四川省大数据精准教学联盟2018级高三第三次统一监测

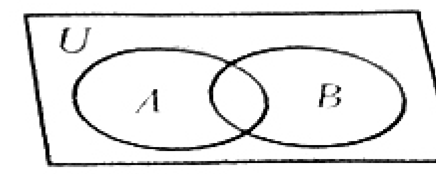
理科数学

注意事项：

1. 答题前，考生务必在答题卡上将自己的姓名、班级、准考证号用0.5毫米黑色签字笔填写清楚，考生考试条码由监考老师粘贴在答题卡上的“条码粘贴处”。
2. 选择题使用2B铅笔填涂在答题卡上对应题目标号的位置上，如需改动，用橡皮擦擦干净后再填涂其它答案；非选择题用0.5毫米黑色签字笔在答题卡的对应区域内作答，超出答题区域答题的答案无效；在草稿纸上、试卷上答题无效。
3. 考试结束后由监考老师将答题卡收回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，集合$A=\{1,3,7,9\}$，$B=\{2,3,5,6\}$，则图中阴影部分表示的集合为



A. $\{2,4,5,6,8\}$　　B. $\{1,4,7,8,9\}$

C. $\{4,8\}$　　D. $\{3\}$

2. 若复数z满足$(1-i)z=|-1+\sqrt{3}i|$，其中i为虚数单位，则$z=$

A. $1+i$　　B. $-1+i$

C. $2+2i$　　D. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

3. 已知命题$p:\forall x\geqslant 1$，$\ln x\geqslant 0$，则$\neg p$为

A. $\exists x<1$，$\ln x<0$　　B. $\exists x\geqslant 1$，$\ln x<0$

C. $\exists x\geqslant 1$，$\ln x\geqslant 0$　　D. $\forall x<1$，$\ln x<0$

4. 以点$(1,-1)$为圆心，且与直线$x-y+2=0$相切的圆的方程为

A. $(x+1)^2+(y-1)^2=2$　　B. $(x-1)^2+(y+1)^2=2$

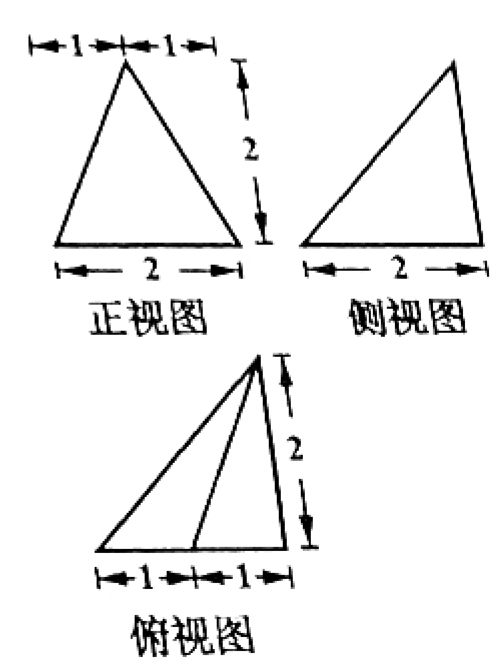
C. $(x+1)^2+(y-1)^2=8$　　D. $(x-1)^2+(y+1)^2=8$

5. 单位时间内通过道路上指定断面的车辆数被称为“道路容量”，与道路设施、交通服务、环境、气候等诸多条件相关．假设某条道路一小时通过的车辆数N满足关系$N=\dfrac{1000v}{0.7v+0.3v^2+d_0}$，其中$d_0$为安全距离，$v$为车速（m/s）．当安全距离$d_0$取30 m时，该道路一小时“道路容量”的最大值约为

A. 135　　B. 149

C. 165　　D. 195

6. 如图是一个空间几何体的三视图，则该几何体的体积为



A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{4}{3}$

C. 2　　D. $\frac{8}{3}$

7. 新冠防疫期间，某街道需要大量志愿者协助开展防疫工作．某学校有 3 名男教师、3 名女教师申请成为志愿者，若安排这 6 名志愿者到 3 个社区协助防疫工作，每个社区男女教师各 1 名，则不同的安排方式种数是

A．18　　　　B．36

C．48　　　　D．72

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_n^2-a_{n-1}^2=2a_{n-1}+1$（$n\geq 2$），则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=$

A．n　　　　B．$\sqrt{n}$

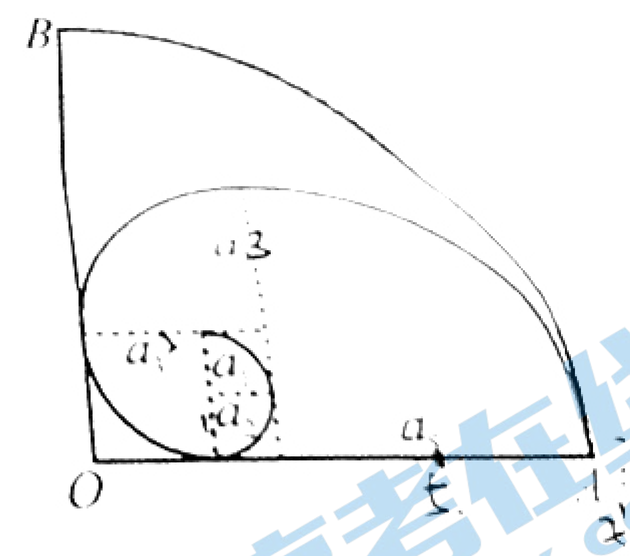
C．$\frac{3}{2}\cdot(-1)^{n-1}-\frac{1}{2}$　　　　D．n 或 $\frac{3}{2}\cdot(-1)^{n}-\frac{1}{2}$

9. 已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 的右焦点为 F，左顶点为 A，过点 F 的直线 l 垂直于 E 的一条渐近线，垂足为 M，直线 l 与 y 轴交于点 N，且 $AN\parallel OM$，则 E 的离心率为

A．$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$　　　　B．$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$　　　　C．$\sqrt{3}+1$　　　　D．$\sqrt{5}+1$

$a_3=a_2+a_1=2$　$a_4=a_3+a_2=3$　$a_5=a_4+a_3=5$

10. 满足 $a_1=a_2=1$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$（$n\geq 3$）的数列 $\{a_n\}$ 称为斐波那契数列，又称黄金分割数列．如图，依次以斐波那契数列 $\{a_n\}$ 各项为边长作正方形，在每个正方形中取半径为该正方形边长、圆心角为 90° 的圆弧，依次连接圆弧端点所成的曲线被称为斐波那契螺旋线（也称"黄金螺旋"）．右图圆心角为 90° 的扇形 OAB 中的曲线是斐波那契螺旋线的一段，若在该扇形内任取一点，则该点在图中阴影部分的概率为



A．$\frac{3}{8}$　　　　B．$\frac{1}{2}$

C．$\frac{5}{8}$　　　　D．$\frac{7}{8}$

11. 已知函数 $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$，则下列结论正确的是

A．函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{5\pi}{6},0)$ 对称

B．函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称

C．函数 $f(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上单调递增

D．函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=1$ 的交点间的最小距离为 $\frac{2\pi}{3}$

12. 函数 $f(x)=-4x+2\ (x<0)$，$g(x)=\frac{x}{\ln x}$．若 $f(x_1)=g(x_2)$，则 x_2-2x_1 的最小值为

A．$1-\frac{1}{2e}$　　　　B．$2\sqrt{e}-1$

C．3　　　　D．$\frac{5}{2}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．已知$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，且向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\frac{2\pi}{3}$，则$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$______．

14．设S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和，且$S_3=1$，$S_6=4$，则$S_{12}=$______．

15．如图，矩形$BDEF$所在平面与正方形$ABCD$所在平面互相垂直，$DB=2DE$，点P在线段EF上．给出下列命题：

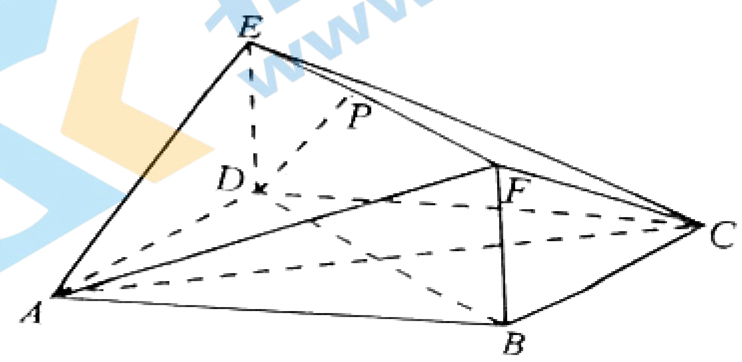
①直线$PD\perp$直线AC；

②直线PD与平面$ABCD$所成角的正弦值的取值范围是$[\frac{\sqrt{5}}{5},1]$；

③存在点P，使得直线$PD\perp$平面ACF；

④存在点P，使得直线PD∥平面ACF．

其中所有真命题的序号是______．



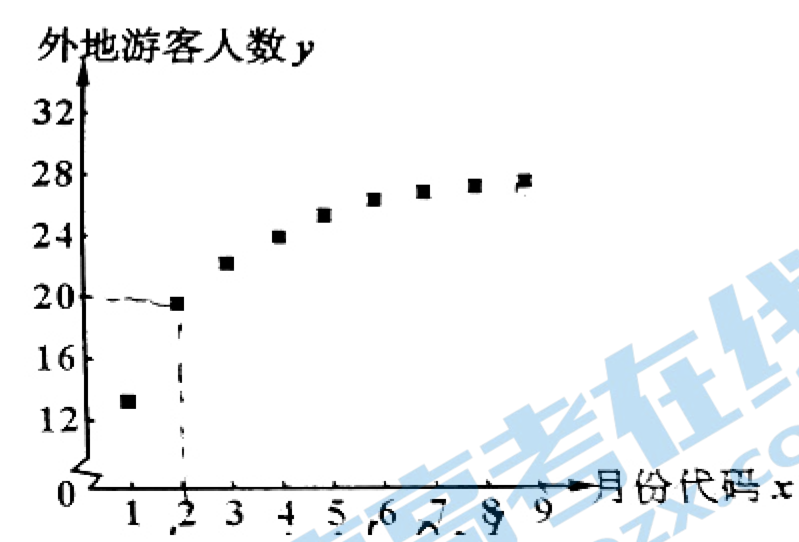
16．设椭圆$C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$的左，右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过$F_2$的直线$l$与$C$交于$A$，$B$两点（点$A$在$x$轴上方），且满足$\overrightarrow{AF_2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{F_2B}$，则直线$l$的斜率为______．

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共60分。

17．（12分）

2021年是“十四五”开局之年，是实施乡村振兴的重要一年．某县为振兴乡村经济，大力发展乡村生态旅游，激发乡村发展活力．该县为了解乡村生态旅游发展情况，现对全县乡村生态旅游进行调研，统计了近9个月来每月到该县乡村生态旅游的外地游客人数y（单位：万人），并绘制成右图所示散点图，其中月份代码1～9分别对应2020年7月至2021年3月．



（1）用模型①$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$，②$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}\sqrt{x}$分别拟合$y$与$x$的关系，根据散点图判断，哪个模型的拟合效果最好？（不必说理由）

（2）根据（1）中选择的模型，求y关于x的回归方程（系数精确到0.01）；

（3）据以往数据统计，每位外地游客可为该县带来100元左右的旅游收入，根据（2）中的回归模型，预测2021年10月，外地游客可为该县带来的生态旅游收入为多少万元？

参考数据：　下表中$t_i=\sqrt{x_i}$，$\bar{t}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}t_i$．

$\bar{y}$	$\bar{t}$	$\sum_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^{9}(t_i-\bar{t})^2$	$\sum_{i=1}^{9}(y_i-\bar{y})(x_i-\bar{x})$	$\sum_{i=1}^{9}(y_i-\bar{y})(t_i-\bar{t})$
23	2.15	60	3.58	84.5	21.31

参考公式：对于一组数据(t_1,y_1)，(t_2,y_2)，…，(t_n,y_n)，回归方程$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}t$中的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}$．

18．（12 分）

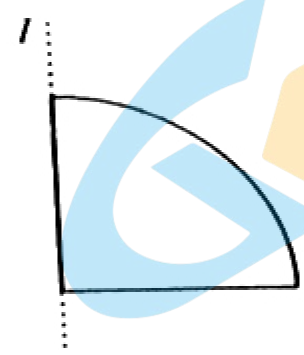
在△ABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $(2b+\sqrt{3}c)\cos A+\sqrt{3}a\cos C=0$．

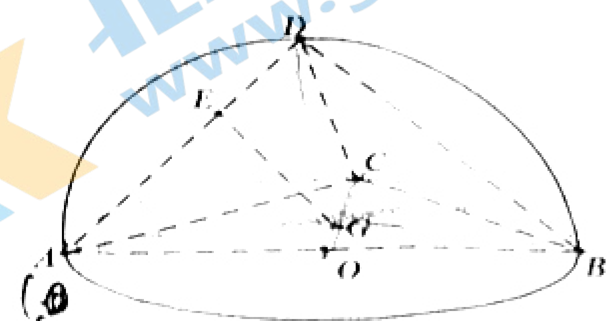
（1）求角 A 的大小；

（2）若 $a=2$，求 $b+\sqrt{3}c$ 的取值范围．

19．（12 分）

如图，由半径为 2 的四分之一圆面绕其半径所在直线 l 旋转一周，形成的几何体底面圆的圆心为 O，D 是几何体侧面上不在⊙O 上的动点，AB 是⊙O 的直径，C 为⊙O 上不同于 A，B 的动点，G 为△ABC 的重心，$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{ED}$．





(0，-2，0)

（1）证明：EG∥平面 BCD；

（2）当三棱锥 $D-ABC$ 体积最大时，求直线 CD 与面 BGE 所成角的正弦值．

20．（12 分）

已知点 $F(1,0)$，直线 l：$x=-2$，P 为 y 轴右侧或 y 轴上动点，且点 P 到 l 的距离比线段 PF 的长度大 1，记点 P 的轨迹为 E．

（1）求曲线 E 的方程；

（2）已知直线 l_1：$x=1$ 交曲线 E 于 A，B 两点（点 A 在点 B 的上方），C，D 为曲线 E 上两个动点，且 $\angle CAB=\angle DAB$，求证：直线 CD 的斜率为定值．

21．（12 分）

已知函数 $f(x)=e^x-a\ln x-a\ln a$．

（1）当 $a=e$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若 $a\in\mathbf{Z}$ 且 $f(x)>a$，求 a 的值．

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．[选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的方程为 $x^2+(y-2)^2=4$．以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，设 A 是 C_1 上的动点，先将点 A 绕点 O 顺时针旋转 $\frac{\pi}{3}$ 得到点 B，再保持极角不变，极径变为原来的 2 倍得到点 C，设点 C 的轨迹方程为曲线 C_2．

（1）求曲线 C_1，C_2 的极坐标方程；

（2）设 M 是曲线 C_1，C_2 的公共点，P，Q 分别是射线 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 与曲线 C_1，C_2 的公共点，且 M，P，Q 都异于点 O，求△MPQ 的面积．

23．[选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=|1-2x|+|x-2|$．

（1）解不等式 $f(x)\leqslant 2x$；

（2）若正实数 a，b 满足 $a+b=2$，试比较 $f(\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2})$ 与 $f(1)$ 的大小．

四川省大数据精准教学联盟2018级高三第三次统一监测

理科数学命题意图及参考答案

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。

1. 答案C. 图中阴影部分表示的集合为$\complement_U(A\cup B)$，易得$\complement_U(A\cup B)=\{4,8\}$.

命题意图：本小题主要考查两个集合的并集，补集的概念及其运算，文氏图表示集合等基础知识；考查运算求解能力，数形结合等数学思想。

2. 答案A. 由$z=\dfrac{|-1+\sqrt{3}i|}{1-i}=\dfrac{\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}\cdot(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)}=\dfrac{2\cdot(1+i)}{2}=1+i$.

命题意图：本小题主要考查复数的除法运算和复数的模的概念等基础知识；考查运算求解能力。

3. 答案B. 根据命题的否定形式知，选项B正确.

命题意图：本小题主要考查命题的否定形式，全称量词与存在量词等基础知识；考查逻辑推理能力。

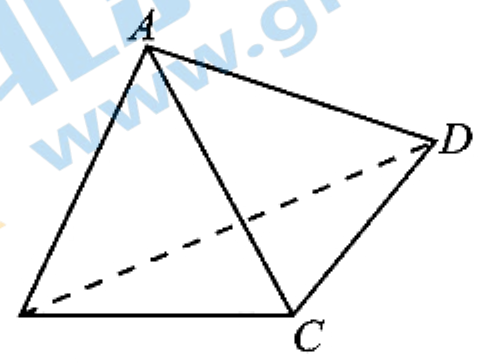
4. 答案D. 因直线与圆相切，所以圆的半径等于点$(1,-1)$到直线$x-y+2=0$的距离，即$R=d=\dfrac{|1-(-1)+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$，则所求圆的方程为$(x-1)^2+(y+1)^2=8$.

命题意图：本小题主要考查直线与圆相切的性质、圆的标准方程等基础知识；考查运算求解能力；考查化归与转化、数形结合等数学思想。

5. 答案B. 由题，$N=\dfrac{1000v}{0.7v+0.3v^2+d_0}=\dfrac{1000}{0.7+0.3v+\dfrac{30}{v}}\leqslant\dfrac{1000}{0.7+2\sqrt{0.3\times 30}}\approx 149$.

命题意图：本题主要考查函数、不等式等基础知识；考查抽象概括、运算求解等数学能力；考查化归与转化等数学思想和应用意识。

6. 答案B. 该几何体的直观图为如图所示的三棱锥，底面是等腰直角三角形，高为2，则体积$V=\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{1}{2}\times 2\times 2)\times 2=\dfrac{4}{3}$.



命题意图：本小题主要考查多面体三视图、直观图等基础知识；考查空间想象、运算求解能力；考查数形结合等数学思想。

7. 答案B. 先安排男教师、再安排女教师，各有A_3^3中安排方式，故不同的安排方式共有$A_3^3\cdot A_3^3=36$种.

命题意图：本小题主要考查分类加法原理和分步乘法原理等基础知识，考查化归与转化思想；考查推理论证等能力。

8. 答案D. 由已知，得$a_n^2=(a_{n-1}+1)^2$，则$n\geqslant 2$时，$a_n=\pm(a_{n-1}+1)$.若$a_n=a_{n-1}+1$，则$\{a_n\}$是以1为首项，1为公差的等差数列，此时$a_n=n$. 若$a_n=-(a_{n-1}+1)$，即$a_n+\dfrac{1}{2}=-(a_{n-1}+\dfrac{1}{2})$，则$\{a_n+\dfrac{1}{2}\}$是以$\dfrac{3}{2}$为首项，$-1$为公比的等比数列，则$a_n=\dfrac{3}{2}\cdot(-1)^{n-1}-\dfrac{1}{2}$.

命题意图：本小题主要考查等差数列、等比数列的通项公式等基础知识；考查运算求解能力、推理论证能力；考查分类讨论、化归与转化等数学思想。

9．答案B．不妨取渐近线l'：$y=\dfrac{b}{a}x$，则直线l的方程为$y=-\dfrac{a}{b}(x-c)$，令$x=0$，得到点N的坐标为$(0,\dfrac{ac}{b})$，由AN // OM，得$k_{AN}=\dfrac{b}{a}$，即有$\dfrac{\frac{ac}{b}}{0+a}=\dfrac{b}{a}$，所以$b^2=ac$，则$c^2-a^2=ac$，解得$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

命题意图：本小题主要考查双曲线的定义、标准方程、离心率等基础知识；考查运算求解、推理论证等数学能力及创新意识；考查数形结合、化归与转化等数学思想。

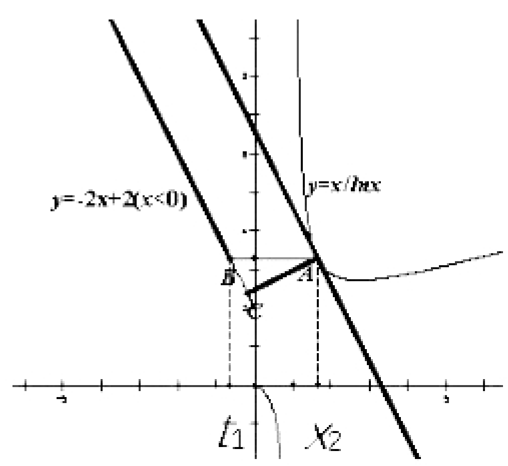
10．答案C．由题，$a_1=a_2=1$，$a_3=2$，$a_4=3$，$a_5=5$，则阴影部分面积为$\dfrac{\pi}{4}(a_1^2+a_2^2+a_3^2+$ $+a_4^2+a_5^2)=\dfrac{\pi}{4}(1^2+1^2+2^2+3^2+5^2)=10\pi$，扇形$OAB$的面积为$\dfrac{8^2\pi}{4}=16\pi$，所以在该扇形内任取一点，则该点在图中阴影部分的概率为$\dfrac{10\pi}{16\pi}=\dfrac{5}{8}$.

命题意图：本小题主要考查几何概型等基础知识；考查运算求解等数学能力；考查化归与转化等数学思想。

11．答案D．因为$f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin(x-\dfrac{\pi}{3})$，结合图象易知A，B，C结论不正确；对于选项D，不妨看第一象限的交点，由$2\sin(x-\dfrac{\pi}{3})=1(x>0)$，得$x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$或$x=2k\pi+\dfrac{7\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，依次得到交点的横坐标$x_1=\dfrac{\pi}{2}$，$x_2=\dfrac{7\pi}{6}$，$x_3=\dfrac{5\pi}{2}$，$x_4=\dfrac{19\pi}{6}$，……，所以交点间的最小距离等于$x_2-x_1=\dfrac{2\pi}{3}$.

命题意图：本小题主要考查三角函数图象及其性质、命题判断等基础知识；考查运算求解能力、逻辑推理能力；考查化归与转化和数形结合等数学思想。

12．答案B．思路1：由题可知$x_1<0<x_2$且$f(x_1)=g(x_2)$，$x_2-2x_1>0$．有$-4x_1+2=\dfrac{x_2}{\ln x_2}$，则$2x_2-4x_1=\dfrac{x_2}{\ln x_2}+2x_2-2$，令$u(x)=\dfrac{x}{\ln x}+2x-2$（$x>0$且$x\neq 1$，$u(x)>0$）．（1）当$0<x<1$时，知$u(x)<0$，不满足条件．（2）当$x>1$时，知$u(x)>0$，由$u'(x)=\dfrac{2\ln^2 x+\ln x-1}{\ln^2 x}$ $=\dfrac{(2\ln x-1)(\ln x+1)}{\ln^2 x}$，令$u'(x)=0$，则$x_1=\sqrt{e}$，$x_2=\dfrac{1}{e}$（舍去），若$1<x<\sqrt{e}$，则$u'(x)<0$；若$x>\sqrt{e}$，则$u'(x)>0$，则$x=\sqrt{e}$时取得极小值$u(\sqrt{e})=4\sqrt{e}-2$，也为最小值，则$u(x)\geqslant u(\sqrt{e})$，即$2x_2-4x_1\geqslant 4\sqrt{e}-2$，所以$x_2-2x_1$的最小值为$2\sqrt{e}-1$．



思路2：令$t_1=2x_1$，则$-2t_1+2=\dfrac{x_2}{\ln x_2}(t_1<0,\ x_2>0)$，作$g(x)=\dfrac{x}{\ln x}$和$u(x)=-2x+2$（$x\leqslant 0$）的图

象．$x_2-2x_1=x_2-t_1=|AB|$，即求 A 到直线 $y=-2x+2$ 的距离最小时 A，B 两点的距离．当 $x>0$ 时，$g'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$，故由 $g'(x)=-2$ 得，$x=\sqrt{e}$（已经舍去另一根），而 $g(\sqrt{e})=2\sqrt{e}$，又由 $-2x+2=2\sqrt{e}$ 得 $x=1-\sqrt{e}$，则 $(2x_2-x_1)_{\min}=|AB|_{\min}=2\sqrt{e}-1$．

命题意图：本小题主要考查函数的性质、不等式等基础知识；考查抽象概括、运算求解等数学能力；考查化归与转化等数学思想。

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．答案 $\sqrt{37}$．由题意，$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=|2\boldsymbol{a}|^2-2|2\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\dfrac{2\pi}{3}+|\boldsymbol{b}|^2=16+12+9=37$，所以 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{37}$．

命题意图：本小题主要考查平面向量的模，两个向量的差的运算等基础知识；考查运算求解能力及应用意识。

14．答案 40．方法 1：设数列 $\{a_n\}$ 公比为 q，显然 $q\neq1$，则 $\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}=1$ 且 $\dfrac{a_1(1-q^6)}{1-q}=4$，故 $1+q^3=4$，则 $q^3=3$，故 $\dfrac{a_1}{1-q}=-\dfrac{1}{2}$，所以 $S_{12}=\dfrac{a_1(1-q^4)}{1-q}=-\dfrac{1}{2}\times(1-3^4)=40$．

方法 2：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由 $S_6-S_3=q^3S_3$，即 $4-1=q^3$，所以 $q^3=3$，又由 $S_{12}-S_6=q^6S_6$，所以 $S_{12}=(1+q^6)S_6=(1+3\times3)\times4=40$．

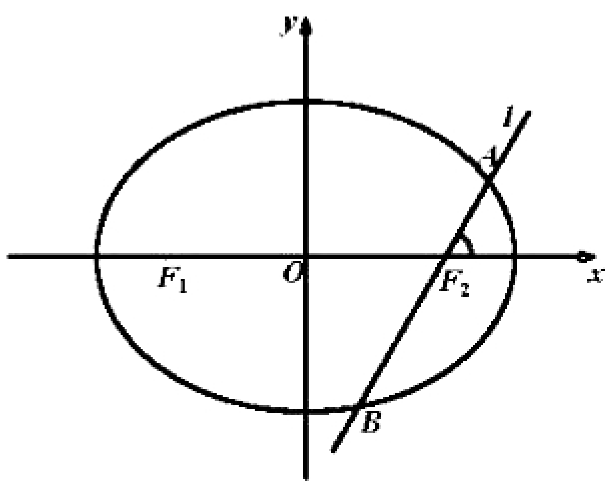
方法 3：记 $A_1=a_1+a_2+a_3$，$A_2=a_4+a_5+a_6$，$A_3=a_7+a_8+a_9$，$A_4=a_{10}+a_{11}+a_{12}$，根据等比数列的性质知，$\{A_n\}$ 仍为等比数列，由 $A_2=S_6-S_3=4-1=3$，所以 $A_3=\dfrac{A_2^2}{A_1}=9$，$A_4=\dfrac{A_3^2}{A_2}=\dfrac{9^2}{3}=27$，所以 $S_{12}=A_1+A_2+A_3+A_4=1+3+9+27=40$．

命题意图：本小题主要考查等比数列性质、前 n 项和等基础知识；考查运算求解能力，化归与转化等数学思想。

15．答案①②④．设 AC 与 BD 相交于点 O．由已知，$AC\perp BD$，$AC\perp ED$，所以 $AC\perp PD$，①真；易知，直线 PD 与平面所成的角等于 $\angle BDP$，最小为 $\angle BDF$（其正弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$），最大为 $\dfrac{\pi}{2}$（即 $\angle BDE$），②真；若 $DP\perp$ 平面 ACF，则 $DP\perp FO$，当 P 在线段 EF 上运动时，在题设条件下 $DP\perp FO$ 不成立，③假；当点 P 为 EF 的中点时，$DP\,//\,OF$，④真．

命题意图：本小题主要考查直线与平面所成的角、直线与平面平行判定定理、直线与平面垂直判定定理、性质定理等基础知识；考查逻辑推理、空间想象能力；考查化归转化等数学思想。

16．答案 $\sqrt{3}$．方法 1：设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由题意可设直线 l 的方程为 $x=ty+2\ (t>0)$．



由 $\overrightarrow{AF_2}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{F_2B}$，得 $(2-x_1,-y_1)=\dfrac{1}{2}(x_2-2,y_2)$，

则有 $-2y_1=y_2$．…………①

由$\begin{cases} x=ty+2, \\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1 \end{cases}$ 消去 x，得 $(5t^2+9)y^2+20ty-25=0$.

则 $y_1+y_2=-\dfrac{20t}{5t^2+9}$， …………②； $y_1y_2=-\dfrac{25}{5t^2+9}$. …………③

由①②得 $y_1=\dfrac{20t}{5t^2+9}$， $y_2=\dfrac{-40t}{5t^2+9}$，代入③得 $t^2=\dfrac{1}{3}$ 即 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则 l 的斜率为 $\sqrt{3}$.

方法 2：设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $|AF_2|=a-ex_1=3-\dfrac{2}{3}x_1$， $|BF_2|=a-ex_2=3-\dfrac{2}{3}x_2$.

由 $\overrightarrow{AF_2}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{F_2B}$，得 $(2-x_1,-y_1)=\dfrac{1}{2}(x_2-2,y_2)$，即 $2x_1+x_2=6$， …………①

由 $|AF_2|=\dfrac{1}{2}|F_2B|$，得 $3-\dfrac{2}{3}x_1=\dfrac{1}{2}(3-\dfrac{2}{3}x_2)$， 即 $4x_1-2x_2=9$. …………②

由①②得 $x_1=\dfrac{21}{8}$ ， $y_1=\sqrt{5(1-\dfrac{x_1^2}{9})}=\dfrac{5\sqrt{3}}{8}$，则 $k_{AF_2}=\sqrt{3}$ ，则直线 l 倾斜角为 $60°$.

方法 3：如图，设直线 l 的倾斜角为 θ， $m:x=\dfrac{9}{2}$ 为椭圆的右准线，过点 A 作 $AA_1\perp m$ 交 m 于点 A_1，过点 A 作 AA_2 垂直于 x 轴，且交 x 轴于点 A_2，过点 B 作 $BB_1\perp m$ 交 m 于点 B_1，过点 B 作 BB_2 垂直于 x 轴，且交 x 轴于点 B_2. 则有

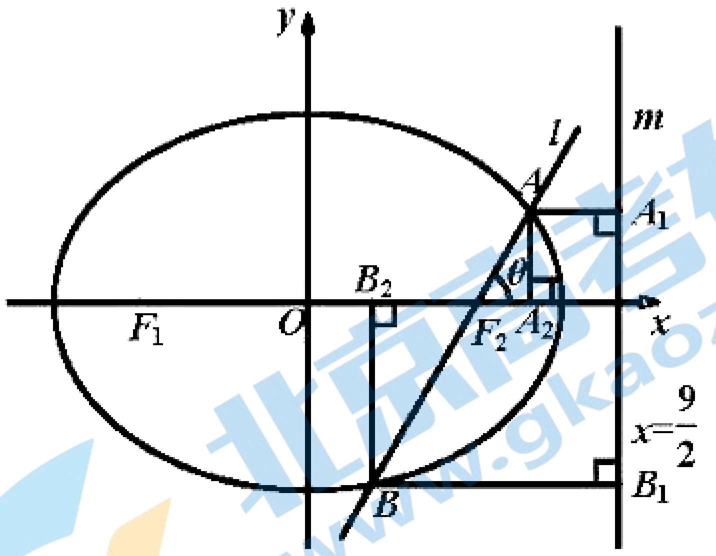
$|A_2F_2|+|AA_1|=|AF_2|\cos\theta+\dfrac{3}{2}|AF_2|=\dfrac{5}{2}$，即

$|AF_2|=\dfrac{5}{2\cos\theta+3}$； $|BB_1|-|B_2F_2|=\dfrac{3}{2}|BF_2|$

$-|BF_2|\cos\theta=\dfrac{5}{2}$，即 $|BF_2|=\dfrac{5}{3-2\cos\theta}$. 而

$\overrightarrow{AF_2}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{F_2B}$，则 $|BF_2|=2|AF_2|$，即 $\dfrac{5}{3-2\cos\theta}$

$=\dfrac{10}{3+2\cos\theta}$. 解得 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，则直线 l 的斜率为 $\sqrt{3}$.



命题意图：本小题主要考查椭圆的定义、标准方程、直线的方程、直线与椭圆位置关系等基础知识；考查运算求解、推理论证等数学能力及创新意识；考查数形结合、化归与转化等数学思想。

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

（1）模型② $y=a+\hat{b}\sqrt{x}$ 的拟合效果最好. ……………………………………… 2 分

（2）令 $t=\sqrt{x}$，知 y 与 t 可用线性方程 $y=a+\hat{b}t$ 拟合，则

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{9}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{9}(t_i-\bar{t})^2}=\frac{21.31}{3.58}\approx 5.953,\quad a=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}=23-5.953\times 2.15\approx 10.20,$$ …… 6 分

所以，y 关于 t 的线性回归方程为 $y=10.20+5.95t$，

故 y 关于 x 的回归方程为 $y=10.20+5.95\sqrt{x}$． …………………………………… 8 分

（3）2021 年 10 月，即 $x=16$ 时， $y=10.20+5.95\times\sqrt{16}=34$ （万人），

此时，外地游客可为该县带来的生态旅游收入为 3400 万元． ………………… 12 分

命题意图：本小题主要考查回归方程、统计案例等基本知识；考查统计基本思想以及抽象概括、数据处理等能力和应用意识。

18．（12 分）

（1）由 $(2b+\sqrt{3}c)\cos A+\sqrt{3}a\cos C=0$，

根据正弦定理有 $(2\sin B+\sqrt{3}\sin C)\cos A+\sqrt{3}\sin A\cos C=0$． ……………………… 2 分

所以 $2\sin B\cos A+\sqrt{3}\sin C\cos A+\sqrt{3}\sin A\cos C=0$，

所以 $2\sin B\cos A+\sqrt{3}\sin(C+A)=0$，

即 $2\sin B\cos A+\sqrt{3}\sin B=0$． …………………………………………………… 4 分

因为 $0<B<\pi$，所以 $\sin B\neq 0$，

所以 $\cos A=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{5\pi}{6}$． …………………………………………………… 6 分

（2）由（1）知 $A=\frac{5\pi}{6}$，所以 $B+C=\frac{\pi}{6}$，则 $C=\frac{\pi}{6}-B(0<B<\frac{\pi}{6})$，

由正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 得 $\frac{2}{\sin\frac{5\pi}{6}}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin(\frac{\pi}{6}-B)}$，

所以 $b=4\sin B, c=4\sin(\frac{\pi}{6}-B)=2\cos B-2\sqrt{3}\sin B$． …………………………… 9 分

所以 $b+\sqrt{3}c=4\sin B+\sqrt{3}(2\cos B-2\sqrt{3}\sin B)$

$=2\sqrt{3}\cos B-2\sin B$

$=4(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B-\frac{1}{2}\sin B)$

$=4\cos(\frac{\pi}{6}+B)$．

因为 $0<B<\frac{\pi}{6}$，所以 $\frac{1}{2}<\cos(\frac{\pi}{6}+B)<\frac{\sqrt{3}}{2}$，

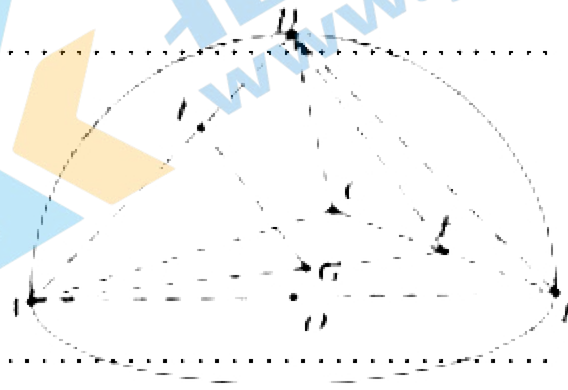
所以 $b+\sqrt{3}c$ 的取值范围为 $(2,2\sqrt{3})$． ………………………………………… 12 分

命题意图：本小题主要考查正余弦定理及其应用、特殊角的三角函数值、两角和差的正余弦公式应用等基础知识；考查运算求解能力、推理论证能力；考查化归与转化等数学思想。

19.（12 分）

（1）连接 AG 并延长交 BC 于 F 点，连接 DF， ………………………… 1 分

因为 G 为△ ABC 的重心，



所以 $AG=\dfrac{2}{3}AF$． ………………………… 2 分

因为 $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{ED}$，

所以 $AE=\dfrac{2}{3}AD$， ………………………… 3 分

则 $\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{AG}{AF}$，所以 $EG/\!/DF$． ………………………… 4 分

又 $EG\not\subset$ 面 BCD， $DF\subset$ 面 BCD，

所以 $EG/\!/$ 面 BCD． ………………………… 6 分

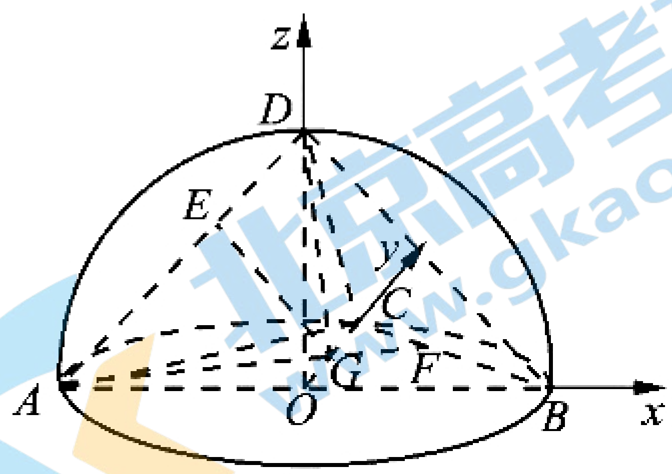
（2）当三棱锥 $D-ABC$ 体积最大时，

平面 $ABD\perp$ 平面 ABC，且 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 为等腰直角三角形，

则 $AC=BC=AD=BD=2\sqrt{2}$． ………………………… 7 分

以 O 为原点，建立如图所示空间直角坐标系，则 $A(-2,0,0)$， $B(2,0,0)$， $C(0,2,0)$，$O(0,0,0)$， $D(0,0,2)$， $E(-\dfrac{2}{3},0,\dfrac{4}{3})$， $G(0,\dfrac{2}{3},0)$．

所以 $\overrightarrow{CD}=(0,-2,2)$， $\overrightarrow{BE}=(-\dfrac{8}{3},0,\dfrac{4}{3})$， $\overrightarrow{BG}=(-2,\dfrac{2}{3},0)$． ………………………… 8 分



设面 BGE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}-\dfrac{8}{3}x+\dfrac{4}{3}z=0,\\ -2x+\dfrac{2}{3}y=0.\end{cases}$

取 $x=1$，则 $y=3$， $z=2$， 故 $\boldsymbol{m}=(1,3,2)$． ………………………… 10 分

设 CD 与面 BGE 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}|}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{CD}|}=\dfrac{2}{\sqrt{14}\times\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$． ………………………… 12 分

命题意图：本小题主要考查旋转体、直线与平面平行的判定、直线与平面所成角、空间向量、三棱锥体积、三角形重心性质、球体等基础知识；考查逻辑推理、运算求解、空间想象等能力及创新意识；考查化归转化、数形结合等数学思想。

20.（12 分）

（1）由已知，线段 PF 的长度等于 P 到 l_0： $x=-1$ 的距离， ………………………… 2 分

则点 P 的轨迹是以 $F(1,0)$ 为焦点， l_0： $x=-1$ 为准线的抛物线，

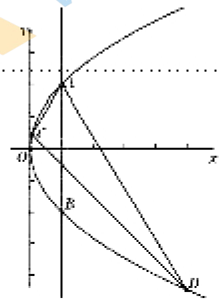
所以 E 的方程为 $y^2=4x$． ………………………………………………………………………… 4 分

（2）将 $x=1$ 代入 $y^2=4x$ 得 $y=\pm2$，则 $A(1,2)$，$B(1,-2)$．

易知直线 CD 斜率存在，设为 k，知 $k\neq0$，直线 CD 方程为 $y=kx+b$． ……… 6 分

由 $\begin{cases} y^2=4x, \\ y=kx+b \end{cases}$ 得 $k^2x^2+(2bk-4)x+b^2=0$．

则 $x_C+x_D=\dfrac{4-2bk}{k^2}, x_Cx_D=\dfrac{b^2}{k^2}$． ……… ① ……………………………… 8 分



因为 $\angle CAB=\angle DAB$，即 $k_{AC}+k_{AD}=0$．

易知，$k_{AD}=\dfrac{y_D-2}{x_D-1}=\dfrac{kx_D+b-2}{x_D-1}$，

$k_{AC}=\dfrac{y_C-2}{x_C-1}=\dfrac{kx_C+b-2}{x_C-1}$，

所以 $k_{AC}+k_{AD}=\dfrac{kx_C+b-2}{x_C-1}+\dfrac{kx_D+b-2}{x_D-1}=\dfrac{2kx_Cx_D+(b-2-k)(x_C+x_D)-2(b-2)}{(x_C-1)(x_D-1)}=0$，

变形可得 $2kx_Cx_D+(b-2-k)(x_C+x_D)-2(b-2)=0$． …… ② ……………………… 10 分

联立①②得 $k^2+(b-1)k+b-2=0$，

所以 $k=-1$ 或 $k=2-b$．

若 $k=2-b$，则 CD 的方程为 $y=kx+2-k=k(x-1)+2$，恒过 $A(1,2)$，不合题意，

所以 $k=-1$，即直线 CD 的斜率为定值 -1． ………………………………………… 12 分

命题意图：本小题主要考查抛物线的定义、直线的斜率、直线与抛物线的位置关系等基础知识；考查逻辑推理、运算求解等数学能力；考查数形结合、化归与转化、分类与整合等数学思想。

21．（12 分）

（1）$a=e$ 时，$f(x)=e^x-e\ln x-e$，其中 $x>0$，

则 $f'(x)=e^x-\dfrac{e}{x}$，可知 $f'(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 的增函数，且 $f'(1)=0$， ……………… 2 分

当 $0<x<1$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>1$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$，递增区间为 $(1,+\infty)$． ……………………… 4 分

（2）由题知 $x>0$，$a>0$，$f'(x)=e^x-\dfrac{a}{x}$，

可知 $f'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 为单调递增函数，

且当 $x\to0$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\to+\infty$ 时，$f'(x)>0$，

（此处也可利用函数 $y=e^x$ 与 $y=\dfrac{a}{x}$ 图象在第一象限有交点来描述）

所以，存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $f'(x_0)=0$，即 $e^{x_0}=\dfrac{a}{x_0}$， ……………………… 6 分

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

所以，$f(x)_{\min}=f(x_0)=e^{x_0}-a\ln x_0-a\ln a=\dfrac{a}{x_0}-a\ln x_0-a\ln a$ （*）

由 $f(x)_{\min}>a$ 得，$\dfrac{1}{x_0}-\ln x_0-\ln a>1$，

由 $e^{x_0}=\dfrac{a}{x_0}$ 得 $a=x_0e^{x_0}$，即 $\ln a=\ln x_0+x_0$，

即 $\dfrac{1}{x_0}-\ln x_0-\ln x_0-x_0>1$，即有 $2\ln x_0+x_0-\dfrac{1}{x_0}+1<0$，

因为 $u(x)=2\ln x+x-\dfrac{1}{x}+1$ 为 $(0,+\infty)$ 的单调递增函数，

而 $u(1)=1>0$，$u(\dfrac{1}{2})=-2\ln 2-\dfrac{1}{2}<0$，则存在 $t\in(\dfrac{1}{2},1)$，使得 $u(t)=0$，

所以 $0<x_0<t<1$，…………………………………………………………………… 8 分

又 $v(x)=xe^x$ 为 $(0,1)$ 上的增函数，

当 $x\in(0,1)$ 时，$v(x)\in(0,e)$，即 $a\in(0,e)$，

所以，整数 a 可能取值为 1 或 2. …………………………………………………… 10 分

当 $a=2$ 时，$f(x)=e^x-2\ln x-2\ln 2$，

而 $f(1)=e-2\ln 2<2$，与 $f(x)>2$ 不符合，舍去. …………………………………… 11 分

当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-\ln x$，$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$，

由（*）式可得，$f(x)_{\min}=\dfrac{1}{x_0}-\ln x_0$，其中 $\dfrac{1}{2}<x_0<1$，

由于 $h(x_0)=\dfrac{1}{x_0}-\ln x_0$ 为 $(\dfrac{1}{2},1)$ 的减函数，且 $h(1)=1$，

所以 $f(x)_{\min}>1$，符合题意，

综上所述，整数 a 的值为 1. ……………………………………………………………… 12 分

命题意图：本小题主要考查导数的几何意义、导数及其应用、函数单调性、极值与最值等基础知识；考查推理论证、运算求解等数学能力和创新意识；考查分类与整合、函数与方程及数形结合等数学思想。

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．[选修 4−4：坐标系与参数方程]（10 分）

（1）将 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 代入 $x^2+(y-2)^2=4$，化简得 $\rho=4\sin\theta$． ………………2 分

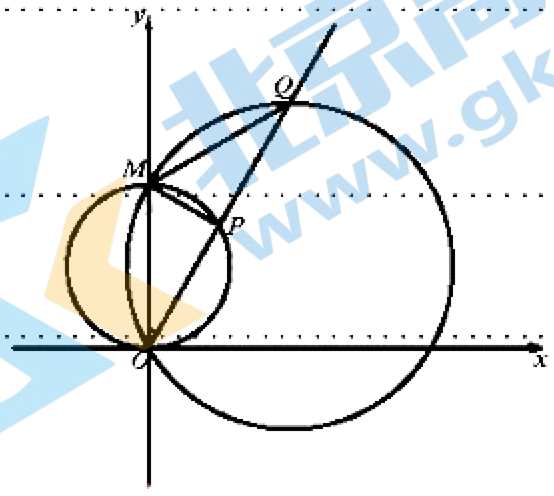
设点 C 的极坐标为 (ρ,θ)，依题意可知 $B(\dfrac{\rho}{2},\theta),A(\dfrac{\rho}{2},\theta+\dfrac{\pi}{3})$ ． ………………4 分

因为点 A 在曲线 C_1 上，带入其方程可得 $\dfrac{\rho}{2}=4\sin(\theta+\dfrac{\pi}{3})$，

即 $\rho=8\sin(\theta+\dfrac{\pi}{3})$．

故曲线 C_1、C_2 的极坐标方程分别为 $\rho=4\sin\theta$，$\rho=8\sin(\theta+\dfrac{\pi}{3})$． ……………… 5 分

（2）联立 $\begin{cases}\rho=4\sin\theta,\\ \rho=8\sin(\theta+\dfrac{\pi}{3})\end{cases}$ 可得 $M(4,\dfrac{\pi}{2})$； ……………………………… 6 分



将 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 代入 $\rho=4\sin\theta$ 中，得 $P(2\sqrt{3},\dfrac{\pi}{3})$； ……………………………… 7 分

将 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 代入 $\rho=8\sin(\theta+\dfrac{\pi}{3})$ 中，得 $Q(4\sqrt{3},\dfrac{\pi}{3})$． ……………………………… 8 分

显然，$\angle MOP=\angle MOQ=\dfrac{\pi}{6}$，

故 $S_{\Delta MPQ}=S_{\Delta OMQ}-S_{\Delta OMP}$

$=\dfrac{1}{2}|OM||OQ|\sin\angle MOQ-\dfrac{1}{2}|OM||OP|\sin\angle MOP=2\sqrt{3}$． ……………………… 10 分

命题意图：本小题主要考查曲线的直角坐标方程与极坐标方程的互化、极角与极径的几何意义等基础知识；考查逻辑推理、运算求解等数学能力；考查化归与转化、数形结合等数学思想。

23．[选修4—5：不等式选讲]（10 分）

（1）由题 $f(x)=|2x-1|+|x-2|$

当 $x<\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=-2x+1-x+2=-3x+3\leqslant 2x$，得 $x\geqslant\dfrac{3}{5}$，此时不成立；… 1 分

当 $\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2$ 时，$f(x)=2x-1-x+2=x+1\leqslant 2x$，得 $x\geqslant 1$，此时取 $1\leqslant x\leqslant 2$；

……………………………………………………………………………………………… 2 分

当 $x>2$ 时，$f(x)=2x-1+x-2=3x-3\leqslant 2x$，得 $x\leqslant 3$，此时取 $2<x\leqslant 3$． 3 分

综上，不等式的解集为 $\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$． ……………………………………… 4 分

（2）$\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}-1=\dfrac{2+a^2+b^2}{(1+a^2)(1+b^2)}-1=\dfrac{2+a^2+b^2-(1+a^2)(1+b^2)}{(1+a^2)(1+b^2)}$

$=\dfrac{1-a^2b^2}{(1+a^2)(1+b^2)}$． ……………………………………………………… 6 分

因为正实数 a，b 满足 $2=a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，即有 $ab\leqslant 1$，则 $\dfrac{1-a^2b^2}{(1+a^2)(1+b^2)}\geqslant 0$，

所以 $\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}\geqslant 1$， ……………………………………………………… 8 分

由（1）已知函数 $f(x)$ 为 $[1,+\infty)$ 的增函数，

所以 $f(\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2})\geqslant f(1)$． ……………………………………………… 10 分

命题意图：本小题主要考查含绝对值的不等式、基本不等式、不等式证明方法等基础知识；考查运算求解、推理论证等数学能力；考查分类与整合、化归与转化等数学思想。

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。