

2023 届高三年级 11 月份大联考

数学试题

本试卷共 4 页, 22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前, 先将自己的姓名、考号等填写在试题卷和答题卡上, 并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答: 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 填空题和解答题的作答: 用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 考试结束后, 请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、单选题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足 $z(2-i)=i$, 则 $|5z-i| =$

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{2}$

2. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid \lg(x+2) \leq 0\}$, $B = \{y \mid y - \sqrt{x} - \sqrt{2}\}$, $a \in A \cap B$, 则 a 的值可以是

- A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

3. 命题“ $\forall x \in [-2, -1], x^2 - a > 2$ ”为假命题的一个充分不必要条件是

- A. $a \leq 1$ B. $a = 2$ C. $a \geq 1$ D. $a \leq 2$

4. “太空教师”的神舟十三号航天员翟志刚、王亚平、叶光富出现在画面中, “天宫课堂”第一课在中国空间站正式开讲。此次太空授课通过为同学们呈现多种精彩的实验和现象, 激发了同学们的好奇心, 促使他们去观察这些现象, 进而去思考、去探索, 把科学思维的种子种进心里。某校为了解同学们对“天宫课堂”这种授课模式的兴趣, 决定利用分层抽样的方法从高二、高三学生中选取 90 人进行调查, 已知该校高二年级学生有 200 人, 高三年级学生有 1500 人, 则抽取的学生中, 高三年级有

- A. 20 人 B. 30 人 C. 40 人 D. 50 人

5. 函数 $f(x) = x \ln(x+2)$ 的图象在点 $(-1, 0)$ 处的切线与直线 $(a-2)x + y - 2 = 0$ 垂直, 则实数 a 的值为

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

6. 某海外实验室在研究某种人类细菌的过程中发现, 细菌数量 N (单位) 与该人类细菌被植入培养的时间 t (单位: 小时) 近似满足函数关系 $Y(t) = N_0 e^{-\frac{t}{24}}$, 其中 N_0 为初始细菌含量。当时间 $t = 12$ (单位: 小时), 该细菌数量为 $\frac{24\sqrt{e}}{e}$ (单位), 则 $Y(72) =$

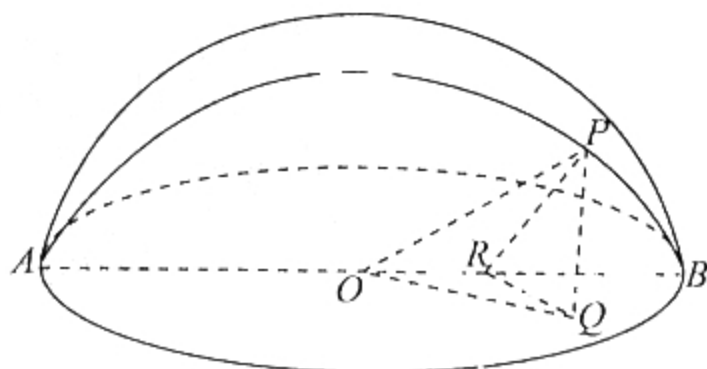
- A. $12e^{-3}$ B. $24e^{-3}$ C. $36e^{-3}$ D. $38e^{-3}$

7. 若正实数 a, b, c 满足 $a = e^{\sqrt{0.1}}$, $\log_{0.5} b = \frac{1}{5}$, $c^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$, 则

- A. $c^a > b^a$ B. $\log_c a < \log_b a$ C. $\log_a b > \log_b c$ D. $c^{a-1} < b^{c-1}$

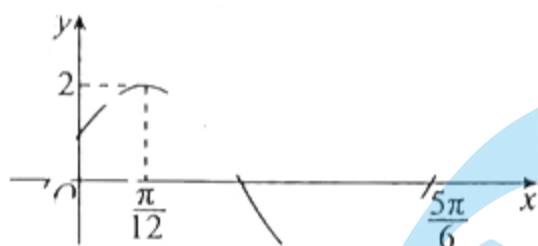
8. 如图, AB 是半球的直径, O 为球心, $AB=2$, P 为此半球大圆弧上的任意一点 (异于 A, B), P 在水平大圆面 AOB 内的射影为 Q , 过 Q 作 $QR \perp AB$ 于 R , 连接 PR, OP , 若二面角 $P-AB-Q$ 为 $\frac{\pi}{3}$, 则三棱锥 $P-OQR$ 体积的最大值为

- A. $\frac{\sqrt{3}}{64}$ B. $\frac{1}{64}$ C. $\frac{1}{36}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{96}$



二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象如图所示，则



- A. 函数解析式 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$
- B. 将函数 $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度可得函数 $f(x)$ 的图象
- C. 直线 $x = -\frac{11}{12}\pi$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴
- D. 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ 上的最大值为 2
10. 给出下列命题，其中正确的命题是
- A. 已知 $P(B|A) = \frac{1}{4}, P(AB) = \frac{1}{8}$, 则 $P(A) = \frac{1}{4}$
- B. 随机变量 $X \sim N(2, 3^2)$, 若 $X = \frac{1}{3}Y - 2$, 则 $E(Y) = 12, D(Y) = 81$
- C. 以模型 $y = (c-1)e^{2kx}$ 拟合一组数据时，为了求出回归方程，设 $z = \ln y$, 将其变换后得到线性方程 $z = \frac{1}{2}x + 2$, 则 c, k 的值分别是 $e^2 - 1$ 和 0.2
- D. 直线 $l_1: (2-a)x + 3y + 2a = 0, l_2: x - ay - 6 = 0$, 若 $l_1 \parallel l_2$, 则 $a = -1$
11. 若函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数， $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ 为偶函数， $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, 则
- A. $f(0) = 0$
- B. $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减
- C. $f(2\pi + x)$ 为奇函数
- D. $f\left(\frac{101\pi}{2}\right) = -1$
12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 短轴长为 $2\sqrt{3}$, P 为 C 上任意一点, F_1, F_2 分别为 C 的左、右焦点, 过点 F_1 的直线 l 交椭圆于 A, B 两点, 则下列说法正确的是
- A. 存在点 P , 使得 PF_1 的长度为 $\frac{1}{2}$
- B. $\triangle PF_1F_2$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$
- C. C 上存在 4 个不同的点 P , 使得 $\triangle PF_1F_2$ 是直角三角形
- D. $\triangle PF_1F_2$ 内切圆半径的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 $b \neq 0, |a| = 2, (2a - b) \perp b$, 则 $|a - b| =$ _____.
14. $(x - 2y)(2x - y)^6$ 的展开式中，含 $x^4 y^3$ 项的系数为 _____.
15. 某石油勘探队在某海湾发现两口大型油气井，海岸线近似于双曲线 $C: \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ 的右支，现测得两口油气井的坐标位置分别为 $F(10, 0), Q(30, 9)$, 为了运输方便，计划在海岸线上建设一个港口，则港口到两油气井距离之和的最小值为 _____.
16. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，斜边为 AB , 点 D 在边 BC 上，设 $\angle ADC = \alpha, \angle BAD = \beta$, 若 $\sin B = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha}$, 则 $\frac{AB^2 + AD^2}{AD \cdot AB}$ 用 β 表示为 _____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤。
17. (本小题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足：对任意正整数 n ，有 $a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^{n-1}} = n$ 。

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；
- (2) 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

18. (本小题满分 12 分)

请从下面三个条件中任选一个，补充在下面的横线上，并解答。

① $(a+c)(\sin A - \sin C) + (b-a)\sin B = 0$ ；② $2\sqrt{3}\sin C \cos C = 1 + 2\cos^2 C$ ；

③ $2\sin B - \sin A = 2\sin C \cos A$ 。在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c 。

若

- (1) 求角 C ；
- (2) 若 $c=4$ ，求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围。

19. (本小题满分 12 分)

某市宣传部门开展了线上新冠肺炎世界防控现状及防控知识竞赛，现从全市的参与者中随机抽取了 1 000 名幸运者的成绩进行分析，把他们的得分(满分 100 分)分成以下 7 组： $[30, 40)$, $[40, 50)$, $[50, 60)$, $[60, 70)$, $[70, 80)$, $[80, 90)$, $[90, 100]$ ，统计得各组的频率之比为 $1:6:8:10:9:4:2$ 。同一组数据用该区间中点值代替。

(1) 求这 1 000 名幸运者成绩的第 75 百分位数和平均值 μ (结果保留整数)；

(2) 若此次知识竞赛得分 $X \sim N(\mu, 14^2)$ ，为感谢市民的积极参与，对参与者制定如下奖励方案：得分不超过 79 分的可获得 1 次抽奖机会，得分超过 79 分不超过 93 分的可获得 2 次抽奖机会，超过 93 分的有 3 次抽奖机会，试估计任意一名幸运者获得抽奖次数的数学期望。

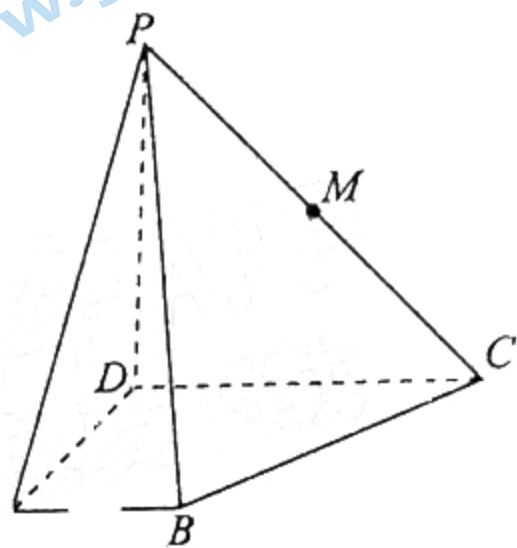
参考数据： $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$, $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$ 。

20. (本小题满分 12 分)

已知四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $PD=CD=2$, $AD=AB=1$, $AB \perp DA$, AB

(1) 求证: 平面 $PAD \perp$ 平面 PCD ;

(2) 设 M 是棱 PC 上的点, 若二面角 $M-BD-A$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, 试求直线 BC 与平面 BDM 所成角的正弦值.



21. (本小题满分 12 分)

已知 O 为坐标原点, $Q(m, 2)$ 位于抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上, 且到抛物线的准线的距离为 2.

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 已知点 $A(-2, 4)$, 过抛物线焦点的直线 l 交 C 于 M, N 两点, 当 $\vec{AM} \cdot \vec{AN}$ 取最小值时, 求 $\triangle AMN$ 的面积.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 - a \ln x$, $g(x) = x^2 - \frac{e^x}{x}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 证明: 当 $a \in (0, \frac{e^e}{2}]$ 时, $g(x) < f(x)$ 恒成立.

密
封
线
内
不
要
订
答
题

2023 届高三年级 11 月份大联考

数学参考答案及评分细则

一、单选题

1. A 【解析】根据已知条件可知： $z(2-i)=i$ ，故有： $z=$

$$\frac{i(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-1+2i}{5}$$

所以 $|5z-i|=|-1+i|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$. 故选 A.

2. B 【解析】 $\because \lg(x+2) \leq 0, \therefore 0 < x+2 \leq 1, \therefore -2 < x$

$$\leq -1, \therefore A = \{x | -2 < x \leq -1\}, B =$$

$$\{y | y = \sqrt{x} - \sqrt{2}\} = \{y | y \geq -\sqrt{2}\}, \text{ 所以 } A \cap B = \{x |$$

$-\sqrt{2} \leq x \leq -1\}$, 因为 $a \in A \cap B$, 结合选项可得： -1

$\in A \cap B$. 故选 B.

3. C 【解析】由命题“ $\forall x \in [-2, -1], x^2 - a > 2$ ”为

假命题，得该命题的否定：“ $\exists x \in [-2, -1], x^2 - a$

≤ 2 ”为真命题，得 $a+2 \geq (x^2)_{\min} = 1$, 所以 $a \geq -1$, 所

以 $a \geq 1$ 为该命题的一个充分不必要条件. 故选 C.

4. D 【解析】由题意可知该校高二年级学生有 1 200

人，高三年级学生有 1 500 人，则高二年级与高三年

级的学生人数比为 4:5，根据分层抽样的特征可知，

抽取的学生中，高三年级有 $90 \times \frac{5}{4+5} = 50$ 人. 故

选 D.

5. C 【解析】对函数 $f(x) = x \ln(x+2)$ 求导，得： $f'(x)$

$$= \ln(x+2) + \frac{x}{x+2}, \text{ 所以 } f'(-1) = \ln 1 + \frac{-1}{1} = -1,$$

即函数 $f(x) = x \ln(x+2)$ 的图象在点 $(-1, 0)$ 处的切

线斜率为 -1 ，因为切线与直线 $(a-2)x + y - 2 = 0$ 垂

直，所以 $(2-a) \times (-1) = -1, \therefore a = 1$. 故选 C.

6. B 【解析】因为 $Y(t) = N_0 e^{-\frac{t}{24}}$, $t = 12$ 时，该细菌数

量为 $\frac{24\sqrt{e}}{e}$ ，故有： $Y(12) = e^{-\frac{12}{24}} \cdot N_0 = \frac{24\sqrt{e}}{e} = 24e^{-\frac{1}{2}}$ ，

所以 $N_0 = 24$ ，故 $Y(72) = 24 \times e^{-\frac{72}{24}} = 24e^{-3}$. 故选 B.

7. D 【解析】 $\because a = e^{\sqrt{0.1}} > e^0 = 1, \therefore a > 1, \therefore \log_{0.5} 1 = 0$

$< \log_{0.5} b = \frac{1}{5} < 1 = \log_{0.5} 0.5, \therefore 0.5 < b < 1, \therefore c^{\frac{2}{3}} =$

$\frac{1}{4}, \therefore c = \frac{1}{8}, \therefore 0 < c < 0.4 < b < 1 < a, \therefore c^a < b^a, \log_c a$

$> \log_b a, \log_a b < 0 < \log_b c, \therefore A, B, C$ 项错误； $\because a - 1 >$

$0, c - 1 < 0, \therefore 0 < c^{a-1} < 1 < b^{c-1}$, D 项正确. 故选 D.

8. C 【解析】 $\because PQ \perp$ 平面 $ABQ, \therefore PQ \perp AB, \therefore QR \perp$

$AB, PQ \cap QR = Q, \therefore AB \perp$ 平面 $PQR, \therefore AB \perp PR,$

$\therefore \angle PRQ$ 为二面角 $P-AB-Q$ 的平面角，即 $\angle PRQ$

$= \frac{\pi}{3}$ ，设 $PR = 2a, PQ = \sqrt{3}a, QR = a$ ，在 $\text{Rt} \triangle OPQ$

中， $OP = 1, OQ = \sqrt{1-3a^2}$ ，在 $\text{Rt} \triangle ORQ$ 中， $OR =$

$$\sqrt{1-4a^2}, V_{P-OQR} = \frac{1}{3} \times \sqrt{3}a \times \left(\frac{1}{2} \times \sqrt{1-4a^2} \times a \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}a^2}{6} \sqrt{1-4a^2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \sqrt{a^2 \cdot a^2 \cdot (1-4a^2)} = \frac{\sqrt{3}}{6} \times$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{2a^2 \cdot 2a^2 \cdot (1-4a^2)} = \frac{\sqrt{3}}{12} \sqrt{2a^2 \cdot 2a^2 \cdot (1-4a^2)},$$

而 $2a^2 \cdot 2a^2 \cdot (1-4a^2) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ ，当且仅当 $2a^2$

$= 1-4a^2$ ，即 $a = \frac{\sqrt{6}}{6}$ ，即 $PQ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，取得最大值. 此

时三棱锥 $P-OQR$ 体积的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{36}$.

故选 C.

二、多选题

9. ABC 【解析】由题图知：函数 $f(x)$ 的最小正周期 T

$$= \frac{4}{3} \times \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{12} \right) = \pi, \text{ 则: } \omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2, A = 2, \text{ 所以函数}$$

$f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$. 将点 $\left(\frac{\pi}{12}, 2\right)$ 代入解析式中

$$\text{可得: } 2 = 2\sin\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right), \text{ 则: } \frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$$

, 得 $\varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$. 因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi =$

$\frac{\pi}{3}$, 因此 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, 故 A 正确. 选项 B,

将函数 $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位

长度可得函数 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 故 B 正

确; 选项 C, $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, 当 $x = -\frac{11\pi}{12}$ 时,

$f(x) = 2$, 故 C 正确; 选项 D, 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ 时, $2x$

$+\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$, 所以 $f(x) \in [-2, \sqrt{3}]$, 即最大

值为 $\sqrt{3}$, 故 D 错误. 故选 ABC.

10. BD 【解析】选项 A: 因为 $P(B|A) = \frac{1}{4}$, $P(AB) =$

$$\frac{1}{8}, \text{ 所以 } P(A) = \frac{P(AB)}{P(B|A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}, \text{ 故不正确; 选}$$

项 B: 随机变量 $X \sim N(2, 3^2)$, 则 $E(X) = 2, D(X) =$

9, 若 $X = \frac{1}{3}Y - 2$, 则 $Y = 3X + 6$, 所以 $E(Y) =$

$3E(X) + 6 = 12, D(Y) = 9D(X) = 9 \times 9 = 81$, 故正

确; 选项 C: 因为 $y = (c-1)e^{2kx}$, 两边取对数, 可得:

$$\ln y = \ln[(c-1)e^{2kx}] = \ln(c-1) + \ln e^{2kx} = \ln(c-1)$$

$+ 2kx$, 令 $z = \ln y$, 可得: $z = \ln(c-1) + 2kx$, 又因为

$$z = \frac{1}{2}x + 2, \text{ 故有: } \ln(c-1) = 2, 2k = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } c = e^2$$

$+ 1, k = \frac{1}{4}$, 故不正确; 选项 D: 若 $l_1 \parallel l_2$, 则 $a(a-2)$

$- 1 \times 3 = 0$, 解得 $a = -1$ 或 $a = 3$, 当 $a = 3$ 时, l_1 与 l_2

重合; 当 $a = -1$ 时, $l_1 \parallel l_2$, 故 $a = -1$, 故正确. 故

选 BD.

11. ACD 【解析】因为函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函

数, 所以 $f(0) = 0$, 故 A 正确; $f(x) = \sin x$ 满足定义

在 \mathbf{R} 上的奇函数, $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ 为偶函数, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$,

但在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增, 故 B 不正确; 因为

$f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ 为偶函数, 所以 $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$

$f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, 所以 $f(x) = f(\pi - x)$, 又 $f(x) =$

$-f(-x)$, 所以 $f(\pi - x) = -f(-x)$, 即 $f(\pi + x) =$

$-f(x)$, 所以 $f(x + 2\pi) = f(x)$, 所以 C 正确, 由上

面得周期 $T = 2\pi$, 所以 $f\left(\frac{101\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, 所以

D 正确. 故选 ACD.

12. BCD 【解析】由题意得
$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \\ 2b = 2\sqrt{3} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = 2 \\ b = \sqrt{3} \\ c = 1 \end{cases}, \text{ 则}$$

椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 选项 A: P 为 C 上任意

一点, 则 $1 \leq |PF_1| \leq 3$, 故不正确, 选项 B: $\triangle PF_1F_2$

面积为 $S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} \times 2c|y| = c|y|$, 当点 P 落在短

轴端点时, $\triangle PF_1F_2$ 面积最大为 $\sqrt{3}$, 故正确; 选项 C:

点 P 在椭圆上, 则 $|PF_1| + |PF_2| = 4, |F_1F_2| = 2$,

$$\text{所以 } \cos \angle F_1PF_2 = \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|} =$$

$$\frac{(|PF_1| + |PF_2|)^2 - |F_1F_2|^2 - 2|PF_1||PF_2|}{2|PF_1||PF_2|} =$$

$$\frac{16 - 4 - 2|PF_1||PF_2|}{2|PF_1||PF_2|} = \frac{6}{|PF_1||PF_2|} - 1, \text{ 因为}$$

$$|PF_1| |PF_2| \leq \left(\frac{|PF_1| + |PF_2|}{2} \right)^2 = 4, \text{ 当且仅当}$$

$|PF_1| = |PF_2|$ 时等号成立, 所以 $\cos \angle F_1PF_2 =$

$$\frac{6}{|PF_1| |PF_2|} - 1 \geq \frac{1}{2}, \text{ 所以 } \angle F_1PF_2 \text{ 最大为 } \frac{\pi}{3}. \text{ 故}$$

不存在点 P , 使 $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{2}$. 当 PF_2 或 PF_1 垂直

于 x 轴时, 有四个不同的直角三角形, 故正确; 选项

D: 设 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径为 r , $\triangle PF_1F_2$ 的面积

$$= \frac{1}{2} (|F_1F_2| + |PF_1| + |PF_2|) \times r = (a+c) \times r =$$

$3r$, 若 r 最大, 需 $\triangle PF_1F_2$ 的面积最大, 选项 B 可知,

当点 P 落在短轴端点时, $\triangle PF_1F_2$ 面积最大, 为 $\sqrt{3}$,

解得此时 $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 故正确. 故选 BCD.

三、填空题

13.2 【解析】由题可得 $2a \cdot b - |b|^2 = 0, |a-b|^2 = |a|^2 - 2a \cdot b + |b|^2 = |a|^2 = 4$, 即 $|a-b| = 2$. 故答案为 2.

14. -640 【解析】 $(x-2y)(2x-y)^6$ 的展开式中, 含 x^4y^3 项的系数为 $C_6^3 2^3 \times (-1)^3 - 2 \times C_6^2 2^4 \times (-1)^2 = -640$. 故答案为 -640.

15.25 【解析】由双曲线 $C: \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$; 可知 $c^2 = 64 + 36 = 100$, 故该双曲线的两个焦点分别为 $(10, 0)$ 和 $(-10, 0)$, 则 $F(10, 0)$ 恰好为双曲线 C 的右焦点, 设 $E(-10, 0)$ 为双曲线 C 的左焦点, 连接 EQ 与双曲线 C 右支交于点 P , 则点 P 即为港口所在位置. 由双曲线的定义可得, $|PE| - |PF| = 2a = 16$, 即 $|PF| = |PE| - 16$, 则 $|PQ| + |PF| = |PQ| + |PE| - 16 \geq |EQ| - 16$. 当且仅当 Q, P, E 三点共线时, 等号成立, 此时港口到两油气井的距离之和最小. 因为

$E(-10, 0), Q(30, 9)$, 所以 $|EQ| = \sqrt{40^2 + 9^2} = \sqrt{1681} = 41$, 此时 $|PQ| + |PF| = 41 - 16 = 25$. 故答案为 25.

16. $\sin \beta + 2\cos \beta$ 【解析】因为 $\alpha - B = \beta, \sin B =$

$$\frac{\sin(\alpha - B)}{\sin \alpha}, \text{ 所以 } \sin B = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, \text{ 在 } \triangle ABD \text{ 中, } \frac{BD}{\sin \beta} =$$

$$\frac{AD}{\sin B}, \text{ 所以 } AD \sin \beta = BD \sin B, \text{ 所以 } AD \sin \alpha = BD,$$

在 $\triangle ACD$ 中, $AC = AD \sin \alpha$, 所以 $AC = BD$, 因为

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} BD \cdot AC, S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \sin \beta, \text{ 所以}$$

$$\frac{1}{2} BD \cdot AC = \frac{1}{2} AB \cdot AD \sin \beta, \text{ 即 } BD \cdot AC = AB \cdot$$

$$AD \sin \beta, \text{ 所以 } BD^2 = AB \cdot AD \sin \beta, \text{ 即 } \sin \beta =$$

$$\frac{BD^2}{AB \cdot AD}, \text{ 在 } \triangle ABD \text{ 中, } \cos \beta = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD} =$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{AB^2 + AD^2}{AD \cdot AB} - \frac{BD^2}{AB \cdot AD} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{AB^2 + AD^2}{AD \cdot AB} -$$

$$\sin \beta \right), \text{ 所以 } \frac{AB^2 + AD^2}{AD \cdot AB} = \sin \beta + 2\cos \beta. \text{ 故答案为}$$

$$\sin \beta + 2\cos \beta.$$

四、解答题

17. 解: (1) 当 $n=1$ 时, 求得 $a_1=1$,

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^{n-1}} \right) - \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-2}} \right) = \frac{a_n}{2^{n-1}} = n - (n-1) = 1,$$

$$\text{得 } \frac{a_n}{2^{n-1}} = 1, \text{ 即 } a_n = 2^{n-1}, \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{经验证可知: } a_1 = 1 \text{ 也满足上式,} \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } \{a_n\} \text{ 的通项公式为 } a_n = 2^{n-1}. \quad (5 \text{ 分})$$

(2) 根据第(1)问有: $a_n = 2^{n-1}$, 因为数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和 T_n , 则有:

$$T_n = 1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + \dots + n \cdot 2^{n-1}, \quad (6 \text{ 分})$$

两边同乘以 2 可得:

$$2T_n = 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \dots + n \cdot 2^n, \text{ 两式相}$$

减得:

$$-T_n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} - n \cdot 2^n = \frac{1-2^n}{1-2}$$

$$-n \cdot 2^n = (1-n)2^n - 1, \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{从而有: } T_n = 1 + (n-1) \cdot 2^n. \quad (10 \text{ 分})$$

18. 解:(1)选①,由 $(a+c)(\sin A - \sin C) + (b-a)\sin B = 0$ 得:

$$(a+c)(a-c) + b(b-a) = 0, \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{即 } a^2 + b^2 - c^2 = ab,$$

$$\text{所以 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2}, \quad (4 \text{ 分})$$

因为 $0 < C < \pi$,

$$\text{故角 } C = \frac{\pi}{3}; \quad (5 \text{ 分})$$

选②,由 $2\sqrt{3}\sin C\cos C = 1 + 2\cos^2 C$ 得:

$$2\sqrt{3}\sin C\cos C = 2 + \cos 2C,$$

$$-\cos 2C + \sqrt{3}\sin 2C = 2\sin\left(2C - \frac{\pi}{6}\right) = 2,$$

$$\text{所以 } \sin\left(2C - \frac{\pi}{6}\right) = 1, \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{因为 } 0 < C < \pi, -\frac{\pi}{6} < 2C - \frac{\pi}{6} < \frac{11\pi}{6},$$

$$\text{所以 } 2C - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{解得: } C = \frac{\pi}{3}; \quad (5 \text{ 分})$$

选③,因为 $2\sin B - \sin A = 2\sin C\cos A$,

$$\text{又因为 } \sin B = \sin[\pi - (A+C)] = \sin(A+C) = \sin A\cos C + \sin C\cos A,$$

$$\text{所以 } 2(\sin C\cos A + \cos C\sin A) - \sin A = 2\sin C\cos A,$$

$$\therefore 2\cos C\sin A - \sin A = 0, \quad (3 \text{ 分})$$

$$\because 0 < A < \pi, \therefore \sin A \neq 0, \quad (4 \text{ 分})$$

$$\therefore \cos C = \frac{1}{2},$$

$$\text{因为 } C \in (0, \pi), \text{ 所以 } C = \frac{\pi}{3}. \quad (5 \text{ 分})$$

(2)根据(1)可知: $C = \frac{\pi}{3}$, 又因为 $c = 4$,

$$\text{由余弦定理得: } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = (a+b)^2 - 3ab = 16, \quad (6 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } 3ab = (a+b)^2 - 16 \leq 3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \quad (9 \text{ 分})$$

即 $a+b \leq 8$, 当且仅当 $a=b=4$ 时取得等号, (10 分)

$$\text{又因为根据三角形的三边关系有: } a+b > c = 4, \quad (11 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } 8 < a+c+b \leq 12,$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 周长的取值范围为 } (8, 12]. \quad (12 \text{ 分})$$

19. 解:(1)这 1 000 名幸运者成绩的第 75 百分位数为 x , 则

$$\text{所以 } \frac{1+6+8+10}{40} + (x-70) \times \frac{9}{40} = 0.75, \text{ 解得 } x \approx 71(\text{分}), \quad (3 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{35 \times 25 + 45 \times 150 + 55 \times 200 + 65 \times 250 + 75 \times 225 + 85 \times 100 + 95 \times 50}{1000} \\ &= 65(\text{分}), \end{aligned}$$

所以这 1 000 名幸运者成绩的第 75 百分位数约为 71 分, 平均值为 65 分; (5 分)

(2)设随机变量 Y 表示任意一名幸运者的抽奖次数, 则 Y 的可能取值为 1, 2, 3,

$$\text{由已知及(1)得, } X \sim N(65, 14^2), \quad (6 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} P(Y=1) &= P(X \leq 79) = P(X \leq \mu + \sigma) \approx \frac{1}{2} + \frac{0.6827}{2} = 0.84135, \end{aligned}$$

$$P(Y=2) = P(79 < X \leq 93) = P(\mu + \sigma < X \leq \mu + 2\sigma) \\ \approx \frac{0.9545 - 0.6827}{2} = 0.1359,$$

$$P(Y=3) = P(X > 93) = P(X > \mu + 2\sigma) \approx 1 - 0.84135 - 0.1359 = 0.02275,$$

其分布列为

| | | | |
|---|---------|--------|---------|
| Y | 1 | 2 | 3 |
| P | 0.84135 | 0.1359 | 0.02275 |

(10分)

$$\text{所以 } E(Y) = 1 \times 0.84135 + 2 \times 0.1359 + 3 \times 0.02275 \\ = 1.1814,$$

所以可以估计任意一名幸运者获得抽奖次数的数学期望为 1.1814 次.

(12分)

20. 证明: (1) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\because PD \perp$ 平面

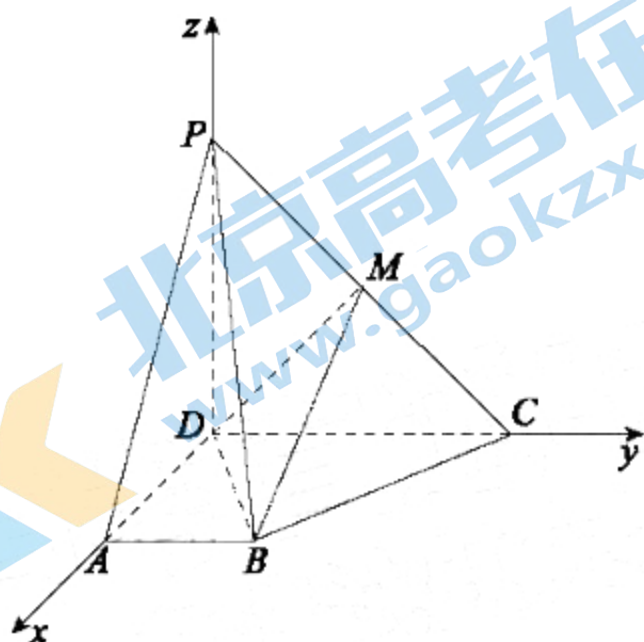
$ABCD, \therefore PD \perp AD,$ (1分)

$\because AB \perp DA, AB \parallel CD, \therefore CD \perp DA;$ (2分)

又 $\because CD \cap PD = D, \therefore AD \perp$ 面 $PCD;$ (3分)

又 $\because ADC \subset$ 面 PAD, \therefore 平面 $PAD \perp$ 平面 $PCD.$ (5分)

(2) 由(1)得 DA, DP, DC 两两垂直, 所以以 D 为原点, 以 DA, DC, DP 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图所示空间直角坐标系 $Dxyz,$



则依题意有: $D(0,0,0), A(1,0,0), B(1,1,0), C(0,2,0), P(0,0,2), \vec{PC} = (0,2,-2)$

由 $\vec{PM} = \lambda \vec{PC} (0 \leq \lambda \leq 1)$, 得点 $M(0, 2\lambda, 2-2\lambda),$ (6分)

因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD$, 故平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\vec{DP} = (0,0,2),$ (7分)

设 $n = (x, y, z)$ 为平面 BDM 的法向量, 又因为 $\vec{DB} = (1,1,0), \vec{DM} = (0, 2\lambda, 2-2\lambda),$

$$\text{所以 } \begin{cases} n \cdot \vec{DB} = 0 \\ n \cdot \vec{DM} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x + y = 0 \\ 2\lambda y + (2-2\lambda)z = 0 \end{cases}, \text{ 令 } x = 1,$$

$$\text{则 } y = -1, z = \frac{\lambda}{1-\lambda}, \therefore n = (1, -1, \frac{\lambda}{1-\lambda}), \quad (8分)$$

\because 二面角 $M-BD-A$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3},$

$$\therefore \left| -\frac{\sqrt{3}}{3} \right| = \left| \frac{n \cdot \vec{DP}}{|n| |\vec{DP}|} \right| = \left| \frac{\frac{\lambda}{1-\lambda}}{\sqrt{2 + \left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^2}} \right|, \text{ 解}$$

$$\text{得 } \lambda = \frac{1}{2}, \quad (10分)$$

故有 $\vec{PM} = \frac{1}{2} \vec{PC},$ 此时点 M 为线段 PC 的中点.

设直线 BC 与平面 BDM 所成的角为 $\theta,$ 平面 BDM 的一个法向量为 $n = (1, -1, 1);$ 又因为 $\vec{BC} = (-1, 1, 0),$ 所以

$$\sin \theta = \frac{|n \cdot \vec{BC}|}{|n| |\vec{BC}|} = \left| \frac{-2}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}} \right| = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

即直线 BC 与平面 BDM 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}.$

(12分)

21. 解: (1) 根据题意可得 $m + \frac{p}{2} = 2,$ 又 $2^2 = 2pm,$

(1分)

解得 $m = 1, p = 2,$

故所求抛物线 C 方程 $y^2 = 4x$. (4 分)

(2) 设点 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点坐标为 $(1, 0)$.

当直线 l 的斜率等于 0 时, 不符合题意; 当直线 l 的斜率不等于 0 时, 设过抛物线焦点的直线 l 的方程为: $x = ty + 1$,

由 $\begin{cases} y^2 = 4x \\ x = ty + 1 \end{cases}$, 消去 x 得: $y^2 - 4ty - 4 = 0$. (5 分)

$\Delta = 16t^2 + 16 > 0$, 得 $t \in \mathbf{R}$,

由韦达定理得 $y_1 + y_2 = 4t, y_1 y_2 = -4$, (6 分)

因为 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = (x_1 + 2)(x_2 + 2) + (y_1 - 4)(y_2 - 4)$

$$= x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 + y_1 y_2 - 4(y_1 + y_2) + 16$$

$$= \frac{y_1^2}{4} \cdot \frac{y_2^2}{4} + 2\left(\frac{y_1^2}{4} + \frac{y_2^2}{4}\right) + 4 + y_1 y_2 - 4(y_1 + y_2)$$

+ 16

$$= \frac{(y_1 y_2)^2}{16} + \frac{1}{2} [(y_1 + y_2)^2 - 2y_1 y_2] + 4 + y_1 y_2 - 4$$

$(y_1 + y_2) + 16$

$$= 1 + \frac{1}{2} [(4t)^2 + 8] + 4 - 4 - 16t + 16 = 8t^2 - 16t +$$

$$21 = 8(t-1)^2 + 13. \quad (8 \text{ 分})$$

所以当 $t=1$ 时, $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 取得最小值为 13,

此时直线 l 的方程为 $x - y - 1 = 0$. (9 分)

根据弦长公式有:

$$|MN| = \sqrt{1+t^2} |y_1 - y_2| = \sqrt{1+1^2}$$

$$\sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \sqrt{2} \times \sqrt{16+16} = 8; \quad (10 \text{ 分})$$

点 $A(-2, 4)$ 到直线 l 的距离为 $d = \frac{|-2-4-1|}{\sqrt{2}} =$

$$\frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}; \quad (11 \text{ 分})$$

故 $\triangle AMN$ 面积为 $S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} |MN| d = \frac{1}{2} \times 8 \times$

$$\frac{7\sqrt{2}}{2} = 14\sqrt{2}. \quad (12 \text{ 分})$$

22. 解: (1) 根据已知条件有: $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = 2x - \frac{a}{x} = \frac{2\left(x^2 - \frac{a}{2}\right)}{x}, \quad (1 \text{ 分})$$

① $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

$$\text{② } a > 0 \text{ 时, } f'(x) = \frac{2\left(x + \sqrt{\frac{a}{2}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{a}{2}}\right)}{x},$$

令 $f'(x) > 0$, 解得 $x > \sqrt{\frac{a}{2}}$; 令 $f'(x) < 0$, 解得 $0 <$

$$x < \sqrt{\frac{a}{2}},$$

故 $f(x)$ 在 $\left(0, \sqrt{\frac{a}{2}}\right)$ 递减, 在 $\left(\sqrt{\frac{a}{2}}, +\infty\right)$ 递增,

综上: $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

$a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\sqrt{2a}}{2}\right)$ 递减, 在 $\left(\frac{\sqrt{2a}}{2}, +\infty\right)$ 递

增; (5 分)

(2) 要证 $f(x) > g(x)$,

即证 $e^x > ax \ln x, a \in \left(0, \frac{e^2}{2}\right], x \in (0, +\infty)$,

① 当 $0 < x \leq 1$ 时, $e^x > 1, ax \ln x \leq 0$, 该不等式恒成立;

② 当 $x > 1$ 时, $x \ln x > 0$, 结合 $a \in \left(0, \frac{e^2}{2}\right]$, 得 $0 <$

$$ax \ln x \leq \frac{1}{2} e^2 x \ln x, \quad (6 \text{ 分})$$

只需证明: $e^x > \frac{1}{2} e^2 x \ln x (x > 1)$,

证法一: 即证 $\frac{2e^{x-2}}{x} - \ln x > 0 (x > 1)$, (7 分)

$$\text{令 } F(x) = \frac{2e^{x-2}}{x} - \ln x, F'(x) = \frac{2e^{x-2}(x-1) - x}{x^2},$$

令 $h(x) = 2e^{x-2}(x-1) - x$, 则 $h'(x) = 2xe^{x-2} - 1$,

令 $m(x) = 2xe^{x-2} - 1$, 则 $m'(x) = (2x+2)e^{x-2} > 0$
 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $h'(x) = 2xe^{x-2} - 1$ 在
 $(1, +\infty)$ 上单调递增, (8分)

又 $h'(1) = \frac{2}{e} - 1 < 0, h'(2) = 3 > 0$, 所以存在 $x_0 \in$
 $(1, 2)$, 使得 $h'(x_0) = 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(1, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单
 调递增, (9分)

又 $h(1) = -1 < 0, h(x_0) = 2e^{x_0-2}(x_0 - 1) - x_0 = 1 -$
 $\frac{1}{x_0} - x_0 < 0, h(2) = 0, h(3) = 4e - 3 > 0$,

所以当 $x \in (1, 2)$ 时, $F'(x) < 0$; 当 $x \in (2, +\infty)$ 时,
 $F'(x) > 0$,

即函数 $F(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单
 调递增, (11分)

所以 $F(x) \geq F(2) = 1 - \ln 2 > 0$, 问题得证,

即当 $a \in (0, \frac{e^2}{2}]$ 时, $f(x) > g(x)$ 恒成立. (12分)

证法二: 即证 $\frac{e^x}{x^2} > \frac{e^2}{2} \cdot \frac{\ln x}{x} (x > 1)$, 令 $u(x) = \frac{e^x}{2} \cdot$

$\frac{\ln x}{x} (x > 1)$, (7分)

则 $u'(x) = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1 = \frac{e^x}{2} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

则有 $u(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调
 递减, 可知 $u(x)_{\max} = \frac{\ln e}{e} \cdot \frac{e^2}{2} = \frac{e}{2}$, (9分)

设 $m(x) = \frac{e^x}{x^2}$, $\therefore m'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} =$

$\frac{e^x(x-2)}{x^3}$, $\therefore m(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$

上单调递增, \therefore 可知 $m(x) \geq m(2) = \frac{e^2}{4} = \frac{e}{2} \cdot \frac{e}{2} >$

$\frac{e}{2} = u(x)_{\max}$, 即 $m(x)_{\min} > u(x)_{\max}$, (11分)

有 $m(x) > u(x)$ 对 $\forall x > 1$ 成立, 即当 $x > 1$ 时, $\frac{e^x}{x^2} >$

$\frac{e^2}{2} \cdot \frac{\ln x}{x}$ 恒成立. 综上所述, 当 $a \in (0, \frac{e^2}{2}]$ 时, $f(x)$

$> g(x)$ 恒成立. (12分)

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯