfrac{x}{2}\in\left[\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$，则 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right]$上递增，且周期为 4π.

故选：A.

6.【解答】解：由 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$，

∴“$\sin\alpha=\cos\alpha$”是“$\cos 2\alpha=0$”的充分不必要条件.

故选：A.

7.【解答】解：根据函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\phi)$ $(A>0,\ \omega>0,\ |\phi|<\dfrac{\pi}{2})$的部分图象，可得 $A=1$，$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{7\pi}{12}-\dfrac{\pi}{12}$，∴$\omega=2$，故 A 正确；

再结合五点法作图，可得 $2\times\dfrac{\pi}{12}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，∴$\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，$f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，故 B 正确；

令 $x=\frac{13\pi}{12}$，求得 $f(x)=\sin\frac{5\pi}{2}=1$，为最大值，故 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{13\pi}{12}$ 对称，故 C 正确；

把 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后，得到 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 的图，故所得图象不关于原点对称，

故 D 错误，

故选：D.

8.【解答】解：以菱形 $ABCD$ 的对角线 BD 所在直线为 x 轴，中点为坐标原点，建立直角坐标系，可得 A $(0,\ \frac{\sqrt{3}}{2})$，$B(-\frac{1}{2},\ 0)$，$C(0,\ -\frac{\sqrt{3}}{2})$，$D(\frac{1}{2},\ 0)$，

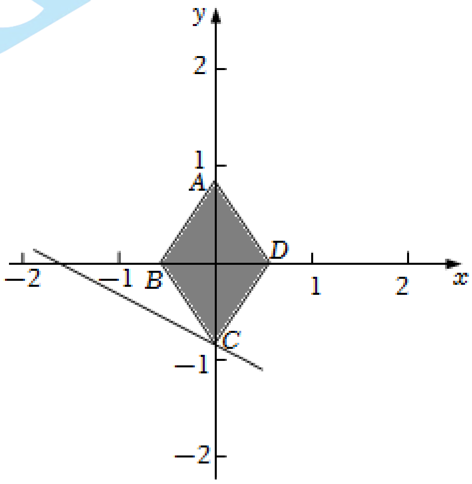
则 $\overrightarrow{AB}=(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2})$，设 $P(x,y)$，$\overrightarrow{AP}=(x,\ y-\frac{\sqrt{3}}{2})$，

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{3}{4}$，

作出直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$，平移，经过点 C 时，$-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y$ 取得最大值 $\frac{3}{4}$，

则 $=-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y$ 的最大值为 $\frac{3}{2}$.

故选：B.



9.【解答】解：当 $x\in(\frac{\pi}{2},\ \pi)$ 时，$\tan x<0<\sin x$，

∴$f(x)=-\tan x-\sin x+|\tan x-\sin x|=-2\tan x$，

当 $x\in(\pi,\ \frac{3\pi}{2})$ 时，$\tan x>0>\sin x$，

∴$f(x)=-\tan x-\sin x+|\tan x-\sin x|=-2\sin x$，

由选项可判定 B 选项图象正确.

故选：B.

10.【解答】解：将圆平分 60 份，每份即近似一个小三角形，该三角形面积与扇形面积近似，

故 $\frac{1}{2}\sin 6^\circ\times r^2\approx\frac{6}{360}\pi r^2\Rightarrow\sin 6^\circ\approx\frac{\pi}{30}$.

故选：D．

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分．

11．【解答】解：向量$\vec{a}=(-1,\ 2)$，$\vec{b}=(m,\ 1)$，

∵向量$\vec{b}$与$\vec{a}$垂直，∴$\vec{a}\cdot\vec{b}=-m+2=0$．

解得$m=2$．

故答案为：2．

12．【解答】解：∵$\sin A\cos B=1-\cos A\sin B$，∴$\sin A\cos B+\cos A\sin B=1$，即$\sin(A+B)=\sin C=1$，

∴$C=\dfrac{\pi}{2}$．

∴△ABC是直角三角形．

故答案为：直角．

13．【解答】解：由$\cos 70°\cos 80°-\sin 70°\sin 80°=\cos(70°+80°)=\cos 150°=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

由$\dfrac{4\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}=2\tan\dfrac{\pi}{4}=2$．

故答案为：$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，2．

14．【解答】解：由$|\vec{a}+\vec{b}|^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=1+2\cos\dfrac{\pi}{3}+1=3$，则$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}$，

而$|2\vec{a}+\vec{b}|^2=4\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=4+4\cos\dfrac{\pi}{3}+1=7$，则$|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{7}$，

由$\cos\langle 2\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}+\vec{b}\rangle=\dfrac{(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})}{|2\vec{a}+\vec{b}||\vec{a}+\vec{b}|}=\dfrac{2\vec{a}^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}{|2\vec{a}+\vec{b}||\vec{a}+\vec{b}|}=\dfrac{2+\frac{3}{2}+1}{\sqrt{7}\times\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$．

故答案为：$\sqrt{3}$；$\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$．

15．【解答】解：由题意得，

$f(x)=\begin{cases}\sin x, & \sin x\geqslant\cos x\\ \cos x, & \sin x<\cos x\end{cases}$，

作出函数$f(x)$在$[-2\pi,\ 4\pi]$的图像，

函数$f(x)$为周期函数，最小正周期为2π，$[-\dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4}]$为其中一个周期，在$[-\dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4}]$内，

①当$x=0$时，函数$f(x)$有最大值$\cos 0=1$，

当$x=\dfrac{5\pi}{4}$时，函数$f(x)$有最小值$\sin\dfrac{5\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

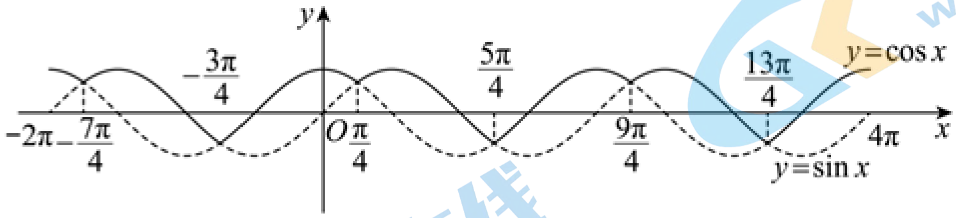
所以函数$f(x)$的值域为$[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 1]$，①正确；

②当 $0<x<\pi$ 时，$f(x)>0$，所以当 $2k\pi<x<\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in Z)$时，$f(x)<0$，②错误；

③函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π，所以 π 是函数 $f(x)$ 的一个周期，③错误；

④函数 $f(x)$ 关于 $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ $(k\in Z)$和 $x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$ $(k\in Z)$对称，

所以函数 $f(x)$ 图像的对称轴为 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ $(k\in Z)$，④正确.



故答案为：①④.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.【解答】解：（1）由 $f(x)=2\sin(2\omega x-\frac{\pi}{6})$的最小正周期为 π，得$\frac{2\pi}{|2\omega|}=\pi$，

$\because \omega>0$，

$\therefore \omega=1$，$f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 得 $-\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+k\pi$，

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{6}+k\pi,\ \frac{\pi}{3}+k\pi]$ $(k\in Z)$.

（2）因为 $x\in[0,\ \frac{5\pi}{12}]$，

所以 $2x-\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{6},\ \frac{2\pi}{3}]$，

所以当 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{3}$时，$f(x)$ 取得最大值 2.

17.【解答】解：（1）由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow b\sin C=c\sin B$，

所以 $c\sin B=c\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{3}\Rightarrow c=\sqrt{6}$；

（2）由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\cdot\sin B=\frac{9}{2}\Rightarrow a=3\sqrt{3}$，

结合余弦定理可得：$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B=15\Rightarrow b=\sqrt{15}$.

18.【解答】解：（1）由题设 $2\sqrt{3}\cos^2x=2\sin x\cos x$，则$\sqrt{3}(\cos 2x+1)=\sin 2x$，

所以 $\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}$，故 $\sin(2x-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

由 $2x-\frac{\pi}{3}\in[-\frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3}]$，故 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$或 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$，则 $x=\frac{\pi}{3}$或 $x=\frac{\pi}{2}$.

（2）由 $f(x)=2\cos^2x+2\sqrt{3}\sin x\cos x=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x+1=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+1$，

（*i*）$f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$；

（*ii*）由题设 $x\in[0，m]$可得 $2x+\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{6}，2m+\frac{\pi}{6}]$，

因为 $f(x)$ 可以取得 2 次最大值，

所以$\frac{5\pi}{2}\leqslant 2m+\frac{\pi}{6}$，

故 $m\geqslant\frac{7\pi}{6}$，

故 m 的取值范围为$\{m|m\geqslant\frac{7\pi}{6}\}$.

19.【解答】解：（1）由题设$\frac{c-b}{a}=\frac{a+b}{c+b}$，则 $c^2-b^2=a^2+ab$，故 $a^2+b^2-c^2=-ab$，

所以$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{2}$，又 $C\in(0，\pi)$，故$C=\frac{2\pi}{3}$.

（2）（*i*）证明：由题设$\angle ACD=\angle BCD$，若 AB 上的高为 h，

又$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot CD\sin\angle ACD=\frac{1}{2}AD\cdot h$，$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot CD\sin\angle BCD=\frac{1}{2}BD\cdot h$，

所以$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{\frac{1}{2}AC\cdot CD\sin\angle ACD}{\frac{1}{2}BC\cdot CD\sin\angle BCD}=\frac{\frac{1}{2}AD\cdot h}{\frac{1}{2}BD\cdot h}$，即$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}$.

（*ii*）由$\frac{c}{\sin\angle ACB}=\frac{a}{\sin A}$，则$\sin A=\frac{a\sin\angle ACB}{c}=\sqrt{\frac{3}{19}}$，又 A 为锐角，故$\cos A=\frac{4}{\sqrt{19}}$，

若$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}=k$，则 $AC=2k$，且 $AD=kBD$，$AD+BD=\sqrt{19}$，

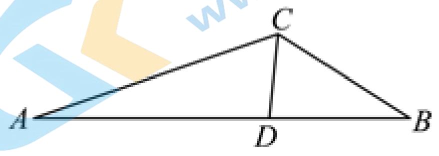
由余弦定理知：$\cos A=\frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2AC\cdot AB}=\frac{4k^2+15}{4\sqrt{19}k}=\frac{4}{\sqrt{19}}$，

所以 $4k^2-16k+15=(2k-3)(2k-5)=0$，可得$k=\frac{3}{2}$或$k=\frac{5}{2}$，

当$k=\frac{3}{2}$，则$AC=3<\sqrt{19}$，$AD=\frac{3\sqrt{19}}{5}$，此时$\frac{AD}{\sin\angle ACD}=\frac{CD}{\sin A}$，则$CD=\frac{6}{5}$；

当$k=\frac{5}{2}$，则$AC=5>\sqrt{19}$，即$\angle B>\angle ACB=\frac{2\pi}{3}$，不合题设；

综上，$CD=\frac{6}{5}$.



20.【解答】解：（1）由于 I 的量级为 10^{-11} 量级，而 D 的量级为 10^{1} 量级，

所以 D 与 I 的关系更接近对数函数，

故符合实际的函数模型为 $D=mlgI+n$，

由表中数据可得，$\begin{cases}10=m\lg(10^{-11})+n\\20=m\lg(10^{-10})+n\end{cases}$，解得 $m=10$，$n=120$，

故解析式为 $D=10lgI+120$．

（2）令 $D=10lgI+120=40$，解得 $I=10^{-8}$，

故①处的数据的值为 10^{-8}，

当 $I=9\times10^{-7}$ 时，$D=10lg(9\times10^{-7})+120=10lg9-70+120\approx59.54$，

故②处的数据的值为 59.54．

（3）由题意可知，$10lgI_1+120\in(90,100)$，解得 $I_1\in(10^{-3},10^{-2})$，

$10lgI_2+120\in(100,110)$，解得 $I_2\in(10^{-2},10^{-1})$，

$10lgI_3+120\in(135,145)$，解得 $I_3\in(10^{1.5},10^{2.5})$，

则 $I_1I_3\in(10^{-1.5},10^{0.5})$，$I_2^2\in(10^{-4},10^{-2})$，

故 $I_1I_3>I_2^2$．

21.【解答】解：（Ⅰ）函数 $y=x^2$ 具有性质 P，函数 $y=\cos\pi x$ 不具有性质 P；

（Ⅱ）若 $a=3$，函数 $f(x)$ 具有性质 P，则存在常数 $T>0$，对任意 $x\in[1,3]$，使得 $f(3x)=T\cdot f(x)$，

又当 $x\in[1,3]$时，$f(x)=\sin(\frac{\pi}{6}x)$，

故当 $x=1$ 时，有 $f(3)=T\cdot f(1)$，即 $\sin(\frac{\pi}{6}\times3)=T\cdot\sin(\frac{\pi}{6}\times1)$，所以 $T=2$．

所以当 $x\in[1,3]$时，$3x\in[3,9]$，$f(3x)=2\sin(\frac{\pi}{6}x)$，

即 $x\in[3,9]$时，$f(x)=2\sin(\frac{\pi}{18}x)$，

故当 $x\in[1,3]$时，不等式 $f(x)>\sqrt{3}$ 为 $\sin\frac{\pi}{6}x>\sqrt{3}$，无解；

当 $x\in[3,9]$时，不等式 $f(x)>\sqrt{3}$ 为 $2\sin(\frac{\pi}{18}x)>\sqrt{3}$，又 $\frac{\pi}{18}x\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$，

故不等式解得：$6<x\leqslant9$，

即解集为：$(6,9]$．

（Ⅲ）证明：已知函数 $f(x)$ 具有性质 P，

则存在常数 $T>0$，使得 $x\in[1,a]$，都有 $f(ax)=T\cdot f(x)$，

所以 $f(a^2)=Tf(a)=T^2f(1)=0$，

所以函数 $f(x)$ 的图像端点为 $(1,0)$ 和 $(a^2,0)$，

由 $f(x)$ 的图像是轴对称图形，得其对称轴为直线：$x=\frac{a^2+1}{2}$，

①若 $0<T<1$，因为 $x\in[1,a]$时，$f(x)\leqslant A$，

所以对任意 $x\in[a,a^2]$，有 $f(x)=Tf(\frac{x}{a})\leqslant TA<A$，

由基本不等式得，$a>1$ 有$\frac{a^2+1}{2}>1$，

所以对任意 $x\in[\frac{a^2+1}{2},a^2]$，有 $f(x)<A$，

根据图像的对称性，得对任意 $x\in[1,a]$，有 $f(x)<A$，

这样与存在 $f(x_0)=A$ 矛盾.

②若 $T>1$，由 $x_0\in[a+\frac{1}{a}-1,a]$，得 $f(ax_0)=Tf(x_0)=TA>A$，

又 $ax_0\geqslant a^2+1-a$，由图像的对称性知，$f(ax_0)=f(a^2+1-ax_0)$，

且 $a^2+1-ax_0\in[1,a]$，

所以 $f(ax_0)=f(a^2+1-ax_0)=TA>A$.

这与 $f(x)$ 在$[1,a]$上有最大值 A（$A>0$）矛盾.

综上：$T=1$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ''精益求精、专业严谨'' 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。