2019北京市朝阳区高一（下）期末

数　　学

2019.7

（考试时间 120 分钟　满分 150 分）

本试卷分为选择题（共 50 分）和非选择题（共 100 分）两部分

第一部分（选择题 共 50 分）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分．在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．直线 $\sqrt{3}x-y+1=0$ 的倾斜角为

A．$\dfrac{\pi}{6}$　　B．$\dfrac{\pi}{3}$　　C．$\dfrac{2\pi}{3}$　　D．$\dfrac{5\pi}{6}$

2．在 $\triangle ABC$ 中，$a=4\sqrt{3}$，$b=4$，$A=\dfrac{\pi}{3}$，则 $B=$

A．$\dfrac{\pi}{6}$　　B．$\dfrac{\pi}{3}$　　C．$\dfrac{\pi}{2}$　　D．$\dfrac{2\pi}{3}$

3．已知直线 $l_1: y=kx+1$，$l_2: y=(k-2)x$，若 $l_1\perp l_2$，则实数 k 的值是

A．0　　B．1　　C．-1　　D．0 或 -1

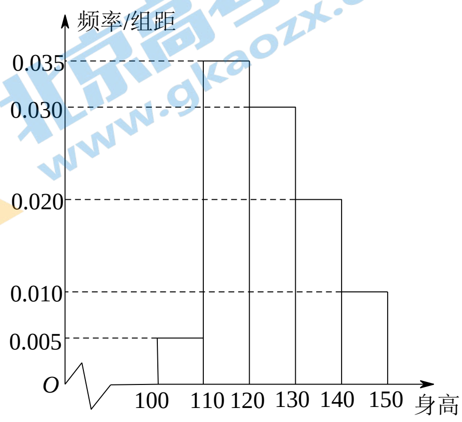
4．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别是棱 AA_1,AB 的中点，则异面直线 EF 和 C_1D 所成角的大小是

A．$\dfrac{\pi}{6}$　　B．$\dfrac{\pi}{4}$　　C．$\dfrac{\pi}{3}$　　D．$\dfrac{\pi}{2}$

5．已知 l,m 是两条不同的直线，α,β 是两个不同的平面，则下列命题正确的是

A．若 $l/\!/\alpha, l\perp m$，则 $m\perp\alpha$　　B．若 $l/\!/\alpha, l/\!/\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$

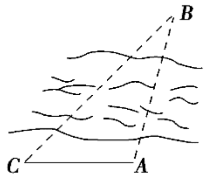
C．若 $l\perp\alpha,\alpha\perp\beta$，则 $l/\!/\beta$　　D．若 $l\perp\alpha, l\perp\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$



6．从某小学随机抽取 100 名学生，将他们的身高数据（单位：厘米）按 $[100,110)$，$[110,120)$，$[120,130)$，$[130,140)$，$[140,150]$ 分组，绘制成频率分布直方图（如图）．从身高在 $[120,130)$，$[130,140)$，$[140,150]$ 三组内的学生中，用分层抽样的方法抽取 18 人参加一项活动，则从身高在 $[140,150]$ 内的学生中选取的人数应为

A．3　　B．4　　C. 5　　D. 6

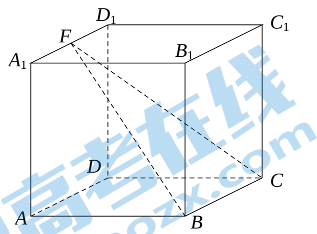
7．如图，设 A，B 两点在河的两岸，某测量者在 A 同侧的河岸边选定一点 C，测出 AC 的距离为 50 米，$\angle ACB=45°$，$\angle CAB=105°$，则 A，B 两点的距离为



A．$50\sqrt{2}$ 米　　B．$50\sqrt{3}$ 米　　C．$25\sqrt{2}$ 米　　D．$\dfrac{50\sqrt{6}}{3}$ 米

8．如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，F 是棱 A_1D_1 上的动点．下列说法正确的是

A．对任意动点 F，在平面 ADD_1A_1 内不存在与平面 CBF 平行的直线



B．对任意动点 F，在平面 $ABCD$ 内存在与平面 CBF 垂直的直线 C．当点 F 从 A_1 运动到 D_1 的过程中，二面角 $F-BC-A$ 的大小不变

D．当点 F 从 A_1 运动到 D_1 的过程中，点 D 到平面 CBF 的距离逐渐变大

9．2018 年科学家在研究皮肤细胞时发现了一种特殊的凸多面体，称之为“扭曲棱柱”．对于空间中的凸多面体，数学家欧拉发现了它的顶点数，棱数与面数存在一定的数量关系．

凸多面体	顶点数	棱数	面数
三棱柱	6	9	5
四棱柱	8	12	6
五棱锥	6	10	6
六棱锥	7	12	7

根据上表所体现的数量关系可得有 12 个顶点，8 个面的扭曲棱柱的棱数是

A．14　　B．16　　C．18　　D．20

10．已知二次函数 $y=x^2-2x+m\ (m\neq 0)$ 交 x 轴于 A,B 两点（A,B 不重合），交 y 轴于 C 点．圆 M 过 A,B,C 三点．下列说法正确的是

① 圆心 M 在直线 $x=1$ 上；

② m 的取值范围是 $(0,1)$；

③ 圆 M 半径的最小值为 1；

④ 存在定点 N，使得圆 M 恒过点 N．

A．①②③　　B．①③④　　C．②③　　D．①④

第二部分（非选择题 共 100 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

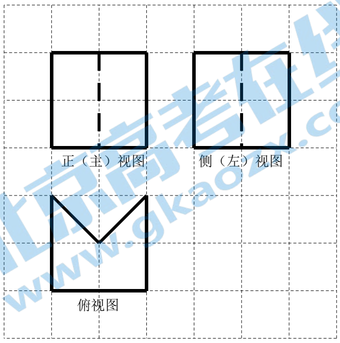
11．某学校甲、乙两个班各 15 名学生参加环保知识竞赛，成绩的茎叶图如下：

甲		乙
6	4	
8	5	7
9 4 1	6	2 5 9
8 7 6 4 2 1	7	2 5 7 8 9
7 4 4	8	1 4 4 7 9
6	9	2

则这 30 名学生的最高成绩是______；由图中数据可得______班的平均成绩较高．

12．在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=\sqrt{7}, c=2, A=60^\circ$，则 $b=$______．

13．某几何体是由一个正方体去掉一个三棱柱所得，其三视图如图所示. 如果网格纸上小正方形的边长为 1，那么该几何体的体积是________.



14．已知直线 $x+ay+6=0$ 与圆 $x^2+y^2=8$ 交于 A, B 两点，若 $|AB|=2\sqrt{2}$，则 $a=$______.

15．已知 α, β 是两个不同平面，直线 $l \not\subset \alpha$．给出下面三个论断：

①$l // \alpha$　②$l \perp \beta$　③$\alpha \perp \beta$

以其中两个论断作为条件，余下的一个论断作为结论，写出一个正确的命题________.

16. 已知两条直线 $y=x+1$，$y=k(x-1)$ 将圆 $x^2+y^2=1$ 及其内部划分成三个部分，则 k 的取值范围是________；若划分成的三个部分中有两部分的面积相等，则 k 的取值有________种可能.

三、解答题：本大题共 4 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

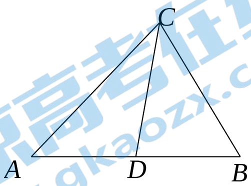
17．（本小题满分 16 分）

如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 是 AB 的中点，$BC=3$，$B=\dfrac{\pi}{3}$，$\triangle BCD$ 的面积为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅰ）求 AB, AC 的长；

（Ⅱ）求 $\sin A$ 的值；

（Ⅲ）判断 $\triangle ABC$ 是否为锐角三角形，并说明理由.



18．（本小题满分 18 分）

某市从高二年级随机选取 1000 名学生，统计他们选修物理、化学、生物、政治、历史和地理六门课程（前 3 门为理科课程，后 3 门为文科课程）的情况，得到如下统计表，其中“√”表示选课，“空白”表示未选.

方案＼人数＼科目		物理	化学	生物	政治	历史	地理
一	220	√	√		√		
二	200	√		√		√	
三	180	√	√	√			
四	175			√		√	√
五	135		√		√		√
六	90				√	√	√

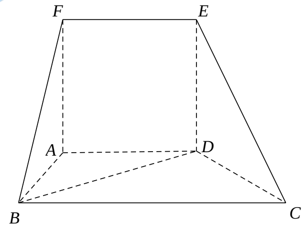
（Ⅰ）在这 1000 名学生中，从选修物理的学生中随机选取 1 人，求该学生选修政治的概率；

（Ⅱ）在这 1000 名学生中，从选择方案一、二、三的学生中各选取 2 名学生，如果在这 6 名学生中随机选取 2 名，求这 2 名学生除选修物理以外另外两门选课中有相同科目的概率；

（Ⅲ）利用表中数据估计该市选课偏文（即选修至少两门文科课程）的学生人数多还是偏理（即选修至少两门理科课程）的学生人数多，并说明理由.

19. （本小题满分 18 分）

如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，平面 $ADEF\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ADEF$ 为正方形，四边形 $ABCD$ 为梯形，且 $AD/\!/BC$，$\angle BAD=90^\circ$，$AB=AD=\dfrac{1}{2}BC$.



（Ⅰ）求证：$AD/\!/$ 平面 $BCEF$；

（Ⅱ）求证：$BD\perp$ 平面 CDE；

（Ⅲ）在线段 BD 上是否存在点 M，使得 $CE/\!/$ 平面 AMF？

若存在，求出 $\dfrac{BM}{DM}$ 的值；若不存在，请说明理由.

20.（本小题满分 18 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知 $A(-1,-1),B(2,-1),C(m,n)$ 为三个不同的定点. 以原点 O 为圆心的圆与线段 AB,AC,BC 都相切.

（Ⅰ）求圆 O 的方程及 m,n 的值；

（Ⅱ）若直线 $l:y=-x+t\ (t\in\mathbf{R})$ 与圆 O 相交于 M,N 两点，且 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=-\dfrac{1}{2}$，求 t 的值；

（Ⅲ）在直线 AO 上是否存在异于 A 的定点 Q，使得对圆 O 上任意一点 P，都有 $\dfrac{|PA|}{|PQ|}=\lambda$（$\lambda$ 为常数）？若存在，求出点 Q 的坐标及 λ 的值；若不存在，请说明理由.

2019 北京市朝阳区高一（下）期末数学参考答案

一、选择题：（本题满分 50 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	A	B	D	D	A	A	C	C	D

二、填空题：（本题满分 30 分）

题号	11		12	13	14	15	16	
答案	96	乙	3	6	$\pm\sqrt{5}$	①②$\Rightarrow$③（答案不唯一，或②③$\Rightarrow$①）	$(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$	3

三、解答题：（本题满分 70 分）

17．（本小题满分 16 分）

解：（Ⅰ）由 $S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}BC\cdot BD\cdot\sin B=\dfrac{1}{2}\times3\times BD\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，得 $BD=2$.

因为 D 是 AB 的中点，所以 $AB=4$.

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B$.

故 $AC=\sqrt{16+9-12}=\sqrt{13}$. ……………………………………………………6 分

（Ⅱ）在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理，$\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin A}$.

所以 $\sin A=\dfrac{3\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{13}}=\dfrac{3\sqrt{39}}{26}$. ……………………………………………………11 分

（Ⅲ）$\triangle ABC$ 是锐角三角形.

因为在 $\triangle ABC$ 中，$AB=4, BC=3, AC=\sqrt{13}$.

所以 AB 是最大边，

故 $\angle ACB$ 是最大角.

且 $AC^2+BC^2>AB^2$.

所以 $\angle ACB$ 为锐角.

所以 $\triangle ABC$ 为锐角三角形. ……………………………………………………16 分

18．（本小题满分 18 分）

解：（Ⅰ）设事件 A 为“在这1000名学生中，从选修物理的学生中随机选取 1 人，该学生选修政治”.

在这1000名学生中，选修物理的学生人数为 $220+200+180=600$，

其中选修政治的学生人数为220，

所以 $P(A)=\dfrac{220}{600}=\dfrac{11}{30}$.

故在这1000名学生中，从选修物理的学生中随机选取 1 人，该学生选修政

治的概率为 $\dfrac{11}{30}$. ……………………………………………………………6 分

（Ⅱ）设这六名学生分别为 $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$，其中 A_1, A_2 选择方案一，B_1, B_2 选择方案二，

C_1, C_2 选择方案三.

从这 6 名学生中随机选取 2 名，所有可能的选取方式为

A_1A_2，A_1B_1，A_1B_2，A_1C_1，A_1C_2，A_2B_1，A_2B_2，A_2C_1，A_2C_2，B_1B_2，B_1C_1，B_1C_2，B_2C_1，B_2C_2，C_1C_2，共有15种选取方式.

记事件 B 为“这 2 名学生除选修物理以外另外两门选课中有相同科目”.

在15种选取方式中，这 2 名学生除选修物理以外另外两门选课中有相同科目的选取方式有 A_1A_2，B_1B_2，C_1C_2，B_1C_1，B_1C_2，B_2C_1，B_2C_2，A_1C_1，A_1C_2，A_2C_1，A_2C_2，共 11 种，因此 $P(B)=\dfrac{11}{15}$.

……………………………………………………………14 分

（Ⅲ）在选取的 1000 名学生中，选修至少两门理科课程的人数为 $220+200+180=600$ 人， 频率为 $\dfrac{600}{1000}=\dfrac{3}{5}$.

选修至少两门文科课程的人数为 $175+135+90=400$ 人， 频率为 $\dfrac{400}{1000}=\dfrac{2}{5}$.

从上述数据估计该市选课偏理的学生人数多. ……………………………………………18 分

19．（本小题满分 18 分）

解：（Ⅰ）因为四边形 $ADEF$ 为正方形，

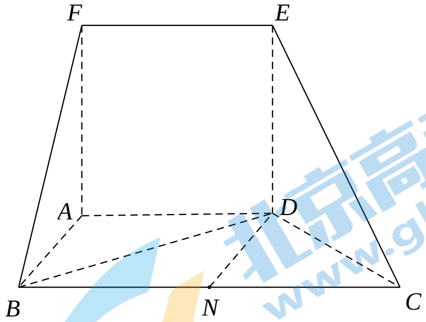
所以 $AD//EF$，

由于 $EF\subset$ 平面 $BCEF$，

$AD\not\subset$ 平面 $BCEF$，

所以 $AD//$ 平面 $BCEF$. ……………………………………………………………5 分

（Ⅱ）因为四边形 $ADEF$ 为正方形，所以 $DE \perp AD$.



平面 $ADEF \perp$ 平面 $ABCD$，

平面 $ADEF \cap$ 平面 $ABCD = AD$，

所以 $DE \perp$ 平面 $ABCD$.

所以 $DE \perp BD$.

取 BC 中点 N，连接 DN.

由 $BN // AD$， $BN = AD$， $\angle BAD = 90°$，

可得四边形 $ABND$ 为正方形.

所以 $DN = AB$.

所以 $DN = \frac{1}{2}BC$.

所以 $BD \perp CD$.

因为 $CD \cap DE = D$，所以 $BD \perp$ 平面 CDE. ……………………………………12 分

（Ⅲ）存在，当 M 为 BD 的中点时，$CE //$ 平面 AMF，此时 $\frac{BM}{DM} = 1$. 证明如下：

连接 AN 交 BD 于点 M，

由于四边形 $ABND$ 为正方形，

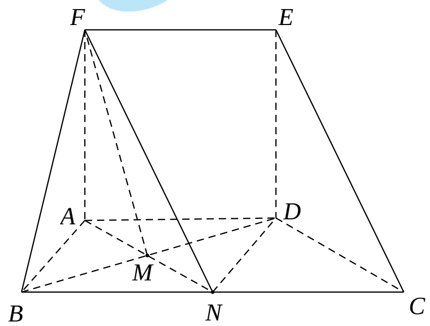
所以 M 是 BD 的中点，同时也是 AN 的中点.

因为 $NC = AD, NC // AD$，

又四边形 $ADEF$ 为正方形，

所以 $NC = FE, NC // FE$，连接 NF，

所以四边形 $NCEF$ 为平行四边形.



所以 $CE // NF$.

又因为 $NF \subset$ 平面 AMF，

$CE \not\subset$ 平面 AMF，

所以 $CE//$ 平面 AMF. ……………………………………………………18 分

20. （本小题满分 18 分）

解：（Ⅰ）由于圆 O 与线段 AB 相切，所以半径 $r=1$. 即圆 O 的方程为 $x^2+y^2=1$.

又由题 $x^2+y^2=1$ 与线段 AC 相切，所以线段 AC 方程为 $x=-1$. 即 $m=-1$.

故直线 BC 的方程为 $(n+1)x+3y-2n+1=0$. 由直线 BC 和圆 O 相切可得：$\dfrac{|1-2n|}{\sqrt{(n+1)^2+9}}=1$，

解得 $n=3$ 或 $n=-1$. 由于 A,C 为不同的点，所以 $n=3$. ……………………5 分

（Ⅱ）设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2=-\dfrac{1}{2}$.

由 $\begin{cases} y=-x+t, \\ x^2+y^2=1, \end{cases}$ 可得 $2x^2-2tx+t^2-1=0$，

$\Delta=4t^2-8(t^2-1)>0$，解得 $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$.

所以 $x_1+x_2=t, x_1x_2=\dfrac{t^2-1}{2}$.

故 $y_1y_2=(-x_1+t)(-x_2+t)=x_1x_2-(x_1+x_2)t+t^2=\dfrac{t^2-1}{2}-t^2+t^2=\dfrac{t^2-1}{2}$.

所以 $x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{t^2-1}{2}+\dfrac{t^2-1}{2}=t^2-1=-\dfrac{1}{2}$.

所以 $t^2=\dfrac{1}{2}$. 故 $t=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………………………………………11 分

（Ⅲ）设 $Q(x_0,y_0),P(x,y)$.

则 $|PA|=\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}$，$|PQ|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

若在直线 AO 上存在异于 A 的定点 Q，使得对圆 O 上任意一点 P，都有 $\dfrac{|PA|}{|PQ|}=\lambda$ (λ 为常数) 等价于

$\dfrac{\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=\lambda$ 对圆 O 上任意点 $P(x,y)$ 恒成立.

即 $(x+1)^2+(y+1)^2=\lambda^2(x-x_0)^2+\lambda^2(y-y_0)^2$.

整理得 $(1-\lambda^2)(x^2+y^2)+(2+2\lambda^2x_0)x+(2+2\lambda^2y_0)y+2-\lambda^2({x_0}^2+{y_0}^2)=0$.

因为点 Q 在直线 AO 上，所以 $x_0=y_0$. 由于 P 在圆 O 上，所以 $x^2+y^2=1$.

故 $(2+2\lambda^2x_0)(x+y)+3-\lambda^2-2\lambda^2{x_0}^2=0$ 对任意 $x+y\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ 恒成立.

所以 $\begin{cases}2+2\lambda^2x_0=0,\\3-\lambda^2-2\lambda^2{x_0}^2=0.\end{cases}$

显然 $\lambda\neq 0$，所以 $x_0=-\dfrac{1}{\lambda^2}$.

故 $3-\lambda^2-\dfrac{2}{\lambda^2}=0$，因为 $\lambda>0$，解得 $\lambda=\sqrt{2}$ 或 $\lambda=1$.

当 $\lambda=1$ 时，$Q(-1,-1)$，此时 Q,A 重合，舍去.

当 $\lambda=\sqrt{2}$ 时，$Q(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2})$，

综上，存在满足条件的定点 $Q(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2})$，此时 $\lambda=\sqrt{2}$. ………………………18 分